Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

3 de dezembro de 2015

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Parte I

ZFC

Capítulo 1

Preâmbulos

1.1 Alguns axiomas

A ideia de que qualquer coleção de coisas é um conjunto leva a contradições de forma muito rápida. Por exemplo, considere T a coleção de todos os conjuntos. Uma primeira coisa estranha a se notar é que, como T é um conjunto, temos que $T \in T$. Isso é estranho, mas a princípio, não é grave. Para diminuir o incômodo, tomemos N a coleção dos conjuntos "normais" no seguinte sentido:

$$N = \{x \in T : x \notin x\}$$

Assim, em N só temos os conjuntos "normais". Por exemplo, $T \notin N$. Mas e quanto ao próprio N? Note que se $N \in N$, teríamos, pela definição de N, que $N \notin N$. Por outro lado, se $N \notin N$, pelo mesmo motivo, teríamos $N \in N$ e não há escapatória.

Este é conhecido como o **paradoxo de Russell**.

O problema aqui surge por tomarmos qualquer coleção de coisas como um conjunto. Desta forma, como em qualquer outra coisa em matemática, o que precisamos não é de uma "definição" intuitiva do que é ser um conjunto, mas sim, de uma lista de axiomas que dizem o que podemos fazer.

Apesar de parecer que a definição de N é que leva a problemas, é a definição de T que é problemática

A lista mais comumente usada para isso (e que nós vamos adotar aqui) é a seguinte (conhecida como **ZFC**):

ZFC é uma tripla estranha: duas pessoas e um axioma. Zermelo, Fraenkel e o axioma da escolha (choice, em inglês).

Vazio $\exists x\ \forall y\ y \notin x$. Ou seja, esse x da fórmula é o conjunto vazio, denotado por $\emptyset$ que nada mais é que um conjunto que não tem elementos.

Extensionalidade $\forall x\ \forall y\ (x = y) \leftrightarrow (\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Ou seja, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

Par $\forall x\ \forall y\ \exists z\ x, y \in z$. Ou seja, para quaisquer conjuntos x, y, existe um conjunto z que os contém como elementos.

Separação Se A é um conjunto e φ é uma fórmula, então $\{x \in A : \varphi(x)\}$ é um conjunto. Note que, formalmente, para cada fórmula φ, temos um novo axioma. Ou seja, aqui temos um **esquema** que representa infinitos axiomas.

Veja o Alongamento 1.1.10.

União $\forall \mathcal{F}\, \exists U\, \forall x\, \forall y\, (x \in y \wedge y \in \mathcal{F}) \rightarrow x \in U$. Vamos dar um exemplo para facilitar: considere $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$. Então o U do axioma nada mais é que $\{1, 2, 3, 4\}$. Em notação, temos que $U = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{y \in \mathcal{F}} y$.

Aqui cometemos um abuso, o axioma só diz que estes elementos estarão em U, mas não que só eles. U poderia conter "lixo" - mas isso é facilmente corrigido usando-se o axioma da separação.

Infinito Dado x, defina $s(x) = x \cup \{x\}$ (leia $s(x)$ como "sucessor de x" - isso vai fazer algum sentido daqui a pouco). O axioma do infinito nada mais diz que existe um conjunto que contém o $\emptyset$ como elemento e que é fechado por sucessores. Em símbolos:

$$\exists S\ \emptyset \in S \wedge (\forall x \in S\ s(x) \in S)$$

Partes $\forall x\, \exists y\, \forall z \subset x\ z \in y$. Isto é, dado um conjunto x, existe um conjunto y que contém todos os subconjuntos de x como elementos. Usando o axioma da separação para jogar fora eventuais outros elementos (isto é, elementos que não sejam subconjuntos de x), obtemos o conjunto que denotaremos por $\wp(x)$.

Substituição Dizemos que uma fórmula φ é do tipo função se, para qualquer x existe um único y tal que $\varphi(x, y)$. Assim, dada uma fórmula φ tipo função temos que o seguinte também é um axioma:

Pense como se φ fosse uma função e $y = \varphi(x)$. Veja o Exercício 1.1.16.

$$\forall x\ \exists y\ \forall z \in x\ \exists z' \in y\ \varphi(z, z')$$

Ou seja, usando este axioma e o axioma da separação, dado um conjunto D, conseguimos obter que o seguinte também é um conjunto:

$$\{a : \exists d \in D\ \varphi(d, a)\}$$

Note também que, novamente, para cada fórmula do tipo função, temos um novo axioma. Ou seja, este é outro esquema de infinitos axiomas.

Fundação $\forall x \neq \emptyset\ \exists y \in x\ x \cap y = \emptyset$. Este axioma impede coisas estranhas como $x \in x$: se temos que $x \in x$, então $\{x\}$ contraria este axioma.

Princípio da boa ordem Para todo conjunto x existe uma boa ordem sobre ele. Veremos mais adiante a definição de boa ordem e diversas de suas propriedades. Este axioma muitas vezes é substituido pelo axioma da escolha. Veremos mais sobre isso na próxima seção.

Um processo lento e doloroso

Teoria dos conjuntos serve também para fundamentar matemática no seguinte sentido: o que é feito em matemática, como funções, relações etc, pode ser construido a partir dos axiomas apresentados anteriormente. De certa forma, estamos então apenas supondo como verdadeiros estes axiomas. Mas esse não é um processo curto. E não é o enfoque deste texto. Assim, apenas para satisfazer o leitor curioso, vamos apresentar um roteiro como exemplo, deixando os outros como um exercício de imaginação.

Pode até não ser um processo difícil, mas é um processo cansativo.

Vamos mostrar como podemos formalizar a ideia de uma relação (por exemplo, a $\leq$ entre os naturais). Desta forma, vamos supor que X é um conjunto (cuja construção já está justificada pelos axiomas) e vamos ver como justificar a existência de uma relação R sobre X. A primeira coisa a ser feita é transformar isso em uma linguagem com a qual possamos trabalhar. Só podemos trabalhar com conjuntos, então o processo é simplificado: não temos escolha, precisamos fazer a relação entre os elementos virar um conjunto. Mas isso é fácil. Basta pensarmos a relação R como o conjunto de pares de $X \times X$ tais que a primeira coordenada se relaciona com a segunda. Ou seja, basicamente é uma mudança de notação. Em vez de dizermos

$$xRy$$

dizemos

$$(x, y) \in R$$

Talvez um exemplo ajude aqui. Se estivessemos trabalhando com a relação $\leq$ nos naturais, estaríamos na verdade trabalhando com o conjunto

$$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : \exists c \in \mathbb{N}\ a + c = b\}$$

Dá vontade de falar $\{(a, b) : a \leq b\}$, mas estamos tentando justificar $\leq$, então isso ficaria meio circular.

Assim, só precisamos justificar a existência de $X \times X$ tendo X. Se tivermos o conceito de par ordenado, isso fica fácil: nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados cujas duas coordenas estão em X. Mas como definir um par ordenado só usando conjuntos? Dados x, y, uma primeira ideia poderia ser $\{x, y\}$. Mas isso já dá o problema da ordem, uma vez que $\{x, y\} = \{y, x\}$. Uma boa ideia é simplesmente definir da seguinte forma:

$$(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$$

Dados x, y, temos que a justificativa para a existência do conjunto acima se dá simplesmente pelo axioma do par e da separação.

Veja o Alongamento 1.1.11 e o Exercício 1.1.17

Boa ordem

Boa ordem não é só algo que estamos devendo definir para completar os axiomas, como também é um conceito que será bastante importante neste texto. Lembrando:

Ou seja, na formalização anterior, teríamos que $\leq$ é um subconjunto de $X \times X$ tal que, por exemplo, $(x, x) \in \leq$ para todo $x \in X$.

Definição 1.1.1. Dizemos que $\leq$ é uma **ordem** sobre X se, para todo $x, y, z \in X$, temos:

(a) $x \leq x$;

(b) se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(c) se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

Uma boa ordem é uma ordem com uma condição adicional:

Definição 1.1.2. Dizemos que uma ordem $\leq$ sobre X é uma **boa ordem** se, para todo subconjunto não vazio $Y \subset X$ existe **mínimo** ($\min Y$), isto é, um $y \in Y$ tal que $y \leq y'$ para todo $y' \in Y$.

Vamos agora definir um conjunto bastante especial. Considere S o conjunto dado pelo axioma do infinito. Definimos o seguinte conjunto:

$$\omega = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N$$

onde $\mathcal{N} = \{N \in \wp(S) : \emptyset \in N \text{ e } \forall x \in N \ s(x) \in N\}$.

Note que, pela definição acima, temos diretamente que vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.3 (**Princípio da indução infinita**). *Seja $X \subset \omega$ tal que $\emptyset \in X$ e tal que, se $x \in X$, então $s(x) \in X$. Então $X = \omega$.*

Demonstração. Por um lado, $X \subset \omega$. Pela definição de ω, temos que $\omega \subset X$. □

Com isso, temos que ω faz o papel dos naturais, com a função s fazendo o papel da função "sucessor" usual dos naturais. Veremos mais algumas propriedades interessantes sobre ω nesta seção.

Um conceito que irá aparecer diversas vezes é o conceito de conjunto transitivo:

Veja o Alongamento 1.1.13 para entender melhor o nome

Definição 1.1.4. Dizemos que X é um **conjunto transitivo** se, para todo $y \in X$, temos que $y \subset X$.

Proposição 1.1.5. *Se $n \in \omega$, então n é transitivo.*

Demonstração. Note que $\emptyset$ é trivialmente transitivo. Note também que, se a é transitivo, então $a \cup \{a\}$ também é. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita. $\square$

Lema 1.1.6. *Sejam $a, b \in \omega$ tais que $a \subset b$. Então $a \in b$ ou $a = b$.*

Demonstração. Por indução sobre b. Se $b = \emptyset$, então $a = \emptyset$ e temos o resultado.

Suponha então o resultado para b e vamos provar para $s(b)$. Isto é, vamos supor que

$$a \subset b \Rightarrow (a \in b \vee a = b)$$

e vamos provar que

$$a \subset s(b) \Rightarrow (a \in s(b) \vee a = s(b))$$

Suponha então que $a \subset s(b) = b \cup \{b\}$. Temos dois casos. Se $b \in a$, como $a \in \omega$, a é transitivo. Logo, $b \subset a$. Ou seja, temos:

$$b \cup \{b\} \subset a \subset b \cup \{b\}$$

Logo, $a = s(b)$.

Se $b \notin a$, então $a \subset b$. Pela hipótese de indução temos dois casos:

- $a \in b$: Neste caso, temos $a \in b \cup \{b\} = s(b)$.
- $a = b$: Então $a = b \in b \cup \{b\} = s(b)$.

$\square$

Note que $\subset$ é uma ordem sobre ω ($\subset$ é uma ordem sobre qualquer conjunto). Mas, no caso de ω, podemos mostrar que tal ordem é uma boa ordem:

Teorema 1.1.7. *ω é bem ordenado por $\subset$.*

Demonstração. Seja $S \subset \omega$ não vazio. Suponha que S não tenha mínimo. Seja

$$N = \{a \in \omega : a \text{ é um minorante de } S\}$$

Note que $N \cap S = \emptyset$, caso contrário S teria um mínimo. Note que $\emptyset \in N$. Suponha que $a \in N$. Vamos provar que $s(a) \in N$. Seja $b \in S$. Como $a \subset b$ e $a \neq b$, temos que $a \in b$ (Lema 1.1.6). Assim, $a \cup \{a\} \subset b$. Ou seja, $s(a)$ é um minorante para S e, portanto, $s(a) \in N$. Logo, pelo princípio da indução finita, temos que $N = \omega$ e, portanto, $S = \emptyset$, contradição. $\square$

Um **minorante** de um conjunto S é um elemento a tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$.

Note que assim, temos que a ordem $\leq$ usual dos naturais se traduz como $\subset$ aqui. E, incidentalmente, a ordem estrita $<$ se traduz como $\in$.

Alongamentos

Alongamento 1.1.8. Formalmente, podemos trabalhar com conjuntos apenas com as relações $\in$ e $=$. Mas, nos axiomas listados acima, usamos outros símbolos. Para tudo ficar certo, defina as seguintes fórmulas só usando $\in$ e $=$:

(a) $x \subset y$

(b) $x \cap y$

(c) $x = \{a\}$ para algum a.

Alongamento 1.1.9. Dado $\mathcal{F} \neq \emptyset$, mostre a existência de $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Alongamento 1.1.10. Escreva explicitamente o axioma da separação.

Alongamento 1.1.11. Mostre que, dados x, y, de fato existe o par ordenado (x, y) definido como acima.

Alongamento 1.1.12. Mostre que toda boa ordem é total (chamamos uma ordem sobre X de **ordem total** se todos os elementos de X são comparáveis entre si).

Alongamento 1.1.13. Mostre que x é transitivo se, e somente, para todo a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$, temos que $a \in x$.

Alongamento 1.1.14. Mostre que o axioma do vazio pode ser obtido a partir dos outros.

Exercícios

Exercício 1.1.15. Imagine um mundo colorido onde existam duas cores de conjuntos: vermelhos e amarelos. Existem o vazio vermelho e o vazio amarelo, depois o unitário do vazio vermelho e o unitário do vazio amarelo. Mas também o conjunto com dois elementos: os dois vazios (um de cada cor). E proceda assim com as outras operações de conjuntos. Qual axioma ZFC não é satisfeito nesse mundo?

Exercício 1.1.16. Usando o axioma da substituição, mostre que, dado um conjunto A, existe o conjunto $U = \{\{a\} : a \in A\}$. Mostre a existência do mesmo conjunto usando o axioma das partes.

Exercício 1.1.17. Escreva a fórmula “x é um par ordenado”.

Exercício 1.1.18. Um função nada mais é que um conjunto de pares ordenados (ou seja, uma função nada mais é que um tipo de relação) com uma propriedade a mais. Escreva essa propriedade usando essa notação de conjunto.

Exercício 1.1.19. Seja $\leq$ uma ordem sobre X. Mostre que são equivalentes:

(i) $\leq$ é uma boa ordem;

(ii) não existe $(x_n)_{n\in\omega}$ tal que cada $x_n \in X$ e $x_{n+1} < x_n$.

Exercício 1.1.20. Mostre que, dado $n \in \omega$, $n = \{k \in \omega : k < n\}$.

Ou seja, podemos definir $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$ etc.

1.2 Boa ordem é boa mesmo

Começamos esta seção com uma aplicação interessante do princípio da boa ordem. Na próxima seção, veremos que essa aplicação tem mais coisas interessantes escondidas.

Teorema 1.2.1. *Todo espaço vetorial possui base.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Dado $A \subset V$, vamos denotar por $[A]$ o subespaço gerado por A (lembre-se que este é o subconjunto de V que contém A e todas as combinações lineares dos elementos de A). Por convenção, adotemos $[\emptyset] = \{0\}$. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre V. Defina B da seguinte maneira

Aqui a ideia é que organizamos os vetores numa fila e os que não eram combinação lineares dos anteriores entram em B.

$$B = \{v \in V : v \notin [\{w \in V : w \prec v\}]\}$$

Vamos mostrar que B é uma base para V. Suponha que B não seja linearmente independente. Sejam $b_1, ..., b_n \in B$ e $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ (K é um corpo qualquer sobre quem V é espaço vetorial) tais que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$ e $\alpha_i \neq 0$ para todo i. Seja b_j o máximo de $\{b_1, ..., b_n\}$ (com relação a $\preceq$). Note que $b_j \in [\{b_1, ..., b_n\} \smallsetminus \{b_j\}]$ e, portanto, $b_j \in [\{w \in V : w \prec b_j\}]$. Logo, $b_j \notin B$, contradição.

Agora vamos mostrar que B é gerador. Isto é, que $[B] = V$. Suponha que não. Então existe $b \notin [B]$. Seja o menor b com tal propriedade (estamos usando que $\preceq$ é boa ordem). Logo, para todo $w \prec b$, $w \in [B]$. Ou seja, $[\{w \in V : w \prec b\}] \subset [B]$ (isso é um exercício simples de álgebra linear). Como $b \notin [B]$, temos que $b \notin [\{w \in V : w \prec b\}]$ e, portanto, $b \in B$ contradição (pois $B \subset [B]$). $\square$

Outro fato importante sobre boas ordens é que vale uma certa indução para elas:

Proposição 1.2.2 (indução para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Então vale indução sobre X no seguinte sentido: dada uma fórmula φ tal que, para qualquer $x \in X$ temos*

$$(\forall y \in X \ y < x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)$$

então vale $\varphi(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Suponha que não vale o resultado, então existe x o menor tal que não vale $\varphi(x)$. Logo, pela hipótese sobre φ, temos que vale $\varphi(x)$, contradição. □

Nos naturais, podemos definir funções num ponto n apenas com base em como a função foi definida nos valores menores que n. Por exemplo, podemos definir f de forma que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (n+1)f(n)$ (também conhecida como $n!$). Para boas ordens, podemos fazer algo similar:

A existência de Y pode ser omitida, mas a demonstração fica um pouco mais confusa. Veja o Exercício 1.2.14.

Proposição 1.2.3 (recursão para boa ordem). *Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função e tal que existe um Y tal que se $\varphi(x, y)$ vale para algum x, y, então $y \in Y$. Então existe uma única função com domínio X tal que, para cada $x \in X$, $f(x) = a$, onde a é o único tal que $\varphi(\{f(y) : y < x\}, a)$.*

A ideia aqui é que, se não desse para definir tal função, existiria o primeiro ponto em que ela não poderia ser definida e isso levaria a uma contradição.

Demonstração. Considere $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções g com domínio algum **segmento inicial** de X, isto é, $\{y \in X : y < x\}$ para algum $x \in X$ e tal que $g(x) = a$ onde $\varphi(\{g(y) : y < x\}, a)$ para cada x no domínio de g. Primeiramente, note que tal família é não vazia, já que $g = \{(x, a)\} \in \mathcal{F}$, onde $x = \min X$ e a é tal que $\varphi(\emptyset, a)$. Note também que dadas quaisquer duas funções em $\mathcal{F}$, elas são **compatíveis**, isto é, se x pertence ao domínio de ambas, elas valem o mesmo em tal ponto x (mostre isso por indução). Como união de uma família de funções compatíveis é uma função (veja o Alongamento 1.2.9), temos que $f = \bigcup \mathcal{F}$ é uma função. Note que, se mostrarmos que f tem domínio X, terminamos. Suponha que não e seja $x = \min\{y \in X : y \notin \mathrm{dom}(f)\}$. Considere

$$g = f \cup \{(x, a)\}$$

onde a é o único tal que $\varphi(\{y \in X : y < x\}, a)$. Note que $g \in \mathcal{F}$, contrariando a definição de f. □

Ordem $\times$ escolha

Como dito anteriormente, o princípio da boa ordem é equivalente ao axioma da escolha. Mas existem outras formulações também equivalentes. Vamos apresentar algumas delas, começando com uma das mais populares:

Definição 1.2.4. Seja $\leq$ uma ordem sobre X. Dizemos que $\mathcal{C} \subset X$ é uma **cadeia** se $\mathcal{C}$ é **totalmente ordenado** por $\leq$, isto é, dado $a, b \in \mathcal{C}$, vale $a \leq b$ ou $b \leq a$. Dizemos que $a \in X$ é **maximal** se não existe $b \in X$ tal que $a \leq b$. Dado $Y \subset X$, dizemos que $a \in X$ é um **majorante** para Y se, para todo $y \in Y$ temos que $y \leq a$.

Proposição 1.2.5 (Lema de Zorn). *Seja $\leq$ uma ordem sobre X conjunto não vazio. Se toda cadeia em X admite majorante, então X admite elemento maximal.*

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem sobre X. Para cada $x \in X$, defina

$$A_x = \begin{cases} \{x\} \cup \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{se } z < x \text{ para todo } z \in \bigcup_{y \prec x} A_y \\ \bigcup_{y \prec x} A_y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Estamos usando tacitamente aqui recursão para boas ordens. E cuidado com as ordens aqui, temos duas diferentes.

