

Notas de Aula

Leandro F. Aurichi ¹

3 de agosto de 2016

¹Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

I	ZFC	7
1	Preâmbulos	9
1.1	Alguns axiomas	9
	Um processo lento e doloroso	11
	Boa ordem	12
	Alongamentos	14
	Exercícios	15
1.2	Boa ordem é boa mesmo	15
	Ordem \times escolha	17
	Alongamentos	20
	Exercícios	21
	Índices	26
	Notação	26
	Índice Remissivo	27

Introdução

Teoria dos conjuntos é uma área da matemática com diversas funções. Por um lado, ela é uma das maneiras de se fundamentar a matemática - no sentido que toda área matemática pode de alguma forma se fundamentada usando-se esta teoria. Por outro lado, tal área é uma área em si, com seus próprios problemas e motivações - muitas vezes se confundindo com combinatória infinita. Finalmente, teoria dos conjuntos é uma área que pode ter aplicações em diversas áreas - principalmente em problemas que envolvam algum tipo de combinatória (mesmo quando tal combiatória não é explícita).

Neste texto, trabalharemos mais com os dois últimos aspectos: teoria dos conjuntos como área em si e aplicações para outras áreas. A tentativa é fazer esses dois aspectos de forma alternada, mais focada nas aplicações e desenvolvendo a teoria conforme a necessidade.

A estrutura do texto se dá em duas principais partes: a primeira dentro de ZFC, que é o que se costuma supor em matemática comum. Na segunda parte, apresentamos alguns resultados que dependem de hipóteses mais fortes e discutiremos a importância deste tipo resultado.

Parte I

ZFC

Capítulo 1

Preâmbulos

1.1 Alguns axiomas

A ideia de que qualquer coleção de coisas forma um conjunto leva a contradições de forma muito rápida. Por exemplo, considere T a coleção de todos os conjuntos. Uma primeira coisa estranha a se notar é que, como T é um conjunto, temos que $T \in T$. Isso é estranho, mas a princípio, não é grave. Para diminuir o incômodo, tomemos N a coleção dos conjuntos “normais” no seguinte sentido:

$$N = \{x \in T : x \notin x\}$$

Assim, em N só temos os conjuntos “normais”. Por exemplo, $T \notin N$. Mas e quanto ao próprio N ? Note que se $N \in N$, teríamos, pela definição de N , que $N \notin N$. Por outro lado, se $N \notin N$, pelo mesmo motivo, teríamos $N \in N$ e não há escapatória.

O problema aqui surge por tomarmos qualquer coleção de coisas como formando um conjunto. Desta forma, como em qualquer outra coisa em matemática, o que precisamos não é de uma “definição” intuitiva do que é ser um conjunto, mas sim, de uma lista de axiomas que dizem o que podemos fazer.

A lista mais comumente usada para isso (e que nós vamos adotar aqui) é a seguinte (conhecida como **ZFC**):

Vazio $\exists x \forall y y \notin x$. Ou seja, esse x da fórmula é o conjunto vazio, denotado por \emptyset , que nada mais é que um conjunto que não tem elementos.

Extensionalidade $\forall x \forall y (x = y) \leftrightarrow (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Este é conhecido como o **paradoxo de Russell**.

Apesar de parecer que a definição de N é que leva a problemas, é a definição de T que é problemática

ZFC é uma tripla estranha: duas pessoas e um axioma. Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha (choice, em inglês).

Veja o Alongamento
1.1.10.

Par $\forall x \forall y \exists z x, y \in z$. Ou seja, para quaisquer conjuntos x, y , existe um conjunto z que os contém como elementos.

Separação Se A é um conjunto e φ é uma fórmula, então $\{x \in A : \varphi(x)\}$ é um conjunto. Note que, formalmente, para cada fórmula φ , temos um novo axioma. Ou seja, aqui temos um **esquema** que representa infinitos axiomas.

Aqui cometemos um abuso, o axioma só diz que estes elementos estarão em U , mas não que só eles. U poderia conter “lixo” - mas isso é facilmente corrigido usando-se o axioma da separação.