Note que $A = \bigcup_{x \in X} A_x$ é uma cadeia com relação a $\leq$ (mostre por indução que cada A_x é uma cadeia e depois conclua isso usando que cada um está contido no outro). Logo, por hipótese, temos que existe x majorante para A. Se mostrarmos que x é maximal, terminamos. Suponha que x não seja maximal. Isto é, existe $z \in X$ com $x < z$. Note então que, por definição, temos:

$$A_z = \{z\} \cup \bigcup_{y < z} A_y$$

e, portanto, $z \in A$, o que é uma contradição. $\square$

O Lema de Zorn implica o princípio da boa ordem facilmente:

Proposição 1.2.6. *Se vale o Lema de Zorn, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja $\mathcal{O}$ o conjunto dos pares $(A, \leq_A)$ onde $A \subset X$ e $\leq_A$ é uma boa ordem sobre A. Considere a seguinte relação sobre $\mathcal{O}$:

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$$

se $A \subset B$, $\leq_B \cap (A \times A) = \leq_A$ e A é um segmento inicial de B, isto é, para todo $a \in A$ e $b \in B \setminus A$, $a \leq_B b$. Seja $\mathcal{C}$ uma cadeia de elementos de $\mathcal{O}$. Vamos mostrar que $\leq = \bigcup_{(A, \leq_A) \in \mathcal{C}} \leq_A$ é uma boa ordem sobre $Y =$

A primeira vontade aqui é simplesmente dizer que uma ordem estende a outra. Mas daí união de boas ordens pode não ser uma boa ordem (veja o Exercício 1.2.11.)

$\bigcup_{(A,\leq_A)\in\mathcal{C}} A$. Que $\leq$ é uma ordem, é fácil. Então seja $S \subset Y$ não vazio. Seja $y \in S$. Seja A tal que $(A, \leq_A) \in \mathcal{C}$ e tal que $y \in A$. Seja $m = \min S \cap A$ (tal mínimo é considerado com relação a $\leq_A$). Note que, pela maneira como $\preceq$ é definida, não existe $y' \in S$ tal que $y' < m$. Logo, m é o mínimo de S. Desta forma, temos que $(Y, \leq) \in \mathcal{O}$ e é um majorante para a cadeia $\mathcal{C}$. Assim, pelo Lema de Zorn, temos que existe $(B, \leq_B)$ maximal em $\mathcal{O}$. Note que $B = X$, pois, caso contrário, se existe $x \in X \smallsetminus B$, basta estender a ordem $\leq_B$ para incluir x como o maior elemento de $B \cup \{x\}$ que seria um elemeto de $\mathcal{O}$ estritamente maior que $(B, \leq_B)$. $\square$

O princípio da boa ordem claramente implica o **axioma da escolha**:

Proposição 1.2.7 (**Axioma da escolha**). *Dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos não vazios, existe $f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Fixe $\leq$ uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{F}$. Para cada $x \in \mathcal{F}$, defina $f(x) = \min x$. $\square$

Vimos anteriormente que todo espaço vetorial tem base. Fizemos isso usando o princípio da boa ordem. Ou seja, mostramos a implicação "princípio da boa ordem implica que todo espaço vetorial possui base". A volta também vale. Mas não vamos fazer um caminho direto: primeiramente vamos mostrar o seguinte:

Proposição 1.2.8. *Se todo espaço vetorial possui base, então (quase) vale o axioma da escolha.*

Esse resultado (e demonstração) é de Andreas Blass em [1].

Demonstração. Vamos mostrar uma versão mais fraca que o axioma da escolha: o **axioma das múltiplas escolhas** - Dada $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios, existe $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \wp(\bigcup \mathcal{F})$ tal que $\varphi(F) \subset F$ é finito e não vazio para todo F. Veremos depois como passar dessa afirmação para o axioma da escolha propriamente dito.

Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Sem perda de generalidade, podemos supor que todos os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos (veja o Exercício 1.2.13). Defina $X = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$. Seja k um corpo. Defina $k(X)$ o corpo de frações com "variáveis" em X. Isto é, os elementos de $k(X)$ são "frações de polinômios de várias variáveis", mas no lugar das variáveis, aparecem elementos de X.

Monômio é só a multiplicação de um escalar por variáveis. Ou seja, um polinômio é a soma de monômios.

Para cada $F \in \mathcal{F}$, definimos o F-grau de um monômio como sendo a soma dos graus de todos os elementos de F naquele monômio. Um elemento $f \in k(X)$ é dito F-homogêneo de grau d se é da forma $\frac{p_1}{p_2}$ onde todos os monômios de p_2 tem um mesmo F-grau n e todos os monômios de p_1 tem F-grau $d+n$.

Note que $K = \{f \in k(X) : f$ é F-homogêneo de grau 0 para todo $F \in \mathcal{F}\}$ é um subcorpo e, portanto, $k(X)$ é um espaço vetorial sobre K. Seja V o espaço gerado por X em $k(X)$ (como K-espaço vetorial).

Por hipótese, existe B base para V. Seja $F \in \mathcal{F}$ e seja $x \in F$. Como $x \in V$, existe $B(x) \subset B$ finito e, para cada $b \in B(x)$, existe $\lambda_b^x \in K$ não nulo de forma que

$$x = \sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x b$$

Seja $y \in F$. Note que, então,

$$y = \sum_{b \in B(y)} \lambda_b^y b$$

Note também que $\frac{y}{x} \in K$ (aqui usamos que os elementos de $\mathcal{F}$ são dois a dois disjuntos, veja o Alongamento 1.2.10). Logo, multiplicando a primeira equação acima por $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$y = \sum_{b \in B(x)} \frac{y}{x} \lambda_b^x b$$

Como B é base, temos unicidade na escrita. Em particular, $B(x) = B(y)$. Ou seja, $B(x)$ não depende do particular $x \in F$ tomado. Note também que cada $\lambda_b^y = \frac{y\lambda_b^x}{x}$. Ou seja, $f = \frac{1}{x}\sum_{b \in B(x)} \lambda_b^x$ também é único. Mais que isso, f é F-homogêneo de grau -1. Ou seja, se escrevemos f na forma simplificada, alguns elementos de F devem aparecer no seu denominador. Defina $\varphi(F)$ como sendo o conjunto de tais elementos. Ou seja, definimos $\varphi(F)$ como sendo um subconjunto finito de F e, portanto, temos a função desejada. $\square$

Ainda faltam algumas implicações para fecharmos a equivalência completa entre essas afirmações. Mas elas ficarão bem mais fáceis quando tivermos mais algumas ferramentas. Voltaremos a elas quando tivermos tais ferramentas.

Alongamentos

Alongamento 1.2.9. Mostre que, se $\mathcal{F}$ é um conjunto de funções duas a duas compatíveis, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função.

Alongamento 1.2.10. Na demonstração da Proposição 1.2.8, note que se os elementos de $\mathcal{F}$ não são necessariamente dois a dois disjuntos, então dados $x, y \in F \in \mathcal{F}$, pode não ser verdade que $\frac{y}{x}$ tenha G-grau homogêneo para todo $G \in \mathcal{F}$.

Exercícios

Exercício 1.2.11. Escreva a ordem usual de $\mathbb{Z}$ como uma cadeia de boas ordens. Conclua que união de cadeias de boas ordens não necessariamente é boa ordem.

Exercício 1.2.12. Mostre diretamente que, se vale o Lema de Zorn, então vale o axioma da escolha.

Exercício 1.2.13. Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazios. Para cada $F \in \mathcal{F}$, defina $F' = \{(x, F) : x \in F\}$. Mostre que $\mathcal{F}'$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos.

Exercício 1.2.14. Seja $\leq$ boa ordem sobre X. Seja φ uma fórmula do tipo função. Mostre que a fórmula $\psi(x, a)$ dada por "($x \in X$ e existe uma função f com domínio $\{y \in x : y \leq x\}$ tal que $f(z) = b$ onde $\varphi(\{z' : z' < z\}, b)$ e $f(x) = a$ onde $\varphi(\{z' : z < x\}, a)$) ou $a = \emptyset$" é uma fórmula do tipo função. Depois, note que, pelo axioma da substituição, podemos tomar todos os valores possíveis de a se $x \in X$ e $\psi(x, a)$. Mostre então que vale o teorema da recursão sem pedirmos a restrição dos valores para φ.

1.3 Tamanhos, muitos tamanhos

Para comparar tamanhos de conjuntos, usaremos funções bijetoras:

Depois que tivermos definido cardinais, essa notação fará mais sentido.

Definição 1.3.1. Dizemos que X e Y tem a mesma **cardinalidade** se existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora. Notação: $|X| = |Y|$.

Muitas vezes, verificar se existe alguma bijeção é um processo difícil. Bem mais fácil é a verificação da existência de duas funções injetoras. O próximo teorema ajuda nesse sentido:

Teorema 1.3.2. *Sejam A, B conjuntos e sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções injetoras. Então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Seja $x \in A \cup B$. Defina

- $s_0^x = x$

- $s^x_{n+1} = f(s^x_n)$ se $s^x_n \in A$ ou $s^x_{n+1} = g(s^x_n)$ se $s^x_n \in B$.
- $s^x_{-(n+1)} = f^{-1}(s^x_{-n})$ se $s^x_{-n} \in B$ e $s^x_{-(n+1)} = g^{-1}(s^x_{-n})$ se $s^x_{-n} \in A$ e estes elementos estiverem definidos.

Note que s^x_z pode não estar definido para todo $z \in \mathbb{Z}$. Considere

$$S^x = \{s^x_z \in A \cup B : z \in \mathbb{Z} \text{ e } s^x_z \text{ está definido}\}$$

Note que $(S^x)_{x \in A \cup B}$ forma uma partição sobre $A \cup B$ (cuidado, pode acontecer que $S^x = S^y$ mesmo com $x \neq y$). De fato, sejam $s^y_z = s^x_k$. Note que, então $s^y_{z+m} = s^x_{k+m}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Assim, se mostrarmos que $|S^x \cap A| = |S^x \cap B|$, terminamos. Temos alguns casos:

- Se s^x_z está definido para todo z, f induz uma bijeção, pois é sobrejetora.
- Se $s^x_z \in A$ é o menor z definido, então f induz uma bijeção (já que é sobrejetora).
- Se $s^x_z \in B$ é o menor z definido, então g induz uma bijeção (já que é sobrejetora).

□

Proposição 1.3.3. *Seja X um conjunto. Então não existe $f : X \longrightarrow \wp(X)$ função sobrejetora.*

Demonstração. Suponha que exista $f : X \longrightarrow \wp(X)$ sobrejetora. Defina

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$$

Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $f(x) = A$. Note que isso é uma contradição, já que:

- Se $x \in A$, então, pela definição de A, temos que $x \notin f(x) = A$.
- Se $x \notin A$, então, pela definição de A, temos que $x \in f(x) = A$.

□

Uma aplicação com circunferências

Essa aplicação foi tirada de [2].

Nesta seção, vamos apresentar uma aplicação do que temos até aqui. Ela fica um pouco mais fácil depois que temos cardinais definidos mas, essencialmente, o que precisamos de cardinais é o seguinte resultado:

Proposição 1.3.4. *Dado X um conjunto, existe uma boa ordem $\leq$ sobre X tal que, para todo $x \in X$, não existe uma sobrejeção entre $\{y \in X : y < x\}$ e X.*

Demonstração. Seja $\preceq$ uma boa ordem qualquer sobre X. Se ela já tem tal propriedade, terminamos. Se não, existe $x \in X$ tal que existe uma bijeção entre $\{y \in X : y \prec x\}$ e X. Seja x o menor com tal propriedade. Note que, então, $\{y \in X : y \prec x\}$ induz uma boa ordem sobre X (veja Alongamento 1.3.8). $\square$

Também vamos usar nesta seção os seguintes fatos, que serão facilmente provados com o material que veremos depois:

- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$.
- $|\mathbb{R}_{>0}| = |\mathbb{R}|$.

Para efeitos de não cair em trivialidades, não vamos considerar conjuntos unitários como uma circunferência.

Proposição 1.3.5. *Não existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Suponha que exista tal família. Seja $C_0 \in \mathcal{C}$. Sejam x_0 e r_0 o centro e o raio respectivamente de C_0. Seja C_1 tal que $x_0 \in C_1$. Seja r_1 o raio de C_1. Note que, como $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, $r_1 < \frac{r_0}{2}$. Continuando este processo, temos que a sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ dos centros das circunferências $(C_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto convergente para algum $x \in \mathbb{R}$. Note que se C é uma circunferência tal que $x \in C$, temos que $C \cap C_n \neq \emptyset$ para algum n, contradição. $\square$

A situação muda bem quando passamos para o $\mathbb{R}^3$. Comecemos com um lema:

Lema 1.3.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma família de circunferências tal que não existe $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobrejetora. Se existe $p \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \bigcup \mathcal{C}$, então existe uma circunferência C tal que $p \in C$ e $C \cap C' = \emptyset$ para todo $C' \in \mathcal{C}$.*

Demonstração. Seja $P = \{\pi \subset \mathbb{R}^3 : \pi \text{ é um plano tal que } x \in \pi\}$. Note que não existe uma função sobrejetora de $\mathcal{C}$ em P (basicamente, porque

$|P| = |\mathbb{R}^3|$). Assim, como cada circunferência está contida num único plano, existe $\pi \in P$ tal que, para qualquer $C \in \mathcal{C}$, não é verdade que $C \subset \pi$. Seja $S = \{p \in \pi : \text{existe } C \in \mathcal{C} \text{ tal que } p \in C\}$. Como cada $C \in \mathcal{C}$ intercepta π em, no máximo, dois pontos, temos que $|S| \leq |\mathcal{C}|$.. Seja $p \in \pi \smallsetminus S$ (existe por $|\pi| = |\mathbb{R}|$) e seja $r \subset \pi$ uma reta contendo p. A quantidade de circunferências contidas em π e que tangenciam r no ponto p é igual a quantidade de pontos de $\mathbb{R}$. Como cada ponto de S determina, no máximo, uma destas circunferências, podemos tomar uma circunferência C tangenciando r no ponto p que não contém qualquer ponto de S e, portanto, não tem pontos em comum com qualquer uma das circunferências anteriores. $\square$

Aqui usamos o seguinte resultado: se um conjunto é infinito, então $|X| = |\mathcal{F}|$ onde $\mathcal{F}$ é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de X. Vamos provar esse resultado mais adiante.

Proposição 1.3.7. *Existe uma família $\mathcal{C}$ de circunferências duas a duas disjuntas tal que $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Considere $\leq$ uma boa ordem sobre $\mathbb{R}^3$ com a propriedade apresentada em 1.3.4. Seja x o menor ponto de $\mathbb{R}^3$ segundo essa ordem. Seja C_x uma circunferência qualquer que contenha o ponto x. Agora seja $z \in \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer e suponha definida C_y circunferência para todo $y < z$ de maneira que:

(i) se $y < z$, então $y \in C_y$.

(ii) se $y, y' < z$ e $C_y \neq C_{y'}$, então $C_y \cap C_{y'} = \emptyset$.

Vamos mostrar que existe uma circunferência C_z de maneira que:

(i) $z \in C_z$.

(ii) se $y < z$ e $C_y \neq C_z$, então $C_y \cap C_z = \emptyset$.

Assim, se conseguimos garantir tais condições, podemos continuar esse processo para todo $z \in \mathbb{R}^3$. Vamos verificar isso. Temos dois casos.

- Existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Neste caso, basta fazer $C_z = C_y$. Note que temos as condições satisfeitas facilmente.

- Não existe $y < z$ tal que $z \in C_y$. Assim, note que $\{C_y : y < z\}$ e z satisfazem as condições do Lema 1.3.6. Logo, existe C_z circunferência satisfazendo as condições desejadas.

Considere $\mathcal{C} = \{C_x : x \in \mathbb{R}^3\}$. Note que essa é a cobertura que procurávamos. $\square$

Alongamentos

Alongamento 1.3.8. Seja $\leq$ uma boa ordem sobre X e seja $f : X \longrightarrow Y$ bijeção. Mostre que $\preceq$ dada por $a \preceq b$ se $f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$ para todo $a, b \in Y$ é uma boa ordem sobre Y.

Alongamento 1.3.9. Seja $f : X \longrightarrow Y$ função sobrejetora. Mostre que existe $g : Y \longrightarrow X$ injetora.

Alongamento 1.3.10. Enuncie e prove o análogo ao Teorema 1.3.2 onde as funções apresentadas são sobrejetoras em vez de injetoras.

Exercícios

Exercício 1.3.11. Sejam A e B conjuntos. Denotamos por B^A o conjunto de todas as funções da forma $f : A \longrightarrow B$. Mostre que, dado X conjunto qualquer, $|\wp(X)| = |2^X|$ (considere $2 = \{0, 1\}$).

Capítulo 2

Ordinais, cardinais e outros

2.1 Ordinais

Já vimos que boa ordem é algo bastante importante neste texto. Agora, vamos apresentar certos conjuntos que, de alguma forma, são representantes canônicos de todas as boas ordens possíveis:

Definição 2.1.1. Dizemos que α é um **ordinal** se ele é transitivo e bem ordenado por $\in$.

Cuidado aqui, dizemos que $\in$ é uma boa ordem no sentido de ordem estrita. Para ficarmos com a definição formal, precisamos trabalhar com "$\in$ ou igual".

Note que, pelo que provamos anteriormente, cada $n \in \omega$ é um ordinal. Mais que isso, o próprio conjunto ω também é um ordinal. E, não é muito difícil de ver, $\omega \cup \{\omega\}$ também é um ordinal.

Note que, como cada ordinal é transitivo, então todo elemento seu também é bem ordenado por $\in$. Assim, podemos provar:

Proposição 2.1.2. *Seja α um ordinal. Se $x \in \alpha$, então x é um ordinal.*

Demonstração. Só precisamos mostrar que x é transitivo. Sejam a, b tais que $a \in b$ e $b \in x$. Como α é transitivo, temos que $b \in \alpha$. E, pelo mesmo motivo, $a \in \alpha$. Como $\in$ é uma ordem sobre α, temos que esta é uma relação transitiva e, portanto, $a \in x$. $\square$

Proposição 2.1.3. *Seja X um conjunto não vazio de ordinais. Então $\bigcap X$ é um ordinal.*

Demonstração. Basta notar que intersecção de conjuntos transitivos é transitivo e que, dado $\alpha \in X$, temos que $\bigcap X \subset \alpha$ e, portanto, como $\in$ bem ordena α, $\in$ bem ordena $\bigcap X$. $\square$

Proposição 2.1.4. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \in \alpha$. Suponha que $\gamma \in \alpha$ seja tal que γ é o menor tal que $\beta \in \gamma$. Então $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$.*

Demonstração. Como γ é um ordinal, temos que $\beta \subset \gamma$ e, portanto, $\beta \cup \{\beta\} \subset \gamma$. Por outro lado, dado $\xi \in \gamma$, temos pela minimalidade de γ que $\beta \notin \xi$. Ou seja, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos $\xi \in \beta$ ou $\xi = \beta$. Desta forma, temos que $\gamma \subset \beta \cup \{\beta\}$. $\square$

Note que pela transitividade dos ordinais, temos que todos os elementos aqui pertencem a α.

Proposição 2.1.5. *Seja α um ordinal. Então $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ para algum β ou para todo $\beta \in \alpha$, temos $\beta \cup \{\beta\} \in \alpha$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \alpha$ tal que $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. Note que $\beta \cup \{\beta\} \subset \alpha$. Suponha que exista $\gamma \in \alpha \setminus (\beta \cup \{\beta\})$. Podemos supor que γ seja o menor com tal propriedade. Note que $\beta \in \gamma$ (de fato, como $\gamma, \beta \in \alpha$, se $\beta \notin \gamma$, como $\in$ é uma ordem total sobre α, teríamos que $\beta = \gamma$ ou $\gamma \in \beta$. Mas ambos esses casos contrariam o fato que $\gamma \in \alpha \setminus (\beta \cup \{\beta\})$). Então, pelo resultado anterior, temos que $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ contrariando o fato que $\gamma \in \alpha$ e $\beta \cup \{\beta\} \notin \alpha$. $\square$

Os resultados anteriores nos motivam a denotar $\alpha \cup \{\alpha\}$ como $s(\alpha)$ (se α é um ordinal). Ainda mais, costumamos denotar por $\alpha + 1$ tal conjunto. Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.6. Seja α um ordinal. Se $\alpha = \beta + 1$ para algum β ordinal, dizemos que α é um **ordinal sucessor**. Caso contrário, dizemos que α é um **ordinal limite**.

Note que todo $n \in \omega$ não vazio é um ordinal sucessor. Note também que ω é um ordinal limite (veja o Alongamento 2.1.19).

A ideia aqui é que qualquer ordinal contido num outro, é um segmento inicial dele.

Lema 2.1.7. *Sejam α e β ordinais tais que existe $\gamma \in \alpha \setminus \beta$. Então $\beta \subset \gamma$.*

Demonstração. Seja $\xi \in \beta$. Vamos provar que $\xi \in \gamma$. Suponha que não. Note que $\xi, \gamma \in \alpha$. Logo, como $\in$ é uma ordem total sobre α, temos dois casos:

- $\xi = \gamma$. Mas isso é um contradição pois neste caso temos $\gamma \in \beta$, contrariando a definição de γ.

- $\gamma \in \xi$. Mas isso é uma contradição, pois isso também implica que $\gamma \in \beta$.

$\square$

Lema 2.1.8. *Sejam α e β ordinais tais que $\beta \subset \alpha$. Então $\beta = \alpha$ ou $\beta \in \alpha$.*

Demonstração. Suponha $\beta \neq \alpha$. Seja $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$. Podemos supor γ o menor com tal propriedade. Vamos mostrar que $\gamma = \beta$ (note que isso implica que $\beta \in \alpha$ como queremos). Suponha que não. Pelo Lema anterior, temos que $\beta \subset \gamma$. Então existe $\gamma' \in \gamma \smallsetminus \beta$. Logo, temos que $\gamma' \in \alpha \smallsetminus \beta$, contrariando o fato que γ era o menor com tal propriedade. □

Teorema 2.1.9 (**Indução para ordinais**)**.** *Seja φ uma fórmula tal que, se para todo α ordinal, temos que $\varphi(\beta)$ para $\beta \in \alpha$, então $\varphi(\alpha)$. Então, para todo α ordinal, temos que $\varphi(\alpha)$.*

Demonstração. Seja α um ordinal qualquer. Defina $\beta = \{\xi \in \alpha : \varphi(\xi)\}$. Se $\beta = \alpha$, então por hipótese temos que vale $\varphi(\alpha)$. Caso contrário, seja $\gamma = \min \alpha \smallsetminus \beta$. Note que, como $\gamma \subset \alpha$, temos que, para todo $\xi \in \gamma$, $\varphi(\xi)$. Logo, por hipótese, $\varphi(\gamma)$, contrariando o fato que $\gamma \notin \beta$. □

Estamos usando aqui o mínimo com relação ao $\in$.

De forma análoga ao que fizemos com ω, podemos provar o seguinte:

Teorema 2.1.10 (**Boa ordem para ordinais**)**.** *Seja φ uma fórmula sobre ordinais tal que pelo menos um ordinal a satisfaça. Então existe um ordinal α tal que $\varphi(\alpha)$ e, se β é um ordinal tal que $\varphi(\beta)$, então $\alpha \subset \beta$.*

A ideia é que se certa propriedade vale para algum ordinal, então existe o menor ordinal que a satisfaz.

Com isso, podemos provar que "$\in \vee =$" funciona como uma boa ordem sobre os ordinais. Desta forma, muitas vezes vamos denotar por $<$ quando queremos dizer $\in$ com relação a ordinais. Uma observação importante a ser feita é que não podemos dizer que $\in$ é de fato uma boa ordem sobre os ordinais basicamente por que os ordinais não formam um conjunto:

Proposição 2.1.11. *A coleção de todos os ordinais não forma um conjunto.*

Demonstração. Suponha que A seja o conjunto de todos os ordinais. Note que A é também um ordinal. Logo, $A \in A$, o que é uma contradição. □

Formalmente, dada um fórmula φ sobre conjuntos, chamamos a coleção de todos os conjuntos que a satisfazem de uma **classe**. Claramente, todo conjunto é uma classe. Assim, para indicarmos que uma classe não é um conjunto, diremos que ela é uma **classe própria**.

Vamos terminar esta seção mostrando que os ordinais representam (de forma única) cada boa ordem:

Definição 2.1.12. Sejam X e Y conjuntos ordenados. Dizemos que $f : X \longrightarrow Y$ é um **isomorfismo de ordem** se f é bijetora e $f(a) \leq f(b)$ se, e somente se, $a \leq b$.

Proposição 2.1.13. *Sejam α e β ordinais. Se existe $f : \alpha \longrightarrow \beta$ isomorfismo de ordem, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Vamos fazer por indução sobre α. Se $\alpha = \emptyset$, então claramente $\beta = \emptyset$. Agora suponha que o resultado vale para todo $\xi < \alpha$. Suponha que exista $f : \alpha \longrightarrow \beta$ isomorfismo de ordem. Seja $\xi < \alpha$. Note que $f \restriction \xi : \xi \longrightarrow A$ é um isomorfismo de ordem, onde $A \subset \beta$. Note que A é um segmento inicial de β e, portanto, $A = \gamma$ para algum $\gamma \in \beta$. Pela hipótese de indução, temos que $\xi = \gamma$. Ou seja, temos que $\alpha \subset \beta$. Trabalhando com a inversa, obtemos que $\beta \subset \alpha$. □

Teorema 2.1.14. *Seja X um conjunto bem ordenado. Então existe um, e apenas um, ordinal α tal que existe $f : X \longrightarrow \alpha$ isomorfismo de ordem.*

Demonstração. A unicidade segue do resultado anterior. Para a existência, basta definir f recursivamente como $f(x) = \min\{\alpha : \forall y < x \; f(y) < \alpha\}$. □

Ordinais compactos

Fixado um ordinal α, há uma topologia bastante natural sobre ele, a topologia da ordem:

Definição 2.1.15. Dado um ordinal α, chamamos de **topologia da ordem** a topologia gerada pelos conjuntos da forma $]\xi, \eta[$ e $[0, \xi[$ para todo $\xi, \eta \in \alpha$.

Os intervalos de ordinais são definidos de forma análoga aos intervalos de reais.

A menos de menção contrária, sempre que tomarmos um ordinal como um espaço topológico, estaremos adotando a topologia da ordem.

Proposição 2.1.16. *Seja α um ordinal. Se $A \subset \alpha$ é* **limitado***, isto é, existe $\beta \in \alpha$ tal que $a \leq \beta$ para todo $a \in A$, admite supremo. Lembrando, o* **supremo** *é o menor dos majorantes de um conjunto.*

Demonstração. Como A é limitado, ele possui pelo menos um majorante. Logo, o conjunto dos majorantes de A admite mínimo. □

Proposição 2.1.17. *Se α é um ordinal limite, então α não é compacto.*

Demonstração. Basta notar que $\{[0, \beta + 1[: \beta \in \alpha\}$ é uma cobertura aberta sem subcobertura finita. □

Proposição 2.1.18. *Se α é um ordinal sucessor, então α é compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Seja β tal que $\alpha = \beta+1$. Se β for sucessor, terminamos (afinal, α será um compacto adicionado de um ponto). Suponha que β não seja sucessor. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura por abertos para α. Seja $C \in \mathcal{C}$ tal que $\beta \in C$. Note que existe ξ tal que $]\xi, \beta] \subset C$. E, como β é limite, $\xi + 1 < \beta$. Por hipótese de indução, existe $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ finito tal que $\xi + 1 = [0, \xi] \subset \bigcup \mathcal{C}'$. Note, então, $\mathcal{C}' \cup \{C\}$ é uma subcobertura finita para $[0, \beta] = \alpha$. $\square$

Alongamentos

Alongamento 2.1.19. Mostre que todo $n \in \omega$ não nulo é um ordinal sucessor. Mostre que ω é um ordinal limite.

Alongamento 2.1.20. Mostre que, para todo α ordinal, temos que $[0, \alpha] = [0, \alpha + 1[$.

Alongamento 2.1.21. Mostre que no Teorema 2.1.14 o isomorfismo também é único.

Alongamento 2.1.22. Considere ω com a seguinte ordem: se $a, b \neq 0$, então $a \preceq b$ se, e somente se, $a \leq b$ ($\leq$ é a ordem usual) e $a \leq 0$ para todo $a \in \omega$.

(a) Mostre que $\preceq$ é uma boa ordem.

(b) Mostre que ω com esta ordem é isomorfo a $\omega + 1$.

Exercícios

Exercício 2.1.23. Mostre que, se X é um conjunto, não existe uma função com domínio X e sobrejetora nos ordinais.

Exercício 2.1.24. Mostre que não existe um conjunto ilimitado nos ordinais.

Exercício 2.1.25. Mostre que a coleção dos ordinais sucessores é uma classe própria.

Exercício 2.1.26. Mostre que num ordinal α, os únicos pontos isolados são os sucessores e o 0.

x é dito um **ponto isolado** se $\{x\}$ é aberto.

Exercício 2.1.27. Mostre que todo ordinal é um **espaço de Hausdorff**, isto é, dados dois pontos x, y distintos, existem abertos A, B disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Exercício 2.1.28. Mostre que se $\alpha = \sup A$, então $\alpha \in \overline{A}$.

Exercício 2.1.29. Sejam X bem ordenado e Y totalmente ordenado. Chamamos de **ordem lexicográfica** a seguinte ordem sobre Y^X: $f < g$ se $f(x) < g(x)$ onde $x = \min\{z \in X : f(z) \neq g(z)\}$. Mostre que isso é de fato uma ordem e mostre também que tal ordem é total. Mostre que se, além disso, Y é bem ordenado, então tal ordem é uma boa ordem.

Exercício 2.1.30. Sejam α e β ordinais. Defina $\alpha + \beta$ como o único ordinal que é isomorfo a $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ com a ordem lexicográfica. Verifique se é verdadeira a afirmação "$\omega + 1 = 1 + \omega$".

Exercício 2.1.31. Dizemos que uma função de ordinais em ordinais é uma **função normal** se $f(\alpha) < f(\beta)$ se $\alpha < \beta$ e $(\alpha) = \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$ se α é limite e diferente de $\emptyset$. Seja f uma função normal. Mostre que:

(a) $f(\sup A) = \sup\{f(a) : a \in A\}$ para todo A conjunto de ordinais.

(b) $f(\alpha) \geq \alpha$ para todo α.

(c) dado β ordinal, existe $\alpha \geq \beta$ tal que $f(\alpha) = \alpha$.

2.2 Medindo a complexidade dos conjuntos

Comecemos com um resultado simples:

Proposição 2.2.1. *Seja X um conjunto qualquer. Então existe um conjunto transitivo $tr(X)$ onde $X \subset tr(X)$ e dado qualquer conjunto Y transitivo tal que $X \subset Y$ temos que $tr(X) \subset Y$.*

Chamamos $tr(X)$ de **fecho transitivo** de X.

Demonstração. Defina $T_0 = X$ e $T_{n+1} = \bigcup T_n$ para $n \in \omega$. Defina $tr(X) = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Claramente, $X \subset tr(X)$ e $tr(X)$ é transitivo. Note também que, se $x \in T_n$ para algum $n \in \omega$, $x \in Y$ para qualquer Y transitivo tal que $X \subset Y$. □

Proposição 2.2.2. *Toda classe não vazia de conjuntos admite um elemento $\in$ minimal.*

Demonstração. Seja X pertencente à classe fixada. Considere A os elementos de $tr(X)$ que pertencem a tal classe. Pelo axioma da fundação, existe $a \in A$ tal que $a \cap A = \emptyset$. Note que tal a é minimal. □

Esse resultado nos dá que podemos definir algo recursivamente sobre os próprios elementos. Para ficar mais claro, vejamos isso em ação, justamente no exemplo que nos será importante agora:

Definição 2.2.3. Seja X um conjunto. Definimos $rank(\emptyset) = \emptyset$ e denotamos por $rank(X)$= $\sup\{rank(y) + 1 : y \in X\}$.

Note que isso está bem definido. De fato, suponha que não. Considere todos os conjuntos X de forma que não foi possível definir o $rank$. Seja X o $\in$ minimal sem $rank$. Mas note que, então, todo elemento de X tem rank e, portanto, X também tem.

Formalmente, deveríamos trabalhar como na demonstração do teorema de recursão.

Além do $rank$ dar uma medida sobre a complexidade do conjunto, também nos dá uma ideia sobre sobre sua construção. Considere a seguinte construção recursiva:

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} V_\xi$

Vamos provar que todo conjunto pertence a algum dos V_α's. Para isso, vamos provar o seguinte resultado:

Lema 2.2.4. *Sejam α, β ordinais. Temos:*

(a) V_α é transitivo.

(b) $V_\alpha \subset V_\beta$ se $\alpha \leq \beta$.

(c) se $X \subset V_\alpha$ e $\alpha < \beta$, então $X \in V_\beta$.

(d) se $X \in V_\alpha$, então $X \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$.

Demonstração. (a) Por indução sobre α. Se $\alpha = \emptyset$, é imediato. Se α é limite, o resultado é imediato uma vez que V_α é união de conjuntos transitivos. Finalmente, se $\alpha = \beta+1$, temos que, dado $X \in V_\alpha$, $X \subset V_\beta$. Logo, se $Y \in X$, temos que $Y \in V_\beta$. Mas, como V_β é transitivo, $Y \subset V_\beta$ e, portanto, $Y \in V_{\beta+1}$ como queríamos.

(b) Por indução sobre β. Se $\beta = \gamma+1$. Assim, se $\alpha \leq \gamma$, temos, por hipótese, que $V_\alpha \subset V_\gamma$. Logo, $V_\alpha \in V_{\gamma+1}$. Como $V_{\gamma+1}$ é transitivo, temos o que queríamos. Agora suponha que β é limite. Neste caso, é imediato que $V_\alpha \subset V_\beta$ pela definição de V_β.

(c) Basta notar que $X \in V_{\alpha+1} \subset V_\beta$.

(d) Por indução sobre V_α. Se $\alpha = \beta + 1$, o resultado é imediato ($\xi = \beta$). Se α é limite, então $X \in V_\beta$ para algum $\beta < \alpha$ e portanto o resultado segue por indução e pelo fato que $V_\beta \subset V_\alpha$.

□

Ou seja, todo conjunto é formado apenas por $\emptyset$ e pares de { e }. Se denotarmos $\emptyset$ por {}, então todo conjunto nada mais é que uma coleção de { e }. Parece um pouco triste.

Proposição 2.2.5. *Seja X um conjunto. Então $rank(X) = \alpha$ se, e somente se, $X \subset V_\alpha$ e $X \not\subset V_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Suponha o resultado para todo $\xi < \alpha$. Seja X conjunto tal que $rank(X) = \alpha$. Assim, todo $Y \in X$ é tal que $rank(Y) < \alpha$ e, portanto, $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Logo, $Y \in V_\alpha$ pelo Lema anterior. Ou seja, $X \subset V_\alpha$. Note também que $X \not\subset V_\xi$ para todo $\xi < \alpha$ por hipótese de indução.

Por outro lado, seja $X \subset V_\alpha \smallsetminus \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi$. Dado $Y \in X$, temos, pelo Lema anterior, que $Y \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$. Portanto, $rank(Y) \leq \xi$. Assim, já temos que $rank(X) \leq \alpha$. Por outro lado, dado qualquer $\xi < \alpha$, existe $Y \in X$ tal que $rank(Y) \geq \xi$. Caso contrário, todo $Y \in X$ seria tal que $Y \in V_\xi$ e, portanto, $X \subset V_\xi$, uma contradição. □

Acabando com as escolhas

Esta seção foi bastante baseada no livro [3].

Nesta seção, vamos fechar as implicações para as diversas formulações equivalentes ao princípio da boa ordem e o axioma da escolha.

Proposição 2.2.6. *Se vale o axioma das múltiplas escolhas, vale que todo conjunto ordenado admite um conjunto maximal de elementos dois a dois incomparáveis.*

Demonstração. Seja X um conjunto ordenado. Pelo axioma das múltiplas escolhas, existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow \wp(X)$ tal que, para todo $A \subset X$ não vazio, $f(A) \subset A$ é finito e não vazio. Defina $g : \wp(X) \longrightarrow \wp(X)$ da seguinte forma, dado $A \subset X$:

$$g(A) = \{a \in f(A) : a \text{ é minimal em } f(a)\}$$

Note que, trivialmente, cada $g(A)$ é um suconjunto finito de A de elementos dois a dois incomparáveis.

Considere a seguinte construção recursiva sobre os ordinais:

- $A_0 = g(X)$

- $A_\alpha = g(\{x \in X : x \text{ é incomparável com cada } b \in \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta\})$.

Note que os elementos de X que pertencem a algum A_α formam um conjunto A. Vamos provar que tal A é um conjunto maximal de elementos incomparáveis. Suponha que $a, b \in A$ sejam comparáveis. Seja α tal que $a \in A_\alpha$ e $b \in A_\beta$. Se $\alpha = \beta$, temos uma contradição pois tanto a como b são minimais em A_α. Sem perda de generalidade, suponha $\alpha < \beta$. Então $b \notin A_\beta$ já que b é comparável com a, contradição.

Finalmente, vamos provar que A é maximal. Note que, em algum ordinal α, $A_\alpha = \emptyset$ (caso contrário, teríamos que os ordinais formariam um conjunto). Mas note que isso só é possivel se não "sobraram" elementos que possam estender A. □

Lema 2.2.7. *Seja X um conjunto não vazio. Se existe $f : \wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\} \longrightarrow \bigcup \mathcal{V}$ onde $f(V) \in V$ para todo $V \in \wp(X)$ não vazio, então existe uma boa ordem sobre $\bigcup \mathcal{V}$. Uma função assim é chamada de uma* **função escolha** *para $\wp(X) \smallsetminus \{\emptyset\}$.*

Demonstração. Defina a seguinte recursão sobre os ordinais (antes de começar, fixe um $Y \notin X$ qualquer). Tomamos $x_0 = f(X)$ e

$$x_\alpha = \begin{cases} f(X \smallsetminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}) & \text{se } \{x_\beta : \beta < \alpha\} \not\supset X \\ Y & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que f precisa valer Y a partir de algum ordinal α, caso contrário teríaomos que os ordinais formariam um conjunto pelo axioma da substituição. Note que assim $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ induz uma boa ordem sobre X. □

Em particular, esse lema nos dá o seguinte:

Corolário 2.2.8. *Se vale o axioma da escolha, vale o princípio da boa ordem.*

Demonstração. Seja X um conjunto. Seja f uma função escolha sobre $\wp(X)$. Pelo Lema, temos que existe uma boa ordem sobre X. □

Proposição 2.2.9. *Se todo conjunto ordenado admite uma família maximal de elementos dois a dois não comparáveis, então todo conjunto ordenado admite uma boa ordem.*

Demonstração. Seja X totalmente ordenado por $<$. Se mostrarmos que existe uma função escolha para $\wp(X) \smallsetminus \emptyset$, o resultado segue pelo Lema anterior. Seja $\mathcal{Y}$ o conjunto de todos os pares da forma (y, Y), onde $y \in Y \subset X$. Defina sobre tal conjunto a ordem

$$(y_1, Y_1) \preceq (y_2, Y_2) \text{ se } Y_1 = Y_2 \text{ e } y_1 < y_2$$

Seja $A \subset \mathcal{Y}$ maximal tal que seus elementos são dois a dois incomparáveis. Vamos mostrar que $\bigcup A$ é a função escolha desejada.

Note que, dado $Y \subset X$ não vazio, existe algum par da forma $(y, Y) \in \mathcal{Y}$ pois, caso contrário, qualquer um desta forma seria incomparável com todos os elementos de Y. Mais que isso, como a ordem sobre X é total, existe um único elemento com tal formato. □

Proposição 2.2.10. *Se todo conjunto totalmente ordenado pode ser bem ordenado, então dado um conjunto bem ordenado A, temos que $\wp(A)$ é bem ordenável.*

Demonstração. Identifique o $\wp(A)$ com 2^A (veja o Exercício 1.3.11). Coloque em 2^A ordem lexicográfica (veja Exercício 2.1.29). Assim, $\wp(A)$ fica totalmente ordenado e, portanto, bem ordenável. □

Proposição 2.2.11. *Se vale que todo conjunto bem ordenado A é tal que $\wp(A)$ é bem ordenado, então vale o princípio da boa ordem.*

Aqui não podemos simplesmente aplicar indução, porque precisamos dizer qual boa ordem pegamos para cada β, caso contrário não temos como garantir a existência da família sem o axioma da escolha.