União $\forall \mathcal{F} \exists U \forall x \forall y (x \in y \wedge y \in \mathcal{F}) \rightarrow x \in U$. Vamos dar um exemplo para facilitar: considere $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Então o U do axioma nada mais é que $\{1, 2, 3, 4\}$. Em notação, temos que $U = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y$.

Infinito Dado x , defina $s(x) = x \cup \{x\}$ (leia $s(x)$ como “sucessor de x ” - isso vai fazer algum sentido daqui a pouco). O axioma do infinito nada mais diz que existe um conjunto que contém o \emptyset como elemento e que é fechado por sucessores. Em símbolos:

$$\exists S \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S s(x) \in S)$$

Partes $\forall x \exists y \forall z \subset x z \in y$. Isto é, dado um conjunto x , existe um conjunto y que contém todos os subconjuntos de x como elementos. Usando o axioma da separação para jogar fora eventuais outros elementos (isto é, elementos que não sejam subconjuntos de x), obtemos o conjunto que denotaremos por $\wp(x)$.

Pense como se φ fosse uma função e $y = \varphi(x)$. Veja o Exercício 1.1.16.

Substituição Dizemos que uma fórmula φ é do tipo função se, para qualquer x existe um único y tal que $\varphi(x, y)$. Assim, dada uma fórmula φ do tipo função temos que o seguinte também é um axioma:

$$\forall x \exists y \forall z \in x \exists z' \in y \varphi(z, z')$$

Ou seja, usando este axioma e o axioma da separação, dado um conjunto D , conseguimos obter que o seguinte também é um conjunto:

$$\{a : \exists d \in D \varphi(d, a)\}$$

Note também que, novamente, para cada fórmula do tipo função, temos um novo axioma. Ou seja, este é outro esquema de infinitos axiomas.

Fundação $\forall x \neq \emptyset \exists y \in x x \cap y = \emptyset$. Este axioma impede coisas estranhas como por exemplo $x \in x$: se temos que $x \in x$, então $\{x\}$ contraria este axioma.

Princípio da boa ordem Para todo conjunto x existe uma boa ordem sobre ele. Veremos mais adiante a definição de boa ordem e diversas de suas propriedades. Este axioma muitas vezes é substituído pelo axioma da escolha. Veremos mais sobre isso na próxima seção.

Um processo lento e doloroso

Teoria dos conjuntos serve também para fundamentar matemática no seguinte sentido: o que é feito em matemática, como funções, relações etc, pode ser construído a partir dos axiomas apresentados anteriormente. De certa forma, estamos então apenas supondo como verdadeiros estes axiomas. Mas esse não é um processo curto. E não é o enfoque deste texto. Assim, apenas para satisfazer o leitor curioso, vamos apresentar um roteiro como exemplo, deixando os outros como um exercício de imaginação.

Pode até não ser um processo difícil, mas é um processo cansativo.

Vamos mostrar como podemos formalizar a ideia de uma relação (por exemplo, a \leq entre os naturais). Desta forma, vamos supor que X é um conjunto (cuja construção já está justificada pelos axiomas) e vamos ver como justificar a existência de uma relação R sobre X . A primeira coisa a ser feita é transformar isso em uma linguagem com a qual possamos trabalhar. Só podemos trabalhar com conjuntos, então o processo é simplificado: não temos escolha, precisamos fazer a relação entre os elementos virar um conjunto. Mas isso é fácil. Basta pensarmos a relação R como o conjunto de pares de $X \times X$ tais que a primeira coordenada se relaciona com a segunda. Ou seja, basicamente é uma mudança de notação. Em vez de dizermos

$$xRy$$

dizemos

$$(x, y) \in R$$

Talvez um exemplo ajude aqui. Se estivéssemos trabalhando com a relação \leq nos naturais, estaríamos na verdade trabalhando com o conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \exists c \in \mathbb{N} \ a + c = b\}$$

Assim, só precisamos justificar a existência de $X \times X$ tendo como hipótese a existência de X . Se tivermos o conceito de par ordenado, isso fica fácil: nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados cujas duas coordenadas estão em X . Mas como definir um par ordenado só usando conjuntos? Dados x, y , uma primeira ideia poderia ser $\{x, y\}$. Mas isso já dá o problema da ordem, uma vez que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Uma boa ideia é simplesmente definir da seguinte forma:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Dá vontade de falar $\{(a, b) : a \leq b\}$, mas estamos tentando justificar \leq , então isso ficaria meio circular.