Demonstração. Se mostrarmos que V_α é bem ordenado para todo α ordinal limite, temos o resultado. Seja α ordinal limite. Se mostrarmos que existe uma família $(W_\beta)_{\beta<\alpha}$ onde cada W_β é uma boa ordem sobre V_β teremos o resultado (é fácil construir uma boa ordem a partir disso). Seja κ o menor ordinal tal que não existe uma função injetora de κ em V_α. Por hipótese, $\wp(\kappa)$ admite uma boa ordem $\leq$. Vamos agora definir cada W_β usando esta boa ordem recursivamente:

- $W_0 = \emptyset$
- se β é limite, definimos W_β de maneira padrão usando cada W_ξ com $\xi < \beta$.
- se $\beta = \gamma + 1$, então $V_\beta = \wp(V_\gamma)$. Por hipótese, V_γ é bem ordenado por W_γ e, portanto, tem um isomorfismo de ordem com algum $\gamma < \kappa$. Daí usando esse isomorfismo mais a boa ordem $\leq$ de $\wp(\kappa)$, obtemos uma boa ordem sobre V_β.

□

Com a sequência apresentada acima, mais os resultados anteriores, temos a equivalência entre princípio da boa ordem, lema de Zorn, axioma da escolha e todo espaço vetorial tem base.

Exercícios

Exercício 2.2.12. Seja α um ordinal. Determine $rank(\alpha)$.

2.3 Cardinais

Do mesmo jeito que ordinais representam todas as boas ordens, cardinais representam todos os tamanhos de conjuntos:

Definição 2.3.1. Seja α um ordinal. Dizemos que α é um **cardinal** se não existe $\beta < \alpha$ tal que $|\alpha| = |\beta|$.

Note que dado um conjunto qualquer, ele tem bijeção com um cardinal (via princípio da boa ordem) e com apenas um. Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.3.2. Seja X um conjunto. Denotamos por $|X|$ o único cardinal κ tal que existe uma bijeção entre X e κ.

Note que isso estende o uso anterior que fazíamos de $|\cdot|$, afinal, existe uma bijeção entre X e Y se, e somente se, $|X| = |Y|$ como acima.

Note também que, dado um cardinal qualquer, existe um ordinal maior que ele que não tem bijeção com ele (veja o Alongamento 2.3.19). Assim, faz sentido a seguinte definição:

Definição 2.3.3. Seja κ um cardinal. Denotamos por κ^+ o menor cardinal que é maior que κ.

Não confundir κ^+ com $\kappa + 1$ (soma ordinal).

Com isso, podemos fazer a seguinte definição:

Definição 2.3.4. Denotamos por $\aleph_0 = \omega$. Se $\aleph_\beta$ está definido para todo $\beta < \alpha$ (α um ordinal), denotamos por $\aleph_\alpha = \kappa$ onde κ é o menor cardinal tal que $\aleph_\beta < \kappa$ para todo $\beta < \alpha$.

Desta forma, é fácil ver que $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$. Além disso, muitas vezes usaremos a notação ω_α no lugar de $\aleph_\alpha$ quando quisermos destacar que queremos trabalhar com a ordem de $\aleph_\alpha$.

Dizemos que um conjunto X é **finito** se existe $n \in \aleph_0$ tal que $|X| = n$. Dizemos que X é **infinito** caso contrário.

Uma ordem bacana sobre pares de ordinais

Vejamos agora como definir uma ordem sobre pares de ordinais. Isso vai nos facilitar na hora de calcular o tamanho de produtos. Mas antes, vamos definir uma notação que vai facilitar bastante:

Definição 2.3.5. Seja X um conjunto ordenado por $\leq$. Dado $x \in X$, denotamos por $\downarrow x$ o conjunto $\{y \in X : y < x\}$.

Definição 2.3.6. Sejam (α, β) e (γ, δ) pares de ordinais. Vamos denotar por $(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$ se

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ e $\alpha < \gamma$ ou
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$, $\alpha = \gamma$ e $\beta < \delta$.

Formalmente não é uma ordem, uma vez que pares de ordinais não é um conjunto. Mas deve dar para entender.

Não é difícil notar que $\leq$ é uma ordem e que qualquer conjunto não vazio de pares de ordinais admite mínimo com tal ordem (veja o Alongamento 2.3.20). Note também que, para qualquer ordinal α, temos (veja o Alongamento 2.3.21):

$$\alpha \times \alpha = \downarrow (0, \alpha)$$

Considere, para cada α, β ordinais, $o(\alpha, \beta)$ o único ordinal tal que $o(\alpha, \beta)$ é isomorfo a $\downarrow (\alpha, \beta)$.

Lema 2.3.7. $o(0, \omega) = \omega$.

Demonstração. Note que $\downarrow (0, \omega) = \omega \times \omega$. Como $\downarrow (0, \omega)$ é infinito, basta mostrarmos que, para cada elemento de $\downarrow (0, \omega)$ só existem finitos elementos menores que ele. De fato, dado $(a, b) \in \omega \times \omega$, temos que $(x, y) \leq (a, b)$ é tal que $x, y \leq \max\{a, b\}$. $\square$

Note que como $o(0, \alpha) < o(0, \beta)$ se $\alpha < \beta$, temos que $\alpha \leq o(0, \alpha)$ para todo α. Vejamos a outra desigualdade:

Proposição 2.3.8. *Para todo cardinal infinito α, $o(0, \alpha) = \alpha$. Em particular, existe uma bijeção entre $\alpha \times \alpha$ e α.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução sobre α. Note que, para $\alpha = \omega$, temos o resultado. Suponha então que o resultado é válido para todo $\beta < \alpha$ e vamos mostrar para α. Suponha que não. Então $\alpha < o(0, \alpha)$. Logo, existe $(\gamma, \delta) < (0, \alpha)$ tal que $\alpha = o(\gamma, \delta)$. Note que, então, $\gamma, \delta < \alpha$. Seja β tal que

$\gamma, \delta < \beta < \alpha$. Note que $(\gamma, \delta) < (0, \beta)$. Assim, $\alpha < o(0, \beta)$. Mas $|o(0, \beta)| = |\beta \times \beta| = ||\beta| \times |\beta||$. Mas, por hipótese de indução, $||\beta| \times |\beta|| = o(0, |\beta|) = |\beta|$. Contradição já que $|\beta| < \alpha$. $\square$

Corolário 2.3.9. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa = |\kappa \times \kappa|$.*

Corolário 2.3.10. *Seja X um conjunto infinito. Então $|X| = |X \times X|$.*

Corolário 2.3.11. *Sejam X, Y conjuntos infinitos. Então $|X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\}$.*

Demonstração. Suponha $|X| \leq |Y|$. Então $|X \times Y| \leq |Y \times Y| = |Y|$. Como $|Y| \leq |X \times Y|$, temos o resultado. $\square$

Corolário 2.3.12. *Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos tal que $|\mathcal{F}| = \kappa$ (κ é infinito) e cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| \leq \kappa$. Então $|\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$.*

Demonstração. Note que podemos supor que cada $|F| = \kappa$. Fixe $\{F_\xi : \xi < \kappa\} = \mathcal{F}$ e, para cada $\xi < \kappa$, seja $f_\xi : \kappa \longrightarrow F_\xi$ bijetora. Note que $\varphi : \kappa \times \kappa \longrightarrow \bigcup \mathcal{F}$ dada por

$$\varphi(\alpha, \beta) = f_\alpha(\beta)$$

é sobrejetora. Logo, $\kappa = |\kappa \times \kappa| \leq |\bigcup \mathcal{F}|$. Como a outra desigualdade é imediata, temos o resultado. $\square$

Um conceito que vai ser importante em vários contextos são subconjuntos de algum tamanho fixado:

Definição 2.3.13. Sejam X um conjunto e κ um cardinal. Denotamos por $[X]^\kappa$ o conjunto $\{A \subset X : |A| = \kappa\}$. Também usamos a notação $[X]^{<\kappa}$ para $\{Y \subset X : |X| < \kappa\}$.

Em particular, $[X]^{<\aleph_0}$ são todos os subconjuntos finitos de X:

Proposição 2.3.14. *Se X é infinito, então $|[X]^{<\aleph_0}| = |X|$.*

Demonstração. Note que $|[X]^n| = |X|$ para todo $n \in \aleph_0$, $n \neq 0$. Como $[X]^{<\aleph_0} = \bigcup_{n \in \omega} [X]^n$, temos o resultado. $\square$

Terminamos essa seção com uma simples aplicação:

Teorema 2.3.15. *Seja V um espaço vetorial. Se A e B são bases para V, então $|A| = |B|$.*

Demonstração. Vamos apenas fazer o caso em que A e B são infinitas. Suponha que não vale o resultado e, portanto, podemos supor sem perda de generalidade que $|A| < |B|$. Para cada $a \in A$, existe $B_a \subset B$ finito tal que $a \in [B_a]$. Seja $B' = \bigcup_{a \in A} B_a$. Note que $|B'| \leq |A|$. Por outro lado, note que $B' \subset B$ e $[B'] = V$, já que $[B'] \supset A$, contradição. □

Lembrando, $[X]$ denota o subespaço gerado por X.

Sequências convergem, mas e daí?

Já vimos que ω_1 não é compacto. Mas vamos ver nesta seção que ele tem certas propriedades "parecidas" com compactos:

Lema 2.3.16. *Seja $A \subset \omega_1$ enumerável. Então A é limitado.*

Demonstração. Suponha que não. Então $\omega_1 = \bigcup_{a \in A} \downarrow a$. Mas note que cada $\downarrow a$ é enumerável. Logo, ω_1 é enumerável, contradição. □

Lema 2.3.17. *Toda sequência $(x_n)_{n \in w}$ estritamente crescente de pontos de ω_1 é convergente.*

Demonstração. Como $A = \{x_n : n \in \omega\}$ é enumerável, temos que A admite supremo. Seja $\alpha \in \omega_1$ tal supremo. Note que, dado $]\beta, \alpha]$ aberto contendo α, temos que, existe $x_n > \beta$ (por α ser supremo) e todo x_k com $k > n$ é tal que $x_k \in]\beta, \alpha]$. □

Teorema 2.3.18. *Toda sequência (enumerável) de pontos de ω_1 admite subsequência convergente.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \omega}$ sequência de pontos de ω_1. Note que, pelo Exercício 2.3.25, temos um dos seguintes casos:

- $(x_n)_{n \in \omega}$ admite subsequência constante. Neste caso, o resultado é trivial.
- $(x_n)_{n \in \omega}$ admite subsequência estritamente decrescente. Note que esse caso é impossível, uma vez que ω_1 é bem ordenado.
- $(x_n)_{n \in \omega}$ admite subsequência estritamente crescente. Note que neste caso temos o resultado pelo Lema anterior.

□

Alongamentos

Alongamento 2.3.19. Seja κ. Mostre que $\kappa < |\wp(\kappa)|$.

Alongamento 2.3.20. Mostre que $\leq$ definida sobre os pares de ordinais é de fato uma ordem e que todo conjunto de pares admite mínimo.

Alongamento 2.3.21. Mostre que, dado um ordinal α, $\downarrow (0, \alpha) = \alpha \times \alpha$.

Alongamento 2.3.22. Mostre que todo cardinal infinito é um ordinal limite.

Exercícios

Exercício 2.3.23. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : \omega \longrightarrow X$ injetora.

Exercício 2.3.24. Mostre que X é infinito se, e somente se, existe $f : X \longrightarrow Y$ bijetora tal que $Y \subsetneq X$.

Exercício 2.3.25. Este é um roteiro para mostrar que toda sequência num conjunto totalmente ordenado admite uma subsequência constante, ou admite uma subsequência estritamente crescente ou admite uma subsequência estritamente decrescente. Assim, seja $(x_n)_{n \in \omega}$ uma sequência num conjunto X totalmente ordenado por $\leq$

(a) Note que podemos supor que $x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ (se não pudermos, é que já resolvemos).

(b) Dizemos que x_n é um pico se, para todo $k > n$, temos que $x_k < x_n$. Suponha que existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência decrescente infinita.

(c) Suponha que não existam infinitos picos. Mostre que existe uma subsequência crescente.

(d) Conclua o resultado.

Exercício 2.3.26. Considere $\omega_1 + 1$ como espaço topológico. Mostre que $\omega_1 \in \overline{\omega_1}$ mas não existe uma sequência em ω_1 convergente para ω_1.

2.4 Mais um pouco sobre ordens

Cofinalidade é uma espécie de "atalho" até o final de um conjunto:

Definição 2.4.1. Seja X ordenado por $\leq$. Dizemos que $A \subset X$ é **cofinal** em X se, para todo $x \in X$, existe $a \in A$ tal que $x \leq a$.

Definição 2.4.2. Seja X conjunto ordenado. Denotamos por $cf(X)$ (a **cofinalidade** de X) o menor cardinal κ tal que existe $A \subset X$ tal que A é cofinal em X e $|A| = \kappa$.

Muitas vezes, é mais cômodo trabalhar com uma notação de função:

Definição 2.4.3. Seja X conjunto ordenado. Dizemos que $f : \kappa \longrightarrow X$ é uma **função cofinal** se sua imagem é cofinal em X.

É imediato notar o seguinte:

Proposição 2.4.4. *Dado X um conjunto ordenado. Então a $cf(X) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow X$ cofinal.*

No caso de ordinais, podemos tomar a f crescente:

Proposição 2.4.5. *Seja α um ordinal. Então $cf(\alpha) = \kappa$ se, e somente se, κ é o menor cardinal tal que existe $f : \kappa \longrightarrow X$ função crescente e cofinal.*

Demonstração. Suponha $cf(\alpha) = \kappa$. Seja $g : \kappa \longrightarrow \alpha$ cofinal. Defina $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ da seguinte forma, para $\xi \in \kappa$:

$$f(\xi) = \sup\{g(\eta) : \eta \leq \xi\}$$

Note que f é a função procurada.

Note que $f(\xi) \in \alpha$ já que $|\xi| < cf(\alpha)$.

A outra implicação é imediata. □

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.4.6.
- Se α é da forma $\beta + 1$, então $cf(\alpha) = 1$.
- Pelos resultados da seção anterior, temos que $cf(\aleph_1) = \aleph_1$.
- $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$. Para isso, basta notar que $f : \aleph_0 \longrightarrow \aleph_\omega$ dada por $f(n) = \aleph_n$ é cofinal.

Teorema 2.4.7 (Teorema de König). *Seja κ cardinal e sejam $(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ e $(B_\xi)_{\xi<\kappa}$ famílias de conjuntos tais que $|A_\xi| < |B_\xi|$ para todo $\xi < \kappa$. Então $|\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi| < |\prod_{\xi<\kappa} B_\xi|$.*

Demonstração. Suponha que não. Então existe $f : \bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi \longrightarrow \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ sobrejetora. Para cada $\xi < \kappa$, existe $b_\xi \in B_\xi$ tal que $b_\xi \notin \pi_\xi[f[A_\xi]]$ já que não existe uma função sobrejetora de A_ξ em B_ξ. Note que $(b_\xi)_{\xi<\kappa} \in \prod_{\xi<\kappa} B_\xi$ mas não está na imagem de f. $\square$

π_ξ é a projeção na ξ-ésima coordenada.

Corolário 2.4.8. *Seja κ um cardinal infinito. Então $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$.*

Demonstração. Seja $f : cf(\kappa) \longrightarrow \kappa$ cofinal e crescente. Note que, para cada $\xi < cf(\kappa)$, temos que $|\downarrow f(\xi)| < \kappa$ (por κ se cardinal). Note também que $\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} \downarrow f(\xi) = \kappa$. Finalmente, $\kappa^{cf(\kappa)} = |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa|$. Logo

$$|\kappa| = |\bigcup_{\xi<cf(\kappa)} f(\xi)| < |\prod_{\xi<cf(\kappa)} \kappa| = \kappa^{cf(\kappa)}$$

$\square$

Pré-ordens

Definição 2.4.9. Dizemos que $\leq$ é uma **pré-ordem** sobre um conjunto X se, para todo $a, b, c \in X$ temos:

(a) $a \leq a$

(b) se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$.

Ou seja, o que está faltando para virar ordem é $a \leq b$ e $b \leq a$ implicar $a = b$.

Definição 2.4.10. Denotamos por $\leq^*$ a seguinte pré-ordem sobre ω^ω: dados $f, g \in \omega^\omega$, dizemos que $f \leq^* g$ se

$$\{n \in \omega : f(n) > g(n)\} \text{ é finito.}$$

Vejamos alguns conceitos sobre famílias de funções de ω^ω:

Definição 2.4.11. Seja $\mathcal{F} \subset \omega^\omega$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família ilimitada** se não existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **família dominante** se, para todo $g \in \omega^\omega$, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $g \leq^* f$.

O conceito de ilimitado é meio que o mesmo que para ordens e o conceito de dominante é o de cofinal para ordens.

Note que a própria família $\mathcal{F} = \omega^\omega$ é ilimitada e dominante.

Proposição 2.4.12. *Toda família dominante é ilimitada.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Suponha que ela não seja ilimitada. Ou seja, existe $g \in \omega^\omega$ tal que $f \leq^* g$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Defina $h \in \omega^\omega$ como

$$h(n) = g(n) + 1$$

para todo $n \in \omega$. Note que não existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $h \leq^* f$ e, portanto, $\mathcal{F}$ não é dominante. $\square$

Proposição 2.4.13. *Não existe uma família ilimitada enumerável.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\omega}$ família enumerável de funções de ω^ω. Para cada $n \in \omega$, defina
$$g(n) = \max\{f_0(n), ..., f_n(n)\}$$
Note que $f_n \leq^* g$ para todo $n \in \omega$ e, portanto, $(f_n)_{n\in\omega}$ não é ilimitada. □

Note que $\{k \in \omega : f_n(k) > g(k)\} \subset \{0, ..., n-1\}$.

Olhando por cima do muro

Chamamos de $\mathfrak{c}$ a cardinalidade de $|2^\omega|$. Note que $\mathfrak{c} = |\omega^\omega|$. De fato, é imediato notar que $|2^\omega| \leq |\omega^\omega|$. Por outro lado, temos que ω^ω pode ser identificado com $[\omega]^\omega$ (ver Exercício 2.4.22). Assim,

$$|\omega^\omega| = |[\omega]^\omega| \leq |\wp(\omega)| = |2^\omega|$$

Com isso, é fácil ver que $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ (ver o Exercício 2.4.23).

Note que $\mathfrak{c}$ é não enumerável. Logo, temos que

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$$

Pelos resultados da seção anterior, como existe pelo menos uma família dominante, podemos definir $\mathfrak{d}$ como a menor cardinalidade possível para uma família dominante e $\mathfrak{b}$ como a menor cardinalidade possível para uma família ilimitada. Como toda família dominante é ilimitada, temos

$$\mathfrak{b} \leq \mathfrak{d}$$

Como a própria família ω^ω é dominante, temos que $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$. Finalmente, como não existe uma família ilimitada enumerável, temos que $\aleph_1 \leq \mathfrak{b}$. Resumindo, temos a seguinte situação:

$$\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}$$

O curioso é que, com os axiomas que temos até o momento, isso é meio que tudo que podemos dizer sobre as relações entre esses quatro cardinais.

A **hipótese do contínuo** (uma afirmação que é independente dos axiomas de ZFC), afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Note que, supondo essa afirmarção, as desigualdades acima viram todas igualdades.

Por outro lado, meio que qualquer outra combinação que quisermos é possível também. Veremos um pouco mais disso adiante.

Uma **afirmação independente** de uma lista de axiomas nada mais é que uma afirmação que nem ela, nem sua negação, podem ser provadas a partir da lista de axiomas. É a mesma situação que ocorre, por exemplo, em teoria dos corpos. A partir dos axiomas de corpo não é possível provar que existe um elemento x tal que $x^2 = 2$. Mas também não é possível provar que não existe tal elemento.

Alongamentos

Alongamento 2.4.14. Seja α um ordinal. Mostre que:

(a) $cf(\alpha) \leq \alpha$

(b) se $cf(\alpha)$ é finito, então $cf(\alpha) = 1$.

(c) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

Alongamento 2.4.15. Mostre que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Exercícios

Exercício 2.4.16. Sejam X, A, B conjuntos. Mostre que $|(X^A)^B| = |X^{A\times B}|$. Mostre que, em particular, $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Exercício 2.4.17. Seja α ordinal limite. Mostre que $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.

Exercício 2.4.18. Mostre que existem um cardinal κ e uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos tais que $|\mathcal{F}| < \kappa$, cada $F \in \mathcal{F}$ é tal que $|F| < \kappa$ e ainda assim $|\bigcup \mathcal{F}| = \kappa$.

Exercício 2.4.19. Seja $\mathcal{F}$ uma família dominante. Para cada $f \in \mathcal{F}$, defina $g_f \in \omega^\omega$ por

$$g_f(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para cada $n \in \omega$. Mostre que $\mathcal{G} = \{g_f : f \in \mathcal{F}\}$ é ilimitada mas não é dominante.

Exercício 2.4.20. Mostre que $\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega$.

Exercício 2.4.21. Mostre que existe α tal que $\aleph_\alpha = \alpha$.

Exercício 2.4.22. Seja κ um cardinal. Seja X um conjunto tal que $\kappa \leq |X|$.

(a) Para cada $A \in [X]^\kappa$, fixe $f_A : \kappa \longrightarrow A$ bijetora. Mostre que $\varphi : [X]^\kappa \longrightarrow X^\kappa$ dada por $\varphi(A) = f_A$ é injetora.

(b) Observe que $X^\kappa \subset [\kappa \times X]^\kappa$.

(c) Mostre que $|X^\kappa| = |[X]^\kappa|$.

Exercício 2.4.23. Este é um roteiro para mostrar que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

(a) Associe, para cada $x \in \mathbb{R}$, $s_x \in \mathbb{Q}^\omega$ de forma injetora.

(b) Seja $f \in 2^\omega$. Seja $\varphi(f) = \sum_{n\in\omega} f(n)10^{-n}$. Mostre que $\varphi : 2^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é injetora.

(c) Conclua que $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.

Capítulo 3

Algumas aplicações

3.1 Exemplos reais

Proposição 3.1.1. *Existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para toda reta da forma $v = \{(a, y) : y \in \mathbb{R}\}$ e $h = \{(x, a) : x \in \mathbb{R}\}$ ($a \in \mathbb{R}$), temos que $v \cap A$ tem no máximo um ponto e $h \cap A$ tem projeção densa nos reais.*

Demonstração. Considere $\mathcal{I} = \{I_n : n \in \omega\}$ uma enumeração de todos os intervalos da forma $]a, b[$ com $a < b \in \mathbb{Q}$. Seja $\{a_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \omega$, seja $x_n^0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_n^0 \in I_n$. Seja $A_0 = \{(x_n^0, a_0) : n \in \omega\}$. Suponha definidos $\{x_n^\xi : n \in \omega, \xi < \alpha\}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$. Para cada $k \in \omega$, seja $x_k^\alpha \in I_k \setminus \{x_n^\xi : n \in \omega, \xi < \alpha\}$. Defina $A_\alpha = \{(x_n^\alpha, a_\alpha) : n \in \omega\}$. Note que $A = \bigcup_{\alpha<\mathfrak{c}} A_\alpha$ é o conjunto procurado. □

Note que podemos tomar tal elemento já que $|I_k| = \mathfrak{c}$.

Proposição 3.1.2. *Existe um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer reta r, $|r \cap A| = 2$.*

Demonstração. Seja $(r_\xi)_{\xi<\mathfrak{c}}$ uma enumeração de todas as retas de $\mathbb{R}^2$. Seja $A_0 = \{a, b\}$, onde $a, b \in r_0$ são dois pontos distintos quaisquer. Fixe $\alpha < \mathfrak{c}$. Suponha definidos A_ξ para todo $\xi < \alpha$ e suponha por hipótese que não existam 3 pontos em $B = \bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi$ colineares. Se $|r_\alpha \cap B| = 2$, defina $A_\alpha = \emptyset$. Caso contrário, primeiramente note que $|[B]^2| < \mathfrak{c}$. Note também que cada par de pontos de B determina uma reta que, por sua vez, intercepta r_α no máximo em um ponto. Seja X o conjunto de tais pontos. Note que $|X| < |r|$. Assim, se $r \cap B = \emptyset$, defina $A_\alpha = \{a, b\}$ onde $a, b \in r \setminus X$ são dois pontos distintos. Se $|r \cap B| = 1$, defina $A_\alpha = \{a\}$ onde $a \in r \setminus X$ é um ponto qualquer. Note que $A = \bigcup_{\xi<\mathfrak{c}} A_\xi$ é o conjunto desejado. □

Vamos mostrar que todos os fechados não enumeráveis de $\mathbb{R}$ tem cardinalidade contínuo. Para isso, o seguinte Lema vai ajudar:

Lema 3.1.3. *Seja $F \subset \mathbb{R}$ não enumerável. Então existem I, J intervalos de extremos racionais tais que $I \cap F$ e $J \cap F$ são não enumeráveis e $\overline{I} \cap \overline{J} = \emptyset$.*

Demonstração. Fixe $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Considere os intervalos da forma

$$I_z^n =]z\frac{1}{n}, (z+1)\frac{1}{n}[$$

com $z \in \mathbb{Z}$. Note que, pelo menos um destes intervalos é tal que $I_z^n \cap F$ é não enumerável. Se dois deles tem tal propriedade, terminamos. Caso contrário, repita o processo com $n+k$ com $k \in \mathbb{N}$. Se para algum k encontramos dois intervalos cuja intersecção com F é não enumerável, terminamos. Se isso é impossível, podemos construir uma sequência $(z_k)_{k\in\omega}$ tal que $I_{z_k}^{n+k} \cap F$ é não enumerável e z_k é o único com tal propriedade. Note que $\bigcap_{k\in\omega} I_{z_k}^{n+k}$ tem no máximo um ponto. Logo, F é enumerável, já que, a menos de no máximo um ponto, está contido $\bigcup_{k\in\omega}\bigcup_{z\neq z_k} I_z^{n+k} \cap F$ (e todos esses conjuntos são enumeráveis).

Note que podemos repetir o mesmo processo se para cada k existirem apenas dois intervalos cuja intersecção seja não enumerável. Desta forma, existem pelo menos 3 intervalos e, portanto, podemos tomar dois não consecutivos, assim garantindo o enunciado. □

Corolário 3.1.4. *Dado $F \subset \mathbb{R}$ fechado não enumerável, existem dois intervalos I_0, I_1 fechados disjuntos e limitados tais que $I_0 \cap F$ e $I_1 \cap F$ são não enumeráveis.*

Proposição 3.1.5. *Todo subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ não enumerável é tal que $|F| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Sejam I_0 e I_1 como no Corolário. Suponha definido I_s para $s \in \omega^{<\omega}$ de forma que $I_s \cap F$ é não enumerável. Assim, podemos aplicar o Corolário novamente e encontrar $I_{s^\frown 0}$ e $I_{s^\frown 1}$ intervalos fechados, limitados e disjuntos tais que $I_{s^\frown i} \cap F$ é não enumerável e $I_{s^\frown i} \subset I_s$.

Dada uma sequência s e um elemento n, denotamos por $s^\frown n$ a sequência s acrescida de n como último elemento.

Note que, dada $f : \omega \longrightarrow 2$, temos que existe $x_f \in \bigcap_{n\in\omega} I_{f\restriction n}$. Note também que $x_f \neq x_g$ se $f \neq g$ e, finalmente, que cada $x_f \in F$. □

Proposição 3.1.6. *Existem exatamente $\mathfrak{c}$ fechados não enumeráveis em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para $\mathbb{R}$. Note que todo aberto de $\mathbb{R}$ pode ser escrito como união enumerável dos elementos desta base.

Assim, existem, no máximo, $|\mathcal{B}|^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ abertos em $\mathbb{R}$ e, portanto, a mesma quantidade de fechados.

Por outro lado, para cada $r \in \mathbb{R}$, o intervalo $[r, r+1]$ é um fechado não enumerável e, portanto, existem $\mathfrak{c}$ fechados não enumeráveis em $\mathbb{R}$. □

Definição 3.1.7. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}$ é um **conjunto de Bernstein** se X é não enumerável e, para todo $F \subset \mathbb{R}$ fechado não enumerável, temos que $F \cap X$ e $F \cap (\mathbb{R} \smallsetminus X)$ são não vazios.

Proposição 3.1.8. *Existe um conjunto de Bernstein.*

Demonstração. Seja $(F_\xi)_{\xi<\mathfrak{c}}$ uma enumeração de todos os fechados não enumeráveis de $\mathbb{R}$. Sejam $x_0, y_0 \in F_0$ distintos. Suponha definidos $(x_\xi)_{\xi<\alpha}$ e $(y_\xi)_{\xi<\alpha}$ para $\alpha < \mathfrak{c}$. Sejam $x_\alpha, y_\alpha \in F_\alpha \smallsetminus (\{x_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{y_\xi : \xi < \alpha\})$ (note que podemos fazer isso já que $|F_\xi| = \mathfrak{c}$.

Note que $X = \{x_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ e $Y = \{y_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$ são conjuntos de Bernstein. □

Só note que os dois são disjuntos que tudo sai fácil.

Exercícios

Exercício 3.1.9. Adapte a demonstração da Proposição 3.1.1 e garanta que $v \cap A$ tenha exatamente um ponto.

Exercício 3.1.10. Mostre que $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathbb{Q}^3$ é uma união de retas disjuntas.

Exercício 3.1.11. Seja X um conjunto de Bernstein.

(a) Mostre que, para qualquer $K \subset X$ compacto, temos que K é enumerável.

(b) Mostre que, para qualquer A aberto tal que $X \subset A$, temos que $\mathbb{R} \smallsetminus A$ é enumerável.

(c) Conclua que X não é mensurável.

A ideia aqui é só usar que os mensuráveis podem ser aproximados por baixo por compactos e por cima por abertos. Lembre também que conjuntos enumeráveis tem medida nula.

3.2 Algumas funções

O primeiro resultado desta seção é um caso particular do resultado conhecido como **Lema do Pressing Down**:

Proposição 3.2.1. *Seja $\alpha \in \omega_1$. Seja $f : [\alpha, \omega_1[\longrightarrow \omega_1$ função tal que $f(\xi) < \xi$ para todo $\xi \in [\alpha, \omega_1[$. Então existe β tal que $f^{-1}(\beta)$ é ilimitado em ω_1 .*

Demonstração. Suponha que não. Seja $\beta_0 = \alpha$. Suponha definidos $\beta_0, ..., \beta_n$. Defina

$$\beta_{n+1} = \sup\{\gamma < \omega_1 : f(\gamma) \leq \beta_n\} + 1$$

Note que, por hipótese, $\beta_{n+1} < \omega_1$. Seja $\beta = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$. Seja $\gamma = f(\beta)$. Note que $\gamma < \beta$. Logo, existe $n \in \omega$ tal que $\gamma \leq \beta_n$. Assim, pela definição de β_{n+1}, temos que, para qualquer $\xi \geq \beta_{n+1}$, $f(\xi) \neq \gamma$. Contradição com $f(\beta) = \gamma$ e $\beta \leq \beta_{n+1}$. □

Como uma aplicação de tal resultado, vamos apresentar o seguinte exemplo:

Proposição 3.2.2. *O espaço $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ não é normal.*

Demonstração. Note que $D = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in \omega_1)\}$ e $F = \{(\alpha, \omega_1) : \alpha < \omega_1\}$ são fechados disjuntos. Suponha que existam A e B abertos disjuntos tais que $D \subset A$ e $F \subset B$. Note que, para qualquer $\alpha < \omega_1$, um aberto básico para (α, α) é da forma $]\beta, \alpha]\times]\beta, \alpha]$, com $\beta < \alpha$. Assim, para $\alpha \in \omega_1 \smallsetminus \{0\}$, podemos definir $f(\alpha) < \alpha$ tal que

$$(\alpha, \alpha) \in]f(\alpha), \alpha]\times]f(\alpha), \alpha] \subset A$$

Pelo resultado anterior, temos que existe β tal que $f(\alpha) = \beta$ para um conjunto ilimitado de α's. Isso implica que

$$]\beta, \omega_1[\times]\beta, \omega_1[\subset U.$$

Seja $\gamma < \omega_1$ tal que $\beta < \gamma$. Note que existem $\xi < \gamma$ e $\xi' < \omega_1$ tais que $(\gamma, \omega_1) \in]\xi, \gamma]\times]\xi', \omega_1] \subset B$ (note que podemos tomar $\xi' > \beta$). Assim, temos que $(\gamma, \xi' + 1) \in A \cap B$. □

Proposição 3.2.3. *Seja $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ função contínua. Então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $f(\beta) = f(\alpha)$ para todo $\beta \geq \alpha$.*

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Vamos mostrar que existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que

$$|f(\alpha_n) - f(\beta)| < \frac{1}{n}$$

para todo $\beta \geq \alpha_n$. Suponha que não. Então podemos construir sequências $(\gamma_k)_{k\in\omega}$ e $(\xi_k)_{k\in\omega}$ tais que

- $\gamma_0 < \xi_0 < \gamma_1 < \xi_1 ...$
- $|f(\gamma_k) - f(\xi_k)| \geq \frac{1}{n}$.

Seja $\delta = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\} = \sup\{\xi_n : n \in \omega\}$. Note que, como f é contínua, $f(\gamma_k) \longrightarrow f(\delta)$ e $f(\xi_k) \longrightarrow f(\delta)$. Mas isso contraria como cada γ_k e ξ_k foram escolhidos.

Seja $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Note que α satisfaz o que desejamos. $\square$

Definição 3.2.4. Dado X espaço topológico, denotamos por βX um conjunto compacto Hausdorff tal que:

(a) $X \subset \beta X$

(b) $\overline{X} = \beta X$

(c) se $f : X \longrightarrow [0,1]$ é uma função contínua, então existe $\tilde{f} : \beta X \longrightarrow \mathbb{R}$ extensão contínua de f.

Chamamos βX de **compactificação de Stone-Čech** de X.

Pode-se mostrar que um espaço X admite tal compactificação se, e somente se, ele for completamente regular. Também pode-se mostrar que tal compactificação é única a menos de homeomorfismos.

Proposição 3.2.5. $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$.

Demonstração. Note que já temos que $\omega_1 + 1$ é compacto e que $\overline{\omega_1} = \omega_1$. Resta mostrar a propriedade de extensão de funções contínuas. Seja $f : \omega_1 \longrightarrow [0,1]$ função contínua. Seja $\alpha < \omega_1$ como na Proposição 3.2.3. Defina $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x < \omega_1$ e $\tilde{f}(\omega_1) = f(\alpha)$. Note que $\tilde{f}$ é a função desejada. $\square$

Exercícios

Exercício 3.2.6. Mostre que toda $f : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua é limitada (apesar de ω_1 não ser compacto).

Exercício 3.2.7. Seja X tal que exista βX. Mostre que toda função contínua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada pode ser estendida a βX.

Exercício 3.2.8. Considere $\beta\omega$ (existe pela observação acima). Considere $C(\beta\omega)$ o espaço de todas as funções contínuas de $\beta\omega$ em $\mathbb{R}$ com a norma do sup ($\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \beta\omega\}$). Mostre que tal espaço é isomorfo (como espaço de Banach) a ℓ_∞.

3.3 Colorações

Definição 3.3.1. Chamamos de uma **coloração** sobre X uma função $\pi : X \longrightarrow r$, onde $r \in \omega$ $(0, 1, ..., r1$ são as possíveis cores para os elementos de $X)$.

Podemos também usar r-coloração, para indicar a quantidade de cores.

Definição 3.3.2. Seja X um conjunto e $r \in \mathbb{N}_{>0}$. Dada uma coloração $\pi : X \longrightarrow r$, dizemos que $Y \subset X$ é **monocromático** se existe $c \in r$ tal que $\pi(y) = c$ para todo $y \in Y$.

Definição 3.3.3. Seja X um conjunto e $r, n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dada uma coloração $\pi : [X]^n \longrightarrow r$, dizemos que $H \subset X$ é **homogêneo** se $[H]^n$ é monocromático.

Teorema 3.3.4 (de Ramsey). *Sejam $n, r \in \mathbb{N}_{>0}$. Seja $\pi : [\omega]^n \longrightarrow r$ uma coloração. Dado $S \subset \omega$ infinito, existe $H \subset S$ infinito homogêneo.*

Demonstração. Por indução sobre n. Caso $n = 1$, é imediato pelo princípio da casa dos pombos. Seja $\pi : [\omega]^{n+1} \longrightarrow r$. Para cada $a \in \omega$, seja $\pi_a : [\omega \setminus \{a\}]^n \longrightarrow r$ dada por

$$\pi_a(F) = \pi(F \cup \{a\})$$

Defina $a_0 = \min S$ e seja $H_0 \subset S \setminus \{a_0\}$ homogêneo para π_{a_0}. Para cada $k \in \omega$, sejam:

- $a_{k+1} = min\{a \in H_k : a > a_j \text{ para } j \leq k\}$.
- $H_{k+1} \subset H_k$ é homogêneo para $\pi_{a_{k+1}}$.

Note que, para cada $j \in \omega$, o conjunto $[\{a_k : k > j\}]^n$ é monocromático para π_{a_j}. Seja c_{a_j} tal cor. Como só existem r cores, existe uma cor c tal que $c_j = c$ para infinitos j's. Seja H o conjunto de tais a_j's. Sejam $b_0 < \cdots < b_n \in H$. Note que

$$\pi(\{b_0, ..., b_n\}) = \pi_{b_0}(\{b_1, ..., b_n\}) = c_{b_j} = c.$$

Ou seja, H é homogêneo para π. □

Como Corolário de tal resultado, temos sua versão finita:

Corolário 3.3.5 (Teorema de Ramsey (versão finita)). *Sejam $m, n, r \in \omega$, com $r \geq 1$ e $n \leq m$. Então existe $N \in \omega$, com $N \geq m$ tal que, para todo coloração $\pi : [N]^n \longrightarrow r$, existe $H \in [N]^m$ tal que todo subconjunto de H com n elementos tem a mesma cor.*

Antes de provarmos tal resultado, convém apresentar uma definição e um resultado que serão úteis em outras situações:

Definição 3.3.6. Seja $(T, \leq)$ conjunto ordenado. Dizemos que T é uma **árvore** se, para qualquer $p \in T$, o conjunto $\{q \in T : q \leq p\}$ é bem ordenado por $\leq$. Dados $p < q \in T$, dizemos que q é um **sucessor** de p se não existe $r \in T$ tal que $p < r < q$. Dizemos que uma árvore **bifurca finitamente** se, para todo $p \in T$, o conjunto dos sucessores de T é finito e T só possui finitas raízes.

Um elemento de uma árvore é uma **raiz** se ele é minimal.

Um **ramo** numa árvore é uma cadeia maximal

Proposição 3.3.7 (Lema de König). *Seja $(T, \leq)$ uma árvore infinita que bifurca finitamente. Então T contém um ramo infinito.*

Demonstração. Seja R_0 o conjunto das raízes de T. Note que, para algum $r_0 \in R$, o conjunto $\{s \in T : r_0 \leq s\}$ é infinito. Como os sucessores de r_0 são finitos, existe r_1 sucessor de r_0 tal que $\{s \in T : r_1 \leq s\}$ é infinito. Procedendo desta maneira, podemos encontrar $(r_n)_{n\in\omega}$ todos ordenados que podem ser estendidos (se necessário) a um ramo. □

Demonstração. (do Teorema de Ramsey (versão finita)) Suponha por contradição que não vale o resultado. Ou seja, existem $m, n, r \in \omega$ como no enunciado de maneira que, para $N \geq m$, existe uma coloração $\pi_N : [N]^n \longrightarrow r$, tal que não existe $H \in [N]^m$ homogêneo.

Defina

$$\mathbb{P} = \{\pi_N : \pi_N \text{ é uma } r\text{−coloração sobre } [N]^m,\ N \geq m \text{ e não existe } H \in [N]^m \text{ homogêneo}\}$$

Dadas $\pi_N, \pi_M \in \mathbb{P}$, dizemos que $\pi_N \leq \pi_M$ se, e somente se, $N \leq M$ e $\pi_N \subset \pi_M$. Note que $\mathbb{P}$ é uma árvore que bifurca finitamente. Além disso, por hipótese, tal árvore é infinita (existem infinitos N's) e cada π_N não admite um conjunto H com m elementos que seja homogêneo. Pelo Lema de König, existe um ramo infinito r em tal árvore. Note que $\pi = \bigcup_{\pi_N \in r} \pi_N$ é uma coloração definida sobre $[\omega]^m$. Note também que tal coloração não admite um subconjunto de tamanho m que seja homogêneo, contrariando o Teorema de Ramsey (que diz que existe um infinito). □

Exercícios

Exercício 3.3.8. Considere $\equiv$ a seguinte relação entre subconjuntos de ω: $A \equiv B$ se $A \Delta B$ é finito.

(a) Note que $\equiv$ é uma relação de equivalência.

(b) Fixe para cada classe de equivalência $[X]$ um representante $f([X])$. Note que $X \Delta f([X])$ é finito.