Veja o Alongamento 1.1.11 e o Exercício 1.1.17. Note que, dados x, y , temos que a justificativa para a existência do conjunto acima se dá simplesmente pelo axioma do par e da separação.

Boa ordem

Boa ordem não é só algo que estamos devendo definir para completar os axiomas, como também é um conceito que será bastante importante neste texto. Lembrando:

Definição 1.1.1. Dizemos que \leq é uma **ordem** sobre X se, para todo $x, y, z \in X$, temos:

Ou seja, na formalização anterior, teríamos que \leq é um subconjunto de $X \times X$ tal que, por exemplo, $(x, x) \in \leq$ para todo $x \in X$.

- (a) $x \leq x$;
- (b) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;
- (c) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Uma boa ordem é uma ordem com uma condição adicional:

Definição 1.1.2. Dizemos que uma ordem \leq sobre X é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe **mínimo** ($\min Y$), isto é, um $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

Vamos agora definir um conjunto bastante especial. Considere S o conjunto dado pelo axioma do infinito. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \in \wp(S) : \emptyset \in N \text{ e } \forall x \in N \ s(x) \in N\}$.

Note que, pela definição acima, temos diretamente que vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 (Princípio da indução infinita). *Seja $X \subset \omega$ tal que $\emptyset \in X$ e tal que, se $x \in X$, então $s(x) \in X$. Então $X = \omega$.*

Demonstração. Por um lado, $X \subset \omega$. Pela definição de ω , temos que $\omega \subset X$. □

Com isso, temos que ω faz o papel dos naturais, com a função s fazendo o papel da função “sucessor” usual dos naturais. Veremos mais algumas propriedades interessantes sobre ω nesta seção.

Um conceito que irá aparecer diversas vezes é o conceito de conjunto transitivo:

Definição 1.1.4. Dizemos que X é um **conjunto transitivo** se, para todo $y \in X$, temos que $y \subset X$.

Veja o Alongamento 1.1.13 para entender melhor o nome

Proposição 1.1.5. *Se $n \in \omega$, então n é transitivo.*

Demonstração. Note que \emptyset é trivialmente transitivo. Note também que, se a é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita. \square

Lema 1.1.6. *Sejam $a, b \in \omega$ tais que $a \subset b$. Então $a \in b$ ou $a = b$.*

Demonstração. Por indução sobre b . Se $b = \emptyset$, então $a = \emptyset$ e temos o resultado.

Suponha então o resultado para b e vamos provar para $s(b)$. Isto é, vamos supor que

$$a \subset b \Rightarrow (a \in b \vee a = b)$$

e vamos provar que

$$a \subset s(b) \Rightarrow (a \in s(b) \vee a = s(b))$$

Suponha então que $a \subset s(b) = b \cup \{b\}$. Temos dois casos. Se $b \in a$, como $a \in \omega$, a é transitivo. Logo, $b \subset a$. Ou seja, temos:

$$b \cup \{b\} \subset a \subset b \cup \{b\}$$

Logo, $a = s(b)$.

Se $b \notin a$, então $a \subset b$. Pela hipótese de indução temos dois casos:

- $a \in b$: Neste caso, temos $a \in b \cup \{b\} = s(b)$.
- $a = b$: Então $a = b \in b \cup \{b\} = s(b)$.