(c) Mostre que existe uma coloração $\pi : [\omega]^{\omega} \longrightarrow 2$ tal que para todo conjunto infinito $X \subset \omega$, existem $A, B \subset X$ infinitos tais que $\pi(A) \neq \pi(B)$.

(d) Compare com o Teorema de Ramsey (versão finita).

Capítulo 4

Filtros

4.1 Conceitos básicos

Definição 4.1.1. Dizemos que $\leq$ é uma **pré-ordem** sobre $\mathbb{P}$ se, para todos $a, b, c \in \mathbb{P}$, temos que

(a) $a \leq a$

(b) se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Definição 4.1.2. Uma pré-ordem $(P, \leq)$ é não trivial se não existe p tal que $p \leq q$ para todo $q \in \mathbb{P}$. No decorrer do texto, a menos de menção contrária, toda pré-ordem será não trivial.

Definição 4.1.3. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma pré-ordem. Dizemos que $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ é um **filtro** se

(a) $\mathcal{F} \neq \emptyset, \mathbb{P}$.

(b) se $p, q \in \mathcal{F}$, existe $r \in \mathcal{F}$ tal que $r \leq p, q$.

(c) se $p \in \mathbb{P}$ e $q \in \mathbb{P}$ são tais que $p \leq q$, então $q \in \mathbb{P}$.

Definição 4.1.4. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma pré-ordem. Dizemos que $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ é uma **família centrada** se, para todo $a_1, ..., a_n \in \mathcal{F}$, existe $b \in \mathbb{P}$ tal que $b \leq a_i$ para todo $i = 1, ..., n$. Diremos que a família é centrada em si mesma se o b pode ser tomado em $\mathcal{F}$.

Exemplo 4.1.5. Considere X um conjunto não vazio. Considere $\wp^*(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos não vazios de X. Considere sobre $\wp^*(X)$

a ordem da inclusão. Note que uma família $\mathcal{F}$ em $\wp^*(X)$ é centrada se, e somente se, $\mathcal{F}$ tem a propriedade da intersecção finita (veja o Exercício 4.1.14).

Proposição 4.1.6. *Seja $(I\!P, \leq)$ uma pré-ordem. Dada $\mathcal{F} \subset I\!P$ centrada em si mesma, existe um filtro $F \supset \mathcal{F}$.*

Demonstração. Basta tomar $F = \{b \in I\!P : \text{existe } a \in \mathcal{F} \text{ tal que } a \leq b\}$. □

Definição 4.1.7. Dizemos que um filtro F é um **ultrafiltro** se F é maximal (com relação à inclusão).

Exemplo 4.1.8. Seja $x \in X$. Então $u_x = \{A \subset X : x \in A\}$ é um ultrafiltro em $\wp^*(X)$.

Proposição 4.1.9. *Se $a \in I\!P$ é um elemento minimal, então $u_a = \{b \in I\!P : a \leq b\}$ é um ultrafiltro. Chamamos tal ultrafiltro de* **ultrafiltro principal**.

Proposição 4.1.10. *Todo filtro pode ser estendido a um ultrafiltro.*

Demonstração. Basta notar que na prova da Proposição 4.1.6 obtemos um ultrafiltro, dada a maximilidade. □

Proposição 4.1.11. *Seja X um conjunto não vazio. Seja u um filtro sobre $\wp^*(X)$. São equivalentes:*

(i) *u é um ultrafiltro.*

(ii) *se $A \subset X$, então $A \in u$ ou $(X \setminus A) \in u$.*

(iii) *se $A \cup B \in u$, então $A \in u$ ou $B \in u$.*

Demonstração. $(i \Rightarrow ii)$: Suponha que exista $B \in u$ tal que $B \cap A = \emptyset$. Neste caso, $B \subset (X \setminus A)$ e, portanto, $(X \setminus A) \in u$. Então suponha que não exista $B \in u$ tal que $B \cap A = \emptyset$. Note que, então $u \cup \{A\}$ é centrada. Logo, existe $u' \supset u$ ultrafiltro contendo A (veja o Exercício 4.1.15. Mas, como u é maximal, $u' = u$ e, portanto, $A \in u$.

$(ii \Rightarrow i)$: Sejam $A, B \subset X$ tais que $A \cup B \in u$. Suponha que $A \notin u$. Então $X \setminus A \in u$. Note que

$$B \supset (X \setminus A) \cap (A \cup B) \in u$$

Logo, $B \in u$.

$(iii \Rightarrow i)$: Seja u um filtro satisfazendo (iii). Seja $u' \supset u$ filtro. Suponha que exista $A \in u' \smallsetminus u$. Note que

$$A \cup (X \smallsetminus A) = X \in u$$

Logo, $A \in u$ ou $(X \smallsetminus A) \in u$. Note que $(X \smallsetminus A) \notin u$, pois, caso contrário, teríamos $(X \smallsetminus A) \in u'$ o que contraria $A \in u'$. Logo, $A \in u$. □

Uma topologia sobre ultrafiltros

Definição 4.1.12. Seja X um conjunto não vazio. Vamos denotar por $Ult(X)$ o conjunto de todos os ultrafiltros sobre $\wp^*(X)$. Considere sobre $Ult(X)$ a topologia gerada pelos conjuntos da forma $a^* = \{u \in Ult(X) : a \in u\}$ para $a \subset X$.

Veja o 4.1.17 para notar que tal conjunto de fato é uma base.

Proposição 4.1.13. *Sejam X não vazio e $a \in \wp^*(X)$. Temos:*

(a) a^* é aberto e fechado.

(b) $Ult(X)$ é de Hausdorff.

(c) $Ult(X)$ é compacto.

Demonstração. (a) Basta notar que $Ult(X) \smallsetminus a^* = (X \smallsetminus a)^*$.

(b) Sejam $u, v \in Ult(X)$ distintos. Seja $a \in u \smallsetminus v$. Note que, como $a \notin v$, $X \smallsetminus a \in v$. Assim, $u \in a^*$ e $v \in (X \smallsetminus a)^*$.

(c) Suponha que não. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura para $Ult(X)$ por abertos básicos sem subcobertura finita. Isto é, $\mathcal{A} = \{a^* : a \in \mathcal{A}'\}$ para algum $\mathcal{A}' \subset \wp(X)$. Seja $\mathcal{B} = \{X \smallsetminus a : a \in \mathcal{A}'\}$. Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é centrado. Sejam $X \smallsetminus a_1, ..., X \smallsetminus a_n \in \mathcal{B}$. Note que, como $a_1^* \cup \cdots a_n^*$ não cobre $Ult(X)$, temos que existe $u \notin a_i^*$ para todo $i = 1, ..., n$. Ou seja, $X \smallsetminus a_i \in u$ para todo $i = 1, ..., n$. Como u é filtro, $(X \smallsetminus a_1) \cap \cdots \cap (X \smallsetminus a_n) \neq \emptyset$. Ou seja, a família $\mathcal{B}$ é centrada. Logo, existe $v \in Ult(X) \supset \mathcal{B}$. Note que $v \notin \bigcup A$, contradição.

□

Exercícios

Exercício 4.1.14. Seja $\mathcal{F} \subset \wp^*(X)$. Mostre que $\mathcal{F}$ é centrada se, e somente se, qualquer intersecção finita de elementos de $\mathcal{F}$ é não vazia.

Exercício 4.1.15. Seja X não vazio. Seja $\mathcal{F} \subset \wp^*(X)$. Seja $[\mathcal{F}]$ o conjunto de todas as intersecções finitas de $\mathcal{F}$.

(a) Mostre que $\mathcal{F}$ é centrada se, e somente se, $[\mathcal{F}]$ é centrada em si mesma.

(b) Mostre que se $\mathcal{F}$ é centrada, então existe $u \supset \mathcal{F}$ ultrafiltro.

Exercício 4.1.16. Seja X um conjunto. Então $\wp^*(X)$ admite um ultrafiltro não principal se, e somente se, X é infinito.

Exercício 4.1.17. Seja X não vazio. Mostre que $a^* \cap b^* = (a \cap b)^*$.

4.2 Algumas aplicações coloridas

Nesta seção, vamos considerar sempre a ordem $\mathcal{U}$ como o conjunto dos ultrafiltros sobre $\wp^*(\mathbb{N}_{>0})$.

Definição 4.2.1. Considere $\oplus$ definida sobre $\mathcal{U}$ por

$$u \oplus v = \{A \subset \mathbb{N}_{>0} : \{k \in \mathbb{N}_{>0} : A - k \in u\} \in v\}$$

onde $A - k = \{a - k : a \in A\} \cap \mathbb{N}_{>0}$. Note que $u \oplus v \in \mathcal{U}$ se $u, v \in \mathcal{U}$ (Exercício 4.2.7).

Definição 4.2.2. $u \in \mathcal{U}$ é dito **idempotente** se $u \oplus u = u$.

Note que, pelo Exercício 4.2.8, nenhum ultrafiltro principal de $\mathcal{U}$ é idempotente.

Proposição 4.2.3. *Existe $u \in \mathcal{U}$ idempotente.*

Demonstração. Considere $\mathcal{A} = \{A \subset \mathcal{U} : A \neq \emptyset,\ A \text{ é fechado e } A \oplus A = A\}$. Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ já que $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$. Note também que, como cada elemento de $\mathcal{A}$ é fechado e $\mathcal{U}$ é compacto, temos que toda cadeia decrescente de elementos de $\mathcal{A}$ tem intersecção não vazia. Note também que tal intersecção pertence a $\mathcal{A}$. Logo, existe um elemento minimal $B \in \mathcal{A}$. Vamos provar que todo elemento de B é idempotente. Como $B \neq \emptyset$, isso implica o resultado.

Seja $u \in B$. Note que $u \oplus B \subset B$ e que $u \oplus B$ é fechado (já que é imagem contínua de um compacto - veja o Exercício 4.2.9). Pela minimalidade, temos que $u \oplus B = B$. Ou seja, para cada $u \in B$, existe $v \in B$ tal que $u \oplus v = u$. Seja

$$B_u = \{v \in B : u \oplus v = u\}$$

Note que $B_u \neq \emptyset$, B_u é fechado (por continuidade, veja o Exercício 4.2.9) e, finalmente, que $B_u \oplus B_u \subset B_u$. Logo, $B_u \in \mathcal{A}$. Como $B_u \subset B$ e B é minimal, obtemos que $B_u = B$. Ou seja, $u \in B_u$ e, portanto, $u \oplus u = u$. □

Note que, dados $v, w \in B_u$, temos que $u \oplus (v \oplus w) = u \oplus w = u$.

Corolário 4.2.4 (Teorema de Hindman). *Seja $\pi : \mathbb{N}_{>0} \longrightarrow r$ uma coloração ($r \in \omega$). Então existe $X \subset \omega$ infinito tal que $\sum_X = \{\sum_{i=1}^n x_i : x_1, ..., x_n \in X, x_i \neq x_j$ se $i \neq j\}$ é monocromático.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{U}$ idempotente. Para cada $A \in u$, seja

$$A^* = \{k \in \mathbb{N}_{>0} : A - k \in u\}$$

Note que, como $A \in u$, temos que $A \in u \oplus u$. Pela definição de $u \oplus u$, temos que $A^* \in u$. Assim, temos que $A \cap A^* \in u$ e, portanto, $A \cap A^*$ é infinito (já que u é não principal - veja o Exercício 4.2.10).

Seja $A \in u$. Vamos provar que existe X infinito tal que $\sum_X \subset A$. Sejam $A_0 = A$ e $k_0 \in A_0 \cap A_0^*$. Defina $A_1 = (A_0 - k_0) \cap A_0$. Por construção, $A_0 - k_0 \in u$ e, portanto, $A_1 \in u$. Logo, podemos escolher $k_1 \in A_1 \cap A_1^*$ e podemos ainda tomar $k_1 > k_0$. Ou seja, procedemos fazendo:

- $A_{n+1} = (A_n - k_n) \cap A_n$;
- $k_{n+1} \in A_{n+1} \cap A_{n+1}^*$ com $k_{n+1} > k_n$.

Seja $X = \{k_n : n \in \omega\}$. Note que X é infinito. Note que, dados $k_{j_1} < ... < k_{j_n}$, temos que $\sum_{i=1}^n k_{j_i} \in A_{j_1} \subset A$.

Ou seja, qualquer elemento de u contém um conjunto da forma $\sum_X$ para algum X infinito. Assim, para terminarmos o resultado, basta encontrarmos um elemento de u que seja monocromático. Note que $\mathbb{N}_{>0} = \pi^{-1}(0) \cup \cdots \cup \pi^{-1}(r-1)$ e que tal união é disjunta. Logo, pelo menos um destes conjuntos pertence a u (veja Exercício 4.2.11). Claramente, tal conjunto é monocromático. □

Por outro lado, note que existe uma coloração tal que não existe um subconjunto infinito monocromático que seja fechado para a soma (ver o Exercício 4.2.12).

Proposição 4.2.5. *Seja X um conjunto e seja $\mathcal{G} \subset \wp^*(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) Para toda coloração finita sobre X, existe $G \in \mathcal{G}$ monocromático.

(b) Existe um ultrafiltro u sobre $\wp^*(X)$ tal que, para todo $F \in u$, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subset u$.

Demonstração. $a \Rightarrow b$) Seja $\mathcal{F} = \{F \subset X : F \cap G \neq \emptyset$ para todo $G \in \mathcal{G}\}$.

Considere $[\mathcal{F}]$ o conjunto de todas as intersecções finitas de elementos de $\mathcal{F}$. Vamos mostrar que $[\mathcal{F}]$ é centrada. Sejam $F_1, ..., F_n \in \mathcal{F}$. Para cada $S \subset \{1, ..., n\}$, defina

$$C_S = \bigcap_{i \in S} F_i \cap \bigcap_{i \notin S} (X \setminus F_i)$$

Alguns dos elementos poderiam ser vazios, mas isso não é problema.
Outro abuso aqui. Formalmente, seria uma 2^n-coloração.

Note que $(C_S)_{S \subset \{1,...,n\}}$ forma uma partição sobre X. Considere a seguinte coloração $\pi : X \longrightarrow \wp(\{1, ..., n\})$ dada por $\pi(x) = S$ se $x \in C_S$. Por (a), existe $G \in \mathcal{G}$ monocromático. Isto é, existe $S \subset \{1, ..., n\}$ tal que $G \subset \bigcap_{i \in S} F_i \cap \bigcap_{i \notin S} (X \setminus F_i)$. Mas, como $G \cap F_i \neq \emptyset$ para todo i, temos que $G \subset \bigcap_{i=1}^n F_i$ e, em particular, $\bigcap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset$.

Seja u ultrafiltro tal que $u \supset [\mathcal{F}]$. Seja $F \in u$. Como $(X \setminus F) \notin u$, temos que $(X \setminus F) \notin \mathcal{F}$. Logo, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \cap (X \setminus F) = \emptyset$. Ou seja, $G \subset F$ como queríamos.

$b \Rightarrow a$) Seja u ultrafiltro como em b. Seja π uma coloração finita sobre X. Então existe um subconjunto monocromático $F \in u$ (ver Exercício 4.2.11). Logo, qualquer $G \in \mathcal{G}$ com $G \subset F$ (dado por (b)) é monocromático.

□

Exercícios

Exercício 4.2.6. Mostre que $\oplus$ é associativa.

Exercício 4.2.7. Mostre que, de fato, $u \oplus v \in \mathcal{U}$ se $u, v \in \mathcal{U}$.

Exercício 4.2.8. Para cada $n \in \mathbb{N}_{>0}$, considere $u_n = \{A \subset \mathbb{N}_{>0} : n \in A\}$. Mostre que $u_a \oplus u_b = u_{a+b}$ para todo $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$.

Exercício 4.2.9. Seja $u \in \mathcal{U}$. Mostre que $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ dada por $f(v) = u \oplus v$ é contínua.

Exercício 4.2.10. Seja X um conjunto e seja u ultrafiltro sobre $\wp^*(X)$. Mostre que u é principal se, e somente se, u contém algum conjunto finito.

Exercício 4.2.11. Sejam X um conjunto e u ultrafiltro sobre $\wp^*(X)$. Se $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, então existe i tal que $A_i \in u$.

Exercício 4.2.12. Mostre que existe uma r-coloração sobre ω tal que não existe subconjunto infinito monocromático que seja fechado para a soma.

4.3 Um pouco de $\beta\omega$

Nesta seção, vamos provar que $\mathcal{U}$, o espaço dos ultrafiltros sobre $\wp^*(\omega)$, é o $\beta\omega$ e aproveitar para mostrar alguns resultados sobre $\beta\omega$.

Proposição 4.3.1. *$\mathcal{U}$ é homeomorfo a $\beta\omega$.*

Demonstração. Lembrando, só precisamos mostrar que $\overline{\omega} = \mathcal{U}$ e que $\mathcal{U}$ tem a propriedade da extensão de funções contínuas como na Definição 3.2.4. Tecnicamente, $\omega \not\subset \mathcal{U}$. Mas note que $N = \{u_n : n \in \omega\}$ onde u_n é o ultrafiltro principal contendo $\{n\}$ é homeomorfo a ω (veja o Exercício 4.3.7). Seja a^* um aberto básico de $\wp^*(\omega)$. Seja $n \in a$. Note que, então $a \in u_n$, isto é, $u_n \in a^*$ e, portanto, $\overline{N} = \wp^*(\omega)$ como queríamos.

Seja $f : \omega \longrightarrow [0,1]$. Seja $u \in \wp^*(\omega)$. Para cada $a \in u$, seja

Note que qualquer função $f : \omega \longrightarrow [0,1]$ é contínua.

$$F_a = \overline{\{f(n) : n \in A\}}$$

Note que, como u é centrado, F_a também é. Como $[0,1]$ é compacto e cada F_a é fechado, temos que $\bigcap_{a\in u} F_a \neq \emptyset$. Vejamos que tal conjunto é unitário. Suponha que não. Sejam $x, y \in \bigcap_{a\in u} F_a$ distintos. Sejam A, B abertos disjuntos de $[0,1]$ tais que $x \in A$ e $y \in B$. Note que, então, para cada $a \in u$, temos que $A \cap \{f(n) : n \in a\} \neq \emptyset$. Isto é, $f^{-1}[A] \cap a \neq \emptyset$. Como u é ultrafiltro, isso implica que $f^{-1}[A] \in u$. Mas um argumento análogo prova que $f^{-1}[B] \in u$, o que é uma contradição. Desta forma, podemos definir $\tilde{f}(u) = x$, onde $\{x\} = \bigcap_{a\in u} F_a$. Note que $\tilde{f}$ é uma extensão contínua de f (veja Exercício 4.3.8). □

Note que esta demonstração serve para mostrar que qualquer função $f : \omega \longrightarrow K$, onde K é compacto Hausdorff, pode ser estendida. Esse é um resultado geral sobre βX.

Antes de mostrarmos o próximo resultado sobre ω, vamos provar alguns resultados sobre espaços separáveis:

Proposição 4.3.2. *O espaço ω^I onde $|I| \leq \mathfrak{c}$ é separável.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor $I \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B}_1 = \{]p,q[\cap I : p < q \in \mathbb{Q}\}$. Considere $\mathcal{B}_n$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{B}_1$ com exatamente n elementos e que tais elementos sejam disjuntos. Note que cada $\mathcal{B}_n$ é enumerável. Para cada $\{I_1, ..., I_n\} \in \mathcal{B}_n$ e cada $a_1, ..., a_n \in \omega$, seja $f^{a_1,...,a_n}_{I_1,...,I_n} : I \longrightarrow \omega$ dada por

$$f^{a_1,...,a_n}_{I_1,...,I_n}(x) = \begin{cases} a_i & \text{se } x \in I_i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de tais funções. Note que $\mathcal{F}$ é enumerável e é denso em ω^I. □

Corolário 4.3.3. *Seja $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$, com $\kappa \leq \mathfrak{c}$, família de espaços separáveis. Então $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ é separável.*

Demonstração. Para cada $\xi < \kappa$, seja $D_\xi \subset X_\xi$ denso enumerável. Note que $\prod_{\xi<\kappa} D_\xi$ é denso em $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$. Note também que existe $f : \prod_{\xi<\kappa} \omega \longrightarrow \prod_{\xi<\kappa} D_\xi$ contínua e sobrejetora. Como $\prod_{\xi<\kappa} \omega$ é separável, então $\prod_{\xi<\kappa} D_\xi$ é separável e, portanto, $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ é separável. □

Proposição 4.3.4. $|\beta\omega| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Demonstração. Cada $u \in \mathcal{U}$ é tal que $u \subset \wp^*(\omega)$. Logo, temos que $\mathcal{U} \subset \wp^*(\wp^*(\omega))$ e, portanto, já temos que $|\beta\omega| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Por outro lado, considere $\mathcal{C}$ o conjunto de todas as funções de ω em $[0,1]$. Note que $[0,1]^{\mathcal{C}}$ é separável pelo resultado anterior e é compacto. Assim, seja $D \subset [0,1]^{\mathcal{C}}$ denso enumerável e seja $f : \omega \longrightarrow D$ bijeção. Pelo comentário acima, existe $\tilde{f} : \beta\omega \longrightarrow [0,1]^{\mathcal{C}}$ extensão contínua. Como a imagem de $\tilde{f}$ é fechada e contém D, temos que $\tilde{f}$ é sobrejetora. Logo, $2^{\mathfrak{c}} = |[0,1]^{\mathcal{C}}| \leq |\beta\omega|$ com queríamos. □

Proposição 4.3.5. *Seja $F \subset \beta\omega$ fechado infinito. Então $|F| = |\beta\omega|$.*

Veja exercício 4.3.9.