\square

Note que \subset é uma ordem sobre ω , já que \subset é uma ordem sobre qualquer conjunto. Mas, no caso de ω , podemos mostrar que tal ordem é uma boa ordem:

Teorema 1.1.7. *ω é bem ordenado por \subset .*

Um **minorante** de um conjunto S é um elemento a tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$.

Demonstração. Seja $S \subset \omega$ não vazio. Suponha que S não tenha mínimo. Seja

$$N = \{a \in \omega : a \text{ é um minorante de } S\}$$

Note que $N \cap S = \emptyset$, caso contrário S teria um mínimo. Note que $\emptyset \in N$. Suponha que $a \in N$. Vamos provar que $s(a) \in N$. Seja $b \in S$. Como $a \subset b$ e $a \neq b$, temos que $a \in b$ (Lema 1.1.6). Assim, $a \cup \{a\} \subset b$. Ou seja, $s(a)$ é um minorante para S e, portanto, $s(a) \in N$. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $N = \omega$ e, portanto, $S = \emptyset$, contradição. \square

Note que, assim, temos que a ordem \leq usual dos naturais se traduz como \subset aqui. E, incidentalmente, a ordem estrita $<$ se traduz como \in .

Alongamentos

Alongamento 1.1.8. Formalmente, podemos trabalhar com conjuntos apenas com as relações \in e $=$. Mas, nos axiomas listados acima, usamos outros símbolos. Para tudo ficar certo, defina as seguintes fórmulas só usando \in e $=$:

- (a) $x \subset y$
- (b) $x \cap y$
- (c) $x = \{a\}$ para algum a .

Alongamento 1.1.9. Dado $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mostre a existência de $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Alongamento 1.1.10. Escreva explicitamente o axioma da separação.

Alongamento 1.1.11. Mostre que, dados x, y , de fato existe o par ordenado (x, y) definido como acima.

Alongamento 1.1.12. Mostre que toda boa ordem é total (chamamos uma ordem sobre X de **ordem total** se todos os elementos de X são comparáveis entre si).

Alongamento 1.1.13. Mostre que x é transitivo se, e somente se, para todo a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$, temos que $a \in x$.

Alongamento 1.1.14. Mostre que o axioma do vazio pode ser obtido a partir dos outros.

Exercícios

Exercício 1.1.15. Imagine um mundo colorido onde existam duas cores de conjuntos: vermelhos e amarelos. Existem o vazio vermelho e o vazio amarelo, depois o unitário do vazio vermelho e o unitário do vazio amarelo. Mas também o conjunto com dois elementos: os dois vazios (um de cada cor). E proceda assim com as outras operações de conjuntos. Qual axioma de ZFC não é satisfeito nesse mundo?

Exercício 1.1.16. Usando o axioma da substituição, mostre que, dado um conjunto A , existe o conjunto $U = \{\{a\} : a \in A\}$. Mostre a existência do mesmo conjunto usando o axioma das partes.

Exercício 1.1.17. Escreva a fórmula “ x é um par ordenado”.

Exercício 1.1.18. Um função nada mais é que um conjunto de pares ordenados (ou seja, uma função nada mais é que um tipo de relação) com uma propriedade a mais. Escreva essa propriedade usando essa notação de conjunto.

Exercício 1.1.19. Seja \leq uma ordem sobre X . Mostre que são equivalentes:

- (i) \leq é uma boa ordem;
- (ii) não existe $(x_n)_{n \in \omega}$ tal que cada $x_n \in X$ e $x_{n+1} < x_n$.

Exercício 1.1.20. Mostre que, dado $n \in \omega$, $n = \{k \in \omega : k < n\}$.

Ou seja, podemos definir $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.

1.2 Boa ordem é boa mesmo

Começamos esta seção com uma aplicação interessante do princípio da boa ordem. Na próxima seção, veremos que essa aplicação tem mais coisas interessantes escondidas.