Demonstração. Note que podemos construir famílias $(a_n)_{n\in\omega}$ e $(V_n)_{n\in\omega}$ onde

- $a_n \in V_n \cap F$ para todo $n \in \omega$.
- V_n é aberto.
- $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

Note que $A = \{a_n : n \in \omega\}$ é homeomorfo a ω (já que é discreto). Seja $g : A \longrightarrow [0,1]$. Considere $G : \omega \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$G(n) = \begin{cases} g(a_k) & \text{se } n \in V_k \cap \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja $\tilde{G} : \beta\omega \longrightarrow [0,1]$ extensão contínua de G. Dado $a_k \in A$, temos:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G}(a_k) & \in & \tilde{G}[V_k] \\ & \subset & \tilde{G}[\overline{V_k}] \\ & = & \tilde{\ }[\overline{V_k \cap \omega}] \\ & = & \overline{\tilde{G}[V_k \cap w]} \\ & = & \{g(a_k)\} \end{array}$$

Logo, $\tilde{G}$ é uma extensão contínua para g para $\beta\omega$ todo e, em particular, para $\overline{A}$. Logo, como $\overline{A}$ é compacto, temos que $\overline{A}$ é homeorfo a $\beta\omega$. Como $\overline{A} \subset F$, temos o resultado. □

Corolário 4.3.6. *$\beta\omega$ é um compacto onde nenhuma sequência não trivial é convergente.*

Exercícios

Exercício 4.3.7. Mostre que $N = \{u_n : n \in \omega\}$ onde cada u_n é o ultrafiltro principal contendo n é homeomorfo a ω.

Exercício 4.3.8. Seja $\tilde{f}$ definida em 4.3.1. Mostre que $\tilde{f}$ é contínua e que, para cada $n \in \omega$, $\tilde{f}(u_n) = f(n)$.

Exercício 4.3.9. Seja F compacto infinito e de Hausdorff.

(a) Note que existe $x \in F$ ponto de acumulação de F.

(b) Existe $y \in F$ distinto de x e existem A, B abertos disjuntos tais que $x \in A$ e $y \in B$.

(c) Mostre que existem $(a_n)_{n\in\omega}$ e $(V_n)_{n\in\omega}$ onde cada $a_n \in V_n$ e $(V_n)_{n\in\omega}$ são abertos dois a dois disjuntos.

Parte II

Além de ZFC

Capítulo 5

Axioma de Martin

5.1 Definição e resultados básicos

Como comentamos anteriormente, algumas afirmações são independentes de ZFC. Nesta seção, apresentaremos o axioma de Martin, que é uma destas afirmações. Para isso, precisamos de algumas definições:

Definição 5.1.1. Dada $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem, temos que $p, q \in \mathbb{P}$ são **incompatíveis** se não existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$ (notação, $p \perp q$).

Definição 5.1.2. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Dizemos que $A \subset \mathbb{P}$ é uma **anticadeia** se para todos $p, q \in A$ distintos, temos que $p \perp q$. Dizemos que $\mathbb{P}$ satisfaz **c.c.c.** (*countable chain condition*) se não existe $A \subset \mathbb{P}$ anticadeia não enumerável.

Sim, fica assim meio estranho por motivos históricos.

Definição 5.1.3. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Dizemos que $D \subset \mathbb{P}$ é **denso** se, para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $d \in D$ tal que $d \leq p$.

Definição 5.1.4. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Seja $\mathcal{D}$ uma família de densos de $\mathbb{P}$. Dizemos que um filtro F sobre $\mathbb{P}$ é **$\mathcal{D}$-genérico** se, para todo $D \in \mathcal{D}$, temos $F \cap D \neq \emptyset$.

Definição 5.1.5. Seja κ cardinal infinito. Denotamos por MA_κ a afirmação "para toda ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ c.c.c. e toda família $\mathcal{D}$ de densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, existe G filtro sobre $\mathbb{P}$ $\mathcal{D}$-genérico.

Se $\mathcal{D}$ é uma família enumerável de densos, existe G $\mathcal{D}$-genérico (Exercicio 5.1.11). Desta forma, MA_ω vale trivialmente (nem precisamos da hipótese c.c.c.).

Definição 5.1.6. Chamamos de **axioma de Martin** (MA) a afirmação: "para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$ vale MA_κ".

Ou seja, trivialmente, temos:

Proposição 5.1.7. *$CH \Rightarrow MA$.*

Definição 5.1.8. Sejam X e Y conjuntos. Chamamos de $Fn(X, Y)$ o conjunto das funções finitas cujo domínio está contido em X e imagem em Y. Vamos denotar $f \leq g$ quando $f \supset g$.

Proposição 5.1.9. *Sejam X, Y conjuntos com X infinito e $|Y| \geq 2$. Sejam $x \in X$ e $f : X \longrightarrow Y$ função. Então os conjuntos*

$$D_x = \{p \in Fn(X, Y) : x \in dom(p)\}$$

$$E_f = \{p \in Fn(X, Y) : \exists a \in dom(p) p(a) \neq f(a)\}$$

são densos em $Fn(X, Y)$.

Demonstração. Seja $p \in Fn(X, Y)$. Seja $x \in X$. Se $x \in \mathrm{dom}(p)$, temos que $p \in D_x$. Caso contrário, $q = p \cup \{(x, y)\}$ onde $y \in Y$ é tal que $q \in D_x$ e $q \leq p$.

Seja $f \in Y^X$. Seja $x \in X \smallsetminus \mathrm{dom}(p)$. Seja $y \in Y$ com $y \neq f(x)$. Note que $q = p \cup \{(x, y)\}$ é tal que $q \in E_f$ e $q \leq p$. □

Proposição 5.1.10. *Não vale $MA_{2^{\aleph_0}}$.*

Demonstração. Note que $Fn(\omega, 2)$ é c.c.c., já que é enumerável. Suponha que vale $MA_{2^{\aleph_0}}$. Então existe G filtro sobre $Fn(\omega, 2)$ filtro $\mathcal{D}$-genérico, onde, seguindo a notação do resultado anterior,

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in 2^\omega\}.$$

Seja $g = \bigcup G$. Note que g é uma função (veja Exercício 5.1.12). Seja $n \in \omega$. Como $G \cap D_n \neq \emptyset$, temos que $n \in \mathrm{dom}(g)$. Assim, $g \in 2^\omega$. Mas, dada $f \in 2^\omega$, como $G \cap E_g \neq \emptyset$, temos que $g \neq f$, contradição. □

Exercícios

Exercício 5.1.11. Seja $(P, \leq)$ uma ordem. Seja $\mathcal{D}$ família enumerável de densos. Então existe G $\mathcal{D}$-genérico.

Exercício 5.1.12. Seja F filtro sobre $Fn(X, Y)$. Mostre que $\bigcup F$ é uma função.

5.2 Uma aplicação lúdica

Nesta seção, vamos trabalhar com o seguinte jogo topológico:

Definição 5.2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Chamamos de **jogo de Rothberger** o seguinte jogo entre os jogadores I e II. A cada rodada $n \in \omega$, o jogador I escolhe $\mathcal{C}_n$ cobertura aberta para X. Depois, o jogador II escolhe $C_n \in \mathcal{C}_n$. No final, o jogador II é declarado o vencedor se $\bigcup_{n\in\omega} C_n$ é uma cobertura para X.

Definição 5.2.2. Dizemos que um espaço X é um **espaço de Rothberger** se o jogador I não tem uma estratégia vencedora para o jogo de Rothberger.

Note que todo espaço enumerável é de Rothberger e que todo espaço de Rothberger é de Lindelöf (veja o Exercício 5.2.5).

Proposição 5.2.3. *O espaço 2^ω é um compacto que não é de Rothberger.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe uma estratégia vencedora para o jogador I. A cada rodada n, considere a cobertura $\mathcal{C}_n = \{C_n^0, C_n^1\}$, onde

$$C_n^i = \{f \in 2^\omega : f(n) = i\}$$

Note que, de fato, cada C_n^i é um aberto e que $\mathcal{C}_n$ é uma cobertura. Considere uma partida em que o jogador I jogou sempre $\mathcal{C}_n$ em cada rodada n. Seja $f \in 2^\omega$ tal que, a cada rodada n, a escolha do jogador II foi $C_n^{f(n)}$. Defina $g \in 2^\omega$ tal que $g(n) = 0$ se $f(n) = 1$ e $g(n) = 1$ se $f(n) = 0$. Note que $g \notin \bigcup_{n\in\omega} C_n^{f(n)}$ e, portanto, o jogador I venceu a partida. □

Proposição 5.2.4. *(MA) Se X é de Lindelöf e $|X| < 2^{\aleph_0}$, então X é de Rothberger.*

Indicamos por (MA) que tal resultado vale na presença do axioma de Martin.

Demonstração. Seja σ uma estratégia para o jogador I. Note que, como o espaço é de Lindelöf, podemos supor que toda cobertura dada por σ é enumerável. Assim, considere $\{C_n^\emptyset : n \in \omega\}$ a cobertura dada por σ na rodada 0.. Dado $k \in \omega$, considere $\{C_n^k : n \in \omega\}$ a cobertura dada por σ caso o jogador II escolha $C_k^\emptyset$. De forma geral, dado $s \in \omega^{<\omega}$ e $k \in \omega$, $\{C_n^{s^\frown k} : n \in \omega\}$ é a cobertura dada por σ se o jogador I escolheu C_k^s na rodada anterior.

Considere $\mathbb{P} = \{C_n^s : n \in \omega, s \in \omega^{<\omega}\}$ com a seguinte ordem $C_n^s < C_m^t$ se $t \subsetneq s$. Note que $\mathbb{P}$ é enumerável e, portanto, c.c.c. Seja $x \in X$. Considere

$$D_x = \{C_n^s : x \in C_n^s\}$$

Note que, uma vez que $\{C_n^s : n \in \omega\}$ é uma cobertura para todo $s \in \omega^{<\omega}$, D_x é denso. Como $|X| < 2^{\aleph_0}$, temos que existe F filtro $(D_x)_{x\in X}$-genérico. Note que os elementos de tal filtro formam uma partida em que o jogador II vence o jogo de Rothberger e o jogador I segue σ. Ou seja, σ não é uma estratégia vencedora. □

Exercícios

Exercício 5.2.5. Mostre que todo espaço enumerável é de Rothberger. Mostre que todo espaço de Rothberger é de Lindelöf.

Exercício 5.2.6. Mostre que $\mathbb{R}$ não é de Rothberger.

Exercício 5.2.7. Considere o seguinte jogo entre os jogadores I e II. A cada rodada $n \in \omega$, o jogador I escolhe D_n um denso sobre X. Então, o jogador II escolhe $d_n \in D_n$. Ao final, o jogador II é o vencedor se $\{d_n : n \in \omega\}$ é denso.

(a) Mostre que se X tem base enumerável, então o jogador II tem estratégia vencedora.

(b) (MA) Mostre que se X é hereditariamente separável e X tem uma base $\mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{B}| < 2^{\aleph_0}$, então o jogador I não tem estratégia vencedora.

Um espaço é dito **hereditariamente separável** se todo subespaço seu é separável.

5.3 A volta dos pequenos cardinais

Nesta seção vamos trabalhar com a seguinte ordem $(\mathbb{P}, \leq)$: $\mathbb{P} = \omega^{<\omega} \times [\lambda]^{<\omega}$, onde $\lambda < 2^{\aleph_0}$. Diremos que $(s, F) \leq (t, G)$ se

$$s \supset t,\ F \supset G \text{ e } \forall \alpha \in G\ \forall n \in \operatorname{dom}(s) \smallsetminus \operatorname{dom}(t)\ s(n) > f_\alpha(n)$$

onde $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ é uma família de funções fixada, com cada $f_\alpha \in \omega^\omega$. Note que, para cada $\alpha \in \lambda$ e cada $n \in \omega$,

$$D_\alpha = \{(s, F) : \alpha \in F\}$$

$$E_n = \{(s, F) : n \in \operatorname{dom}(s)\}$$

são densos em $\mathbb{P}$. Denote por $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \lambda\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$.

Exemplo 5.3.1. Considere $s = \{(0,0), (1,0), (2,4), (3,7)\}$, $t = \{(0,0), (1,0), (2,4)\}$ e $F = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset \lambda$. Note que $(s, F), (t, F) \in \mathbb{P}$ e temos que $(s, F) \leq (t, F)$ se, e somente se, $7 > f_{\alpha_i}(3)$ para $i = 1, ..., n$.

Proposição 5.3.2. *$(\mathbb{P}, \leq)$ é c.c.c.*

Demonstração. Suponha que $\mathbb{P}$ não seja c.c.c. Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}$ anticadeia não enumerável. Como $\omega^{<\omega}$ é enumerável, existem $(s, F), (s, G) \in \mathcal{A}$ para alguma $s \in \omega^{<\omega}$. Note que $(s, F \cup G) \leq (s, F), (s, G)$ e, portanto, $\mathcal{A}$ não é uma anticadeia. □

Proposição 5.3.3. *Se $\mathcal{F}$ é um filtro $\mathcal{D}$-genérico sobre $\mathbb{P}$, então $\bigcup \mathcal{F}$ é uma função $f : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $f_\alpha \leq^* f$ para todo $\alpha < \lambda$.*

Demonstração. Como $\mathcal{F}$ intercepta todo E_n, temos que $f : \omega \longrightarrow \omega$. Seja $\alpha \in \lambda$ e seja $(s, F) \in \mathcal{F} \cap D_\alpha$. Vamos provar que

$$\{n \in \omega : f(n) \leq f_\alpha(n)\} \subset \mathrm{dom}(s).$$

Suponha que não. Seja $n \in \omega \setminus \mathrm{dom}(s)$ tal que $f(n) \leq f_\alpha(n)$. Seja $(t, G) \in \mathcal{F} \cap E_n$. Note que $(n, f(n)) \in t$. Por compatibilidade de $\mathcal{F}$, existe $(r, H) \leq (s, F), (t, G)$. Como $(r, H) \leq (t, G)$, temos que $n \in \mathrm{dom}(r)$. Assim $n \in \mathrm{dom}(r) \setminus \mathrm{dom}(s)$. Como $(r, H) \leq (s, F)$ temos que $f(n) = r(n) > f_\alpha(n)$, contradição. □

Corolário 5.3.4. *Dado $\kappa < 2^{\aleph_0}$, se vale MA_κ, então $\mathfrak{b} > \kappa$.*

Demonstração. Se tomamos $(f_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ com $\lambda \leq \kappa$, por MA_κ, podemos construir f tal que $f_\alpha \leq^* f$ para todo $\alpha < \lambda$. □

Corolário 5.3.5. *O axioma de Martin implica que $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ (e, portanto, $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{c}$).*

Alongamentos

Alongamento 5.3.6. Mostre que, de fato, D_α e E_n são densos para todo $\alpha <$ *lambda* e $n \in \omega$.

Capítulo 6

A hipótese de Suslin

6.1 Uma caracterização para os reais

Definição 6.1.1. Uma ordem $\leq$ é dita uma **ordem densa** se, para todo $a < b$ existe c tal que $a < c < b$.

Sim, o termo denso se refere a muitas coisas aqui. Paciência.

Proposição 6.1.2. *Todo conjunto enumerável, totalmente ordenado por uma ordem densa e sem maior nem menor elementos é isomorfo a* $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Considere $X = \{x_n : n \in \omega\}$ ordenado por $\leq$ como no enunciado. Fixe também $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ uma enumeração para $\mathbb{Q}$. Vamos definir $f : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ um isomorfismo de ordem por indução. Defina $f(x_0) = q_0$. Agora suponha definidos $f(x_0), ..., f(x_n)$ e vamos definir $f(x_{n+1})$. Temos 3 casos:

- Caso $x_{n+1} < x_k$ para todo $k \leq n$. Defina $f(x_{n+1}) = q_i$, onde $i = \min\{j \in \omega : q_j < f(x_k)$ para todo $k \leq n\}$.
- Caso $x_{n+1} > x_k$ para todo $k \leq n$. Defina $f(x_{n+1}) = q_i$, onde $i = \min\{j \in \omega : q_j > f(x_k)$ para todo $k \leq n\}$.
- Caso existam $e, d \leq n$ tais que $x_e \leq x_{n+1} \leq x_d$. Defina $E = \max\{f(x_k) : x_k \leq x_{n+1},\ k \leq n\}$ e $D = \min\{f(x_k) : x_k \geq x_{n+1},\ k \leq n\}$. Defina $f(x_{n+1}) = q_i$, onde $i = \min\{j \in \omega : E < q_j < D\}$.

Note que, por construção, f é injetora e preserva ordem. Resta provar que ela é sobrejetora. Suponha que não e seja q_n que não pertença a imagem de f. Sem perda de generalidade, podemos supor n o menor possível com tal propriedade. Seja a o menor índice tal que, para todo $m < n$, existe $b < a$ tal que $f(x_b) = q_m$. Temos 3 casos:

- Se $q_n < q_m$ para todo $m < n$. Seja $k \geq a$ o menor tal que $x_k < x_p$ para todo $p < k$. Note que, então $f(x_k) = q_n$, contradição.

- Se $q_n > q_m$ para todo $m < n$. Este caso é análogo ao anterior.

- Se existem $e, d < n$ tais que $q_e < q_n < q_d$. Seja $k \geq a$ o menor tal que existam $E, D < k$ tais que $x_E < x_k < x_D$. Note que, então $f(x_k) = q_n$ e, novamente, temos uma contradição.

□

Teorema 6.1.3. *Todo espaço separável, totalmente ordenado por uma ordem densa e completa, sem maior nem menor elementos é homeomorfo a* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja X como no enunciado. Seja D denso enumerável. Note que D satisfaz as hipóteses do resultado anterior (ver Exercício 6.1.9). Fixe $f : D \longrightarrow \mathbb{Q}$ isomorfismo de ordem. Defina $\tilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\tilde{f}(x) = \sup\{f(d) : d \in D,\ d < x\}$$

Note que $\tilde{f}$ é um isomorfismo de ordem (ver Exercício 6.1.10) e, portanto, X e $\mathbb{R}$ são homeomorfos. □

Definição 6.1.4. Dizemos que um espaço topológico é **c.c.c.** se não não existe uma família não enumerável de abertos dois a dois disjutos

Basicamente, estamos dizendo que $\tau \smallsetminus \{\emptyset\}$ é c.c.c com a ordem da inclusão.

Note que todo espaço separável é c.c.c.

Definição 6.1.5. Chamamos de **hipótese de Suslin** a afirmação: todo espaço c.c.c., totalmente ordenado por uma ordem densa e completa, sem maior nem menor elementos é homeomorfo a $\mathbb{R}$.

A hipótese de Suslin é mais uma afirmação independente de ZFC.

Ou seja, a hipótese de Suslin é equivalente a não existência de uma reta de Suslin.

Definição 6.1.6. Chamamos de uma **reta de Suslin** um espaço c.c.c., totalmente ordenado por uma ordem densa e completa sem maior nem menor elemento e que não seja homeomorfo a $\mathbb{R}$ (ou, equivalentemente, que não seja separável).