Teorema 1.2.1. *Todo espaço vetorial possui base.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Dado $A \subset V$, vamos denotar por $[A]$ o subespaço gerado por A (lembre-se que este é o subconjunto de V que contém A e todas as combinações lineares dos elementos de A). Por convenção, adotemos $[\emptyset] = \{0\}$. Seja \preceq uma boa ordem sobre V . Defina B da seguinte maneira

$$B = \{v \in V : v \notin [\{w \in V : w \prec v\}]\}$$

Aqui a ideia é que organizamos os vetores numa fila e os que não eram combinação lineares dos anteriores entram em B .

Vamos mostrar que B é uma base para V . Suponha que B não seja linearmente independente. Sejam $b_1, \dots, b_n \in B$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ (K é um corpo qualquer sobre quem V é espaço vetorial) tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i = 0$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo i . Seja b_j o máximo de $\{b_1, \dots, b_n\}$ (com relação a \preceq). Note que $b_j \in [\{b_1, \dots, b_n\} \setminus \{b_j\}]$ e, portanto, $b_j \in [\{w \in V : w \prec b_j\}]$. Logo, $b_j \notin B$, contradição.

Agora vamos mostrar que B é gerador. Isto é, que $[B] = V$. Suponha que não. Então existe $b \notin [B]$. Seja o menor b com tal propriedade (estamos usando que \preceq é boa ordem). Logo, para todo $w \prec b$, $w \in [B]$. Ou seja, $[\{w \in V : w \prec b\}] \subset [B]$ (isso é um exercício simples de álgebra linear). Como $b \notin [B]$, temos que $b \notin [\{w \in V : w \prec b\}]$ e, portanto, $b \in B$ contradição (pois $B \subset [B]$). \square

Outro fato importante sobre boas ordens é que vale uma certa indução para elas:

Proposição 1.2.2 (indução para boa ordem). *Seja \leq uma boa ordem sobre X . Então vale indução sobre X no seguinte sentido: dada uma fórmula*

φ tal que, para qualquer $x \in X$ temos

$$(\forall y \in X \ y < x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)$$

Um jeito de ler essa é hipótese é “se vale para todo mundo antes de x , vale para x ”.

então vale $\varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponha que não vale o resultado, então existe x o menor tal que não vale $\varphi(x)$. Logo, pela hipótese sobre φ , temos que vale $\varphi(x)$, contradição. \square

Nos naturais, podemos definir funções num ponto n apenas com base em como a função foi definida nos valores menores que n . Por exemplo, podemos definir f de forma que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (n+1)f(n)$ (também conhecida como $n!$). Para boas ordens, podemos fazer algo similar:

A existência de Y pode ser omitida, mas a demonstração fica um pouco mais confusa. Veja o Exercício 1.2.15.

Proposição 1.2.3 (recursão para boa ordem). *Seja \leq uma boa ordem sobre X . Seja φ uma fórmula do tipo função tal que existe um conjunto Y com a propriedade que, se $\varphi(x, y)$ vale para algum x, y , então $y \in Y$. Então existe uma única função com domínio X tal que, para cada $x \in X$, $f(x) = a$, onde a é o único tal que $\varphi(\{f(y) : y < x\}, a)$.*

A ideia aqui é que, se não desse para definir tal função, existiria o primeiro ponto em que ela não poderia ser definida e isso levaria a uma contradição.

Demonstração. Considere \mathcal{F} o conjunto de todas as funções g com domínio algum **segmento inicial** de X , isto é, $\{y \in X : y < x\}$ para algum $x \in X$ e tal que $g(x) = a$ onde $\varphi(\{g(y) : y < x\}, a)$ para cada x no domínio de g .

Primeiramente, note que tal família é não vazia, já que $g = \{(x, a)\} \in \mathcal{F}$, onde $x = \min X$ e a é tal que $\varphi(\emptyset, a)$. Note também que dadas quaisquer duas funções em \mathcal{F} , elas são **compatíveis**, isto é, se x pertence ao domínio de ambas, elas valem o mesmo em tal ponto x (mostre isso por indução). Como união de uma família de funções compatíveis é uma função (veja o Alongamento 1.2.9), temos que $f = \bigcup \mathcal{F}$ é uma função. Note que, se mostrarmos que f tem domínio X , terminamos. Suponha que não e seja $x = \min\{y \in X : y \notin \text{dom}(f)\}$. Considere

$$g = f \cup \{(x, a)\}$$

onde a é o único tal que $\varphi(\{y \in X : y < x\}, a)$. Note que $g \in \mathcal{F}$, contrariando a definição de f . \square

Ordem \times escolha

Como dito anteriormente, o princípio da boa ordem é equivalente ao axioma da escolha. Mas existem outras formulações também equivalentes. Vamos apresentar algumas delas, começando com uma das mais populares:

Definição 1.2.4. Seja \leq uma ordem sobre X . Dizemos que $\mathcal{C} \subset X$ é uma **cadeia** se \mathcal{C} é **totalmente ordenado** por \leq , isto é, dado $a, b \in \mathcal{C}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$. Dizemos que $a \in X$ é **maximal** se não existe $b \in X$ tal que $a < b$. Dado $Y \subset X$, dizemos que $a \in X$ é um **majorante** para Y se, para todo $y \in Y$ temos que $y \leq a$.

Proposição 1.2.5 (Lema de Zorn). *Seja \leq uma ordem sobre X conjunto não vazio. Se toda cadeia em X admite majorante, então X admite elemento maximal.*

Demonstração. Seja \preceq uma boa ordem sobre X . Para cada $x \in X$, defina

$$A_x = \begin{cases} \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{se } z < x \text{ para todo } z \in \bigcup_{y \prec x} A_y \\ \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como essa é a primeira construção por recursão não trivial deste texto, vamos tentar apresentar a ideia aqui. Suponha que α é o mínimo de X com relação a \preceq . Desta forma, A_α é o primeiro a ser definido. Como não existem A_y com $y < \alpha$ para falhar a hipótese de construção, temos automaticamente que

$$A_\alpha = \{\alpha\} \cup \emptyset = \{\alpha\}$$

Estamos usando tacitamente aqui recursão para boas ordens. E cuidado com as ordens aqui, temos duas diferentes.

Desta forma, suponha que β seja o primeiro elemento de X maior que α (com relação a \preceq) mas que não valha $\alpha < \beta$. Então, temos que que

$$A_\beta = \{\alpha\}$$

Agora, se γ for o primeiro maior que α e β (com relação a \preceq , mas $\alpha < \gamma$, então

$$A_\gamma = \{\gamma\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \gamma\}.$$

Vamos provar que cada A_x é uma cadeia com relação a \leq . Vamos fazer isso por indução sobre x . Isto é, vamos supor que, dado $x \in X$, se A_y for uma cadeia para cada $y \prec x$, então A_x também é uma cadeia. Primeiramente, note que $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é uma cadeia (veja o Exercício 1.2.11). Assim, temos dois casos:

- $A_x = \bigcup_{y \prec x} A_y$. Este caso é trivial pelo comentário acima.
- $A_x = \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y$. Neste caso, isso quer dizer que $z < x$ para todo $z \in \bigcup_{y \prec x} A_y$. Ou seja, $\bigcup_{y \prec x} A_y$ é totalmente ordenado e todos os seus elementos são menores que x . Logo, A_x também é uma cadeia.

Note que, pelo mesmo Exercício 1.2.11, temos que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia com relação a \leq . Logo, por hipótese, temos que existe x majorante para A . Se mostrarmos que x é maximal, terminamos. Suponha que x não seja maximal. Isto é, existe $z \in X$ com $x < z$. Note então que, por definição, temos:

$$A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y < z} A_y$$

e, portanto, $z \in A$, o que é uma contradição. \square

O Lema de Zorn implica o princípio da boa ordem facilmente:

Proposição 1.2.6. *Se vale o Lema de Zorn, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja \mathcal{O} o conjunto dos pares (A, \leq_A) onde $A \subset X$ e \leq_A é uma boa ordem sobre A . Considere a seguinte relação sobre \mathcal{O} :

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$$

se $A \subset B$, $\leq_B \cap (A \times A) = \leq_A$ e A é um segmento inicial de B , isto é, para todo $a \in A$ e $b \in B \setminus A$, $a \leq_B b$. Seja \mathcal{C} uma cadeia de elementos de \mathcal{O} . Vamos mostrar que $\leq = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} \leq_A$ é uma boa ordem sobre $Y =$

A primeira vontade aqui é simplesmente dizer que uma ordem estende a outra. Mas daí união de boas ordens pode não ser uma boa ordem (veja o Exercício 1.2.12.)

$\bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} A$. Que \leq é uma ordem, é fácil. Então seja $S \subset Y$ não vazio. Seja $y \in S$. Seja A tal que $(A, \leq_A) \in \mathcal{C}$ e tal que $y \in A$. Seja $m = \min S \cap A$ (tal mínimo é considerado com relação a \leq_A). Note que, pela maneira como \preceq é definida, não existe $y' \in S$ tal que $y' < m$. Logo, m é o mínimo de S . Desta forma, temos que $(Y, \preceq) \in \mathcal{O}$ e é um majorante para a cadeia \mathcal{C} . Assim, pelo Lema de Zorn, temos que existe (B, \leq_B) maximal em \mathcal{O} . Note que $B = X$, pois, caso contrário, se existe $x \in X \setminus B$, basta estender a ordem \leq_B para incluir x como o maior elemento de $B \cup \{x\}$ que seria um elemento de \mathcal{O} estritamente maior que (B, \leq_B) . \square

O princípio da boa ordem claramente implica o **axioma da escolha**:

Proposição 1.2.7 (Axioma da escolha). *Dada uma família \mathcal{F} de conjuntos não vazios, existe $f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Fixe \leq uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Para cada $x \in \mathcal{F}$, defina $f(x) = \min x$. \square

Vimos anteriormente que todo espaço vetorial tem base. Fizemos isso usando o princípio da boa ordem. Ou seja, mostramos a implicação “princípio da boa ordem implica que todo espaço vetorial possui base”. A volta também vale. Mas não vamos fazer um caminho direto: primeiramente vamos mostrar o seguinte:

Proposição 1.2.8. *Se todo espaço vetorial possui base, então (quase) vale o axioma da escolha.*

Demonstração. Vamos mostrar uma versão mais fraca que o axioma da escolha: o **axioma das múltiplas escolhas** - Dada \mathcal{F} uma família de conjuntos não vazios, existe $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \wp(\bigcup \mathcal{F})$ tal que $\varphi(F) \subset F$ é finito e não vazio para todo F . Veremos depois como passar dessa afirmação para o axioma da escolha propriamente dito.

Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os elementos de \mathcal{F} são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 1.2.14). Defina $X = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Seja k um corpo. Defina $k(X)$ o corpo de frações com “variáveis” em X . Isto é, os elementos de $k(X)$ são “frações de polinômios de várias variáveis”, mas no lugar das variáveis, aparecem elementos de X .

Para cada $F \in \mathcal{F}$, definimos o F -grau de um monômio como sendo a soma dos graus de todos os elementos de F naquele monômio. Um elemento $f \in k(X)$ é dito F -homogêneo de grau d se é da forma $\frac{p_1}{p_2}$ onde todos os

Esse resultado (e demonstração) é de Andreas Blass em [?].

Monômio é só a multiplicação de um escalar por variáveis. Ou seja, um polinômio é a soma de monômios.

monômios de p_2 tem um mesmo F -grau n e todos os monômios de p_1 tem F -grau $d + n$.

Note que $K = \{f \in k(X) : f \text{ é } F\text{-homogêneo de grau } 0 \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}$ é um subcorpo e, portanto, $k(X)$ é um espaço vetorial sobre K . Seja V o espaço gerado por X em $k(X)$ (como K -espaço vetorial).

Por hipótese, existe B base para V . Seja $F \in \mathcal{F}$ e seja $x \in F$. Como $x \in V$, existe $B(x) \subset B$ finito e, para cada $b \in B(x)$, existe $\lambda_b^x \in K$ não nulo de forma que

$$x = \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$$

Seja $y \in F$. Note que, então,

$$y = \sum_{b \in B(y)} \lambda_b^y b$$

Note também que $\frac{y}{x} \in K$ (aqui usamos que os elementos de \mathcal{F} são dois a dois disjuntos, veja o Alongamento 1.2.10). Logo, multiplicando a primeira equação acima por $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \lambda_b^x b$$

Como B é base, temos unicidade na escrita. Em particular, $B(x) = B(y)$. Ou seja, $B(x)$ não depende do particular $x \in F$ tomado. Note também que cada $\lambda_b^y = \frac{y \lambda_b^x}{x}$. Ou seja, $f = \frac{1}{x} \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$ também é único. Mais que isso, f é F -homogêneo de grau -1 . Ou seja, se escrevemos f na forma simplificada, alguns elementos de F devem aparecer no seu denominador. Defina $\varphi(F)$ como sendo o conjunto de tais elementos. Ou seja, definimos $\varphi(F)$ como sendo um subconjunto finito de F e, portanto, temos a função desejada. \square

Ainda faltam algumas implicações para fecharmos a equivalência completa entre essas afirmações. Mas elas ficarão bem mais fáceis quando tivermos mais algumas ferramentas. Voltaremos a elas quando tivermos tais ferramentas.

Alongamentos

Alongamento 1.2.9. Mostre que, se \mathcal{F} é um conjunto de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função.

Alongamento 1.2.10. Na demonstração da Proposição 1.2.8, note que se os elementos de \mathcal{F} não são necessariamente dois a dois disjuntos, então dados $x, y \in F \in \mathcal{F}$, pode não ser verdade que $\frac{y}{x}$ tenha G -grau homogêneo para todo $G \in \mathcal{F}$.

Exercícios

Exercício 1.2.11. Seja X um conjunto ordenado por \leq . Seja \mathcal{C} uma família de subconjuntos de X tais que, dados $A, B \in \mathcal{C}$, temos que $A \subset B$ ou $B \subset A$ (ou seja, \mathcal{C} é uma cadeia com relação a \subset). Suponha que cada $A \in \mathcal{C}$ seja totalmente ordenado por \leq . Mostre que $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ é totalmente ordenado por \leq . Informalmente, lemos este exercício como “cadeia de cadeias é cadeia”.

Exercício 1.2.12. Escreva a ordem usual de \mathbb{Z} como uma cadeia de boas ordens. Conclua que união de cadeias de boas ordens não necessariamente é boa ordem.

Exercício 1.2.13. Mostre diretamente que, se vale o Lema de Zorn, então vale o axioma da escolha.

Exercício 1.2.14. Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos não vazios. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $F' = \{(x, F) : x \in F\}$. Mostre que \mathcal{F}' é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Exercício 1.2.15. Seja \leq boa ordem sobre X . Seja φ uma fórmula do tipo função. Mostre que a fórmula $\psi(x, a)$ dada por

$$\begin{aligned} &“(x \in X \text{ e existe uma função } f \text{ com domínio } \{y \in X : y \leq x\} \text{ tal que} \\ & f(z) = b \text{ onde } \varphi(\{z' : z' < z\}, b) \text{ e } f(x) = a \text{ onde } \varphi(\{z' : z' < x\}, a) \\ & \text{ou } a = \emptyset” \end{aligned}$$

é uma fórmula do tipo função. Depois, note que, pelo axioma da substituição, podemos tomar todos os valores possíveis de a se $x \in X$ e $\psi(x, a)$. Mostre então que vale o teorema da recursão sem pedirmos a restrição dos valores para φ .

Dicas de alguns exercícios

1.1.15 Verifique os axiomas na ordem em que eles foram listados aqui.

Soluções de alguns exercícios

Notação

Índice Remissivo