Proposição 6.1.7. *Se X é uma reta de Suslin, então X^2 não é c.c.c.*

Demonstração. Sejam $a_0, b_0, c_0 \in X$ tais que $a_0 < b_0 < c_0$. Suponha definidos $(a_\xi)_{\xi<\kappa}, (b_\xi)_{\xi<\kappa}$ e $(c_\xi)_{\xi<\kappa}$ para $\kappa < \omega_1$. Vamos definir a_κ, b_κ e c_κ. Como X não é separável, $\{b_\xi : \xi < \kappa\}$ não é denso. Logo, existem a_κ e c_κ tais que

$$]a_\kappa, c_\kappa[\cap\{b_\xi : \xi < \kappa\} = \emptyset.$$

Seja $b_\kappa \in]a_\kappa, c_\kappa[$ (que existe já que a ordem é densa). Considere $V_\xi =]a_\xi, b_\xi[\times]b_\xi, c_\xi[$ para cada $\xi < \omega_1$. Note que, se $\xi \neq \eta$, temos que $V_\xi \cap V_\eta = \emptyset$ e, portanto, X^2 não é c.c.c. □

Veremos adiante que o produto de espaços c.c.c. também nos dá afirmações independentes.

Martin e Baire

Vamos aqui apresentar um resultado simples envolvendo o axioma de Martin e espaços c.c.c.:

Proposição 6.1.8. *(MA) Seja (X, τ) espaço topológico compacto e c.c.c. Se $(A_\xi)_{\xi<\kappa}$ é uma família de abertos densos com $\kappa < 2^{\aleph_0}$, então $\bigcap_{\xi<\kappa} A_\xi$ é denso em X.*

Na verdade, esse enunciado é equivalente ao axioma de Martin. Uma maneira de se mostrar a volta é, a partir de uma ordem parcial construir um espaço de ultrafiltros.

Demonstração. Seja V aberto não vazio em X. Note que $\overline{V}$ é c.c.c. (ver o Exercício 6.1.11). Vamos mostrar que $V \cap \bigcap_{\xi<\kappa} A_\xi \neq \emptyset$. Considere

$$\mathbb{P} = \{A \cap \overline{V} : A \in \tau,\ A \neq \emptyset\}$$

com a ordem dada por $A \leq B$ se $\overline{A} \subset B$. Para cada $\xi < \kappa$, note que

$$D_\xi = \{B \in \mathbb{P} : \overline{B} \subset A_\xi\}$$

é denso em $\mathbb{P}$ (ver o Exercício 6.1.12). Note que, como $\mathbb{P}$ é c.c.c. (Exercício 6.1.13), pelo axioma Axioma de Martin, existe $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ filtro $(D_\xi)_{\xi<\kappa}$-genérico. Considere $\mathcal{F}' = \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$. Note que, como $\mathcal{F}$ é centrada, $\mathcal{F}'$ também é centrada. Logo, $\bigcap \mathcal{F}'$ é não vazio (família centrada de compactos). Seja $x \in \bigcap \mathcal{F}'$. Dado $\xi < \kappa$, seja $F_\xi \in \mathcal{F} \cap D_\xi$. Então $\overline{F}_\xi \subset A_\xi$ e $\overline{F}_\xi \subset V$ (pois $F_\xi \in \mathbb{P}$). Assim, $x \in A_\xi \cap V$ para qualquer $\xi < \kappa$. □

Exercícios

Exercício 6.1.9. Mostre que D na demonstração de 6.1.3 tem as propriedades desejadas.

Exercício 6.1.10. Mostre que $\tilde{f}$ definida em 6.1.3 é um isomorfismo de ordem.

Exercício 6.1.11. Mostre que se X é c.c.c. e V é um aberto de X, então $\overline{V}$ é c.c.c.

Exercício 6.1.12. Mostre que D_ξ definido em 6.1.8 é denso.

Exercício 6.1.13. Mostre que $I\!\!P$ definido em 6.1.8 é c.c.c.

6.2 Produto de espaços c.c.c.

Definição 6.2.1. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos forma um **Δ-sistema** de raiz Δ se, para todo $F, G \in \mathcal{F}$ distintos, temos que $F \cap G = \Delta$.

Sim, uma família disjunta é um Δ-sistema de raiz $\emptyset$.

Proposição 6.2.2 (Lema do Δ-sistema). *Seja $\mathcal{F}$ uma família não enumerável de conjuntos finitos. Então existe $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ não enumerável que forma um Δ-sistema.*

Demonstração. Note que, sem perda de generalidade, podemos supor que existe $n \in \omega$ tal que $|F| = n$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Vamos provar o resultado por indução sobre n. Se $n = 1$, note que $F \cap G = \emptyset$ se $\xi \neq \eta$ e, portanto, temos o resultado. Agora suponha o resultado para n e vamos provar para $n + 1$. Vamos considerar dois casos:

- Existe a tal que $\mathcal{F}_a = \{F \in \mathcal{F} : a \in F\}$ é não enumerável. Então, por hipótese de indução, $\mathcal{F}'_a = \{F \setminus \{a\} : F \in \mathcal{F}_a\}$ contém um Δ-sistema não enumerável $\mathcal{G}$ de raiz Δ. Logo, $\mathcal{F}' = \{G \cup \{a\} : G \in \mathcal{G}\}$ forma um Δ-sistema de raiz $\Delta \cup \{a\}$.

- Não existe a tal que $\{F \in \mathcal{F} : a \in \mathcal{F}\}$ seja não enumerável. Sem perda de generalidade, escreva $\mathcal{F} = \{F_\xi : \xi < \omega_1\}$ (talvez seja necessário jogar alguns elementos fora). Dado $a \in F_0$, note que existe $\xi < \omega_1$ tal que $a \notin F_\eta$ para todo $\eta \geq \xi$. Repetindo esse processo, como F_0 é finito, existe $\xi_0 < \omega_1$ tal que $F_0 \cap F_\eta = \emptyset$ para todo $\eta \geq \xi_0$. Com argumento análogo, existe ξ_1 tal que $F_{\xi_1} \cap F_\eta = \emptyset$ para todo $\eta \geq \xi_1$. De forma geral, se $\alpha < \omega_1$ é limite e já temos definidos ξ_β para todo $\beta < \alpha$, definimos $\xi_\alpha = \sup\{\xi_\beta : \beta < \alpha\} < \omega_1$. Se $\alpha + 1 < \omega_1$, basta definir $\xi_{\alpha+1}$ de maneira análoga ao que fizemos antes. Desta maneira $\{F_{\xi_\alpha} : \alpha < \omega_1\}$ é um Δ-sistema de raiz $\emptyset$.

$\square$

Proposição 6.2.3. *Seja $(X_\xi)_{\xi<\kappa}$ família de espaços c.c.c. tais que, para todo $F \subset \kappa$ finito, temos que $\prod_{\xi\in F} X_\xi$ é c.c.c. Então $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$ é c.c.c.*

Demonstração. Suponha que não. Seja $(A_\xi)_{\xi<\omega_1}$ uma família de abertos dois a dois disjuntos em $\prod_{\xi<\kappa} X_\xi$. Podemos supor cada A_ξ um aberto básico do produto. Para cada $\xi < \kappa$, seja a_ξ o suporte de A_ξ. . Vamos mostrar o caso em que $(a_\xi)_{\xi<\omega_1}$ são todos distintos, o caso em que isso não ocorre é análogo (ver Exercício 6.2.8). Como cada a_ξ é finito, podemos supor que $(a_\xi)_{\xi<\omega_1}$ forma um Δ-sistema de raiz Δ. Seja $\pi : \prod_{\xi<\kappa} X_\xi \longrightarrow \prod_{\xi\in\Delta} X_\xi$ a projeção usual. Note que, como $A_\xi \cap A_\eta = \emptyset$ para $\xi \neq \eta$, temos que $\pi(A_\xi) \cap \pi(A_\eta) = \emptyset$. Ou seja, temos que $(\pi(A_\xi))_{\xi<\omega_1}$ é uma família de abertos dois a dois disjuntos em $\prod_{\xi\in\Delta} X_\xi$, contrariando o fato que $\prod_{\xi\in\Delta} X_\xi$ é c.c.c. já que Δ é finito. □

Se $V = \prod_{\xi<\kappa} V_\xi$ é um aberto do produto, chamamos de **suporte** de V o conjunto $\{\xi < \kappa : V_\xi \neq X_\xi\}$.

Martin e o produto de espaços c.c.c.

Proposição 6.2.4. *($MA+\neg CH$) Seja X espaço c.c.c. e seja $(U_\xi)_{\xi<\omega_1}$ uma família de abertos não vazios. Então $(U_\xi)_{\xi<\omega_1}$ contém uma família centrada não enumerável.*

Demonstração. Para cada $\xi < \omega_1$, defina

$$V_\xi = \bigcup_{\eta>\xi} U_\xi$$

Note que, assim, $V_\xi \supset V_\eta$ se $\xi < \eta$. Vamos mostrar que existe $\alpha < \omega_1$ tal que $\overline{V}_\xi = \overline{V}_\alpha$ para todo $\xi > \alpha$. Suponha que não. Então podemos construir uma sequência $(\alpha_\xi)_{\xi<\omega_1}$ tal que

$$\overline{V_{\alpha_\xi}} \supsetneq \overline{V_{\alpha_\eta}}$$

se $\xi < \eta$. Mas então $(V_{\alpha_{\xi+1}} \smallsetminus \overline{V_{\alpha_\xi}})_{\xi<\omega_1}$ é uma família de abertos não vazios dois a dois disjuntos, contrariando o fato que X é c.c.c.

Seja $\alpha < \omega_1$ como acima. Considere

$$\mathbb{P} = \{A \subset V_\alpha : A \text{ é aberto não vazio}\}$$

Note que $\mathbb{P}$ com a ordem da inclusão é c.c.c. Para cada $\beta < \omega_1$, considere

$$D_\beta = \{A \in \mathbb{P} : \exists \gamma \geq \beta \ A \subset U_\gamma\}$$

Vamos mostrar que D_β é denso em $\mathbb{P}$. Seja $A \in \mathbb{P}$. Temos então que $A \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} = \overline{V_\xi}$, onde $\xi > \alpha, \beta$. Assim, $A \cap V_\xi \neq \emptyset$ e, portanto,

$A \cap U_\gamma \neq \emptyset$ para algum $\gamma > \xi$. Seja G filtro $(D_\beta)_{\beta<\omega_1}$-genérico. Note que, então

$$I = \{\xi < \omega_1 : \exists A \in G \ A \subset U_\xi\}$$

é ilimitado em ω_1. Logo, $(U_\xi)_{\xi \in I}$ é uma família centrada e não enumerável. $\square$

Proposição 6.2.5. *$(MA + \neg CH)$ Produto de espaços c.c.c. é c.c.c.*

Demonstração. Basta mostrarmos que, se X e Y são c.c.c., então $X \times Y$ é c.c.c. Seja $(U_\xi \times V_\xi)_{\xi<\omega_1}$ família de abertos básicos não vazios em $X \times Y$. Pelo resultado anterior, podemos supor $(U_\xi)_{\xi<\omega_1}$ centrada. Assim, se $(U_\xi \times V_\xi) \cap (U_\eta \times V_\eta) = \emptyset$, $V_\xi \cap V_\eta = \emptyset$. Logo, como Y é c.c.c., temos que $(U_\xi \times V_\xi)_{\xi<\omega_1}$ não são dois a dois disjuntos. $\square$

Corolário 6.2.6. *Se vale $MA + \neg CH$, vale a hipótese de Suslin.*

Exercícios

Exercício 6.2.7. Mostre que não vale o análogo do Lema do Δ-sistema para o caso em que $\mathcal{F}$ é enumerável e cada $F \in \mathcal{F}$ é finito e nem para o caso em que $\mathcal{F}$ é não enumerável e cada $F \in \mathcal{F}$ é enumerável.

Exercício 6.2.8. Mostre que se uma quantidade não enumerável de abertos na demonstração de 6.2.3 tem o mesmo suporte, também temos o resultado.

Capítulo 7

Forcing

7.1 Álgebra de Boole

Definição 7.1.1. Chamamos de um **álgebra de Boole** um conjunto A, munido de duas operações binárias $+$ e $\cdot$ e uma unária $-$ com dois elementos denotados por $0, 1 \in A$ tais que, para todo $a, b, c \in A$:

Normalmente denotamos por ab em vez de $a \cdot b$.

- $a \cdot b = b \cdot a$ e $a + b = b + a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ e $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- $a \cdot (a + b) = a + (a \cdot b) = a$
- $a \cdot (-a) = 0$ e $a + (-a) = 1$

Exemplo 7.1.2. Seja X um conjunto. Então $\wp(X)$ com as operações de $\cup$ e $\cap$ forma uma álgebra de Boole.

Algumas propriedade básicas (e de fácil demonstração) são:

Proposição 7.1.3. *Seja A uma álgebra de Boole. Então, para todo $a, b \in A$, temos:*

- $a + a = aa = a$
- $a0 = 0$ *e* $a + 1 = 1$
- $a1 = a$ *e* $a + 0 = a$
- $-0 = 1$ *e* $-1 = 0$

Definição 7.1.4. Seja A uma álgebra de Boole. Para $a, b \in A$, definimos $a \leq b$ se $ab = a$. Essa é a ordem usual numa álgebra de Boole (ver Exercício 7.1.7).

Definição 7.1.5. Dizemos que uma álgebra de Boole é **completa** se todo $X \subset A$ admite supremo.

Exercícios

Exercício 7.1.6. Mostre que existe uma única álgebra de Boole com dois elementos.

Exercício 7.1.7. Mostre que $\leq$ definida acima é de fato uma ordem.

Exercício 7.1.8. Seja A uma álgebra de Boole. Mostre que, dados $a, a', b, b' \in A$, se $a \leq b$ e $a' \leq b'$, então $aa' \leq bb'$.

Exercício 7.1.9. Mostre que para todo $a \in A$, $0 \leq a \leq 1$.

Exercício 7.1.10. Mostre que $a \leq b$ se, e somente se, $a + b = b$.

Exercício 7.1.11. Seja A uma álgebra de Boole. Sejam $a, b \in A$. Denotamos por $a - b = a \cdot (-b)$. Mostre que $a \not\leq b$ se, e somente se, $a - b \neq 0$.

7.2 Dando valores às fórmulas

Nesta seção, trabalharemos sempre com uma álgebra de Boole completa A fixada. Também vamos usar a notação $a \Rightarrow b$ para $-a + b$. Vamos usar diversas vezes a seguinte equivalência, para quaisquer $a, b \in A$:

$$a \leq b \text{ se, e somente, } a \Rightarrow b = 1$$

Atenção, isso é uma definição recursiva.

Definição 7.2.1. Vamos chamar um conjunto τ de um **nome** se τ é uma função tal que todo elemento de seu domínio é um nome e todo elemento da imagem é um elemento de A.

Exemplo 7.2.2. $\emptyset$ é um nome. Assim, $\{(\emptyset, a), (\emptyset, b)\}$ também é um nome se $a, b \in A$.

A ideia aqui é que dado um par $(\sigma, a) \in \tau$, a "mede" quanto é a chance σ pertencer a τ. Agora, vamos usar essa ideia para atribuir valores booleanos para todas as fórmulas. Para isso, vamos sempre substituir as variáveis por nomes. Começamos com as fórmulas mais simples:

Uma fórmula assim é chamada de **atômica**

Definição 7.2.3. Dados dois nomes σ, τ, definimos

$$[\![\sigma \in \tau]\!] = \sup_{t \in \mathrm{dom}(\tau)} [\![\sigma = t]\!]\tau(t)$$

$$[\![\sigma \subset \tau]\!] = \inf_{t \in dom(\sigma)} (\sigma(t) \to [\![t \in \tau]\!]$$

$$[\![\sigma = \tau]\!] = [\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau \subset \sigma]\!]$$

Formalmente, essa definição é recursiva. Assim podemos usar o $rank$ como definimos anteriormente para ajudar a trabalhar com ela. Por exemplo, a primeira parte diz que podemos definir $[\![\sigma \in \tau]\!]$ se já sabemos a definição de $[\![\sigma = t]\!]$ onde $rank(t) < rank(\sigma)$. Vamos mostrar o seguinte resultado, que usa bem essa ideia:

Proposição 7.2.4. *Seja σ nome qualquer. Então $[\![\sigma = \sigma]\!] = 1$.*

A ideia disso é que a chance de $\sigma = \sigma$ é 1, ou seja, a máxima possível.

Demonstração. Vamos provar isso por indução sobre o $rank(\sigma)$. Por definição, temos que mostrar que $[\![\sigma \subset \sigma]\!] = 1$. Para isso, temos que mostrar que $\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \sigma]\!] = 1$ para todo $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Ou seja, precisamos mostrar que $\sigma(t) \leq [\![t \in \sigma]\!]$ para todo $t \in \mathrm{dom}(t)$. Seja $t \in \mathrm{dom}(t)$. Temos:

$$[\![t \in \sigma]\!] = \sup_{s \in \mathrm{dom}(\sigma)} [\![s = t]\!]\sigma(t)$$

Assim, por hipótese de indução, $[\![t = t]\!] = 1$ e, portanto, o supremo da expessão acima é maior ou igual a $[\![t = t]\!]\sigma(t) = \sigma(t)$. □

Proposição 7.2.5. *Dados σ, τ e ρ nomes, temos:*

(a) $[\![\sigma = \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma = \rho]\!]$

(b) $[\![\sigma \in \tau]\!][\![\sigma = \rho]\!] \leq [\![\rho \in \tau]\!]$

(c) $[\![\sigma \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma \in \rho]\!]$

Demonstração. Isso precisa ser provado por indução sobre o $rank$ de σ, τ e ρ. E fazemos isso supondo as 3 condições ao mesmo tempo para nomes de $rank$ menor. Vamos apresentar a demonstração da condição (a), deixando as outras como exercício:

Note que é suficiente provarmos que

$$[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma \subset \rho]\!]$$

Assim, pela definição de $[\![\subset]\!]$, temos:

$$\begin{aligned}
[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] &= (\inf_{t\in\mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \tau]\!])[\![\tau = \rho]\!] \\
&= (\inf_{t\in\mathrm{dom}(\sigma)} -\sigma(t) + [\![t \in \tau]\!])[\![\tau = \rho]\!] \\
&= \inf_{t\in\mathrm{dom}(\sigma)}([\![\tau = \rho]\!] - \sigma(t)) + [\![t \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!]
\end{aligned}$$

Note que, para qualquer $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$,

$$[\![\tau = \rho]\!] - \sigma(t) \leq -\sigma(t)$$

e que, por hipótese de indução,

$$[\![t \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![t \in \rho]\!]$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] &\leq \inf_{t\in\mathrm{dom}(\sigma)}(-\sigma(t) + [\![t \in \rho]\!]) \\
&= \inf_{t\in\mathrm{dom}(\sigma)}(\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \rho]\!]) \\
&= [\![\sigma \subset \rho]\!]
\end{aligned}$$

□

Lema 7.2.6. *Sejam x, y nomes. Se $y \in dom(x)$, então $x(y) \leq [\![y \in x]\!]$.*

Demonstração. Suponha $y \in \mathrm{dom}(x)$. Então

$$[\![y \in x]\!] = \sup_{t\in dom(x)} [\![y = t]\!]x(t) \geq [\![y = y]\!]x(y) = x(y)$$

□

Definição 7.2.7. Dada uma fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$, onde x_i's indicam suas variáveis livres e dados $\tau_1, ..., \tau_n$ nomes, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$ por recursão sobre a complexidade de φ da seguinte maneira:

- Se $\varphi(x_1, x_2)$ é da forma "$x_1 \in x_2$" ou "$x_1 = x_2$", fazemos como anteriormente.
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\neg\psi(x_1, ..., x_n)$, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = -[\![\psi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\psi(x_1, ..., x_n) \wedge \psi'(x_1, ..., x_n)$, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!][\![\psi'(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\psi(x_1, ..., x_n) \vee \psi'(x_1, ..., x_n)$, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!] + [\![\psi'(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$

- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\exists y\ \psi(y, x_1, ..., x_n)$, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = \sup_\sigma [\![\psi(\sigma, x_1, ..., x_n)]\!]$, onde $\sup_\sigma$ indica o supremo com relação a todos os σ nomes.

- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\forall y\ \psi(y, x_1, ..., x_n)$, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = \inf_\sigma [\![\psi(\sigma, x_1, ..., x_n)]\!]$, onde $\inf_\sigma$ indica o ínfimo com relação a todos os σ nomes.

Lema 7.2.8. *Sejam φ, ψ fórmulas. Note que $[\![\varphi \to \psi]\!] = 1$ se, e somente se, $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$.*

Demonstração. Note que $[\![\varphi \to \psi]\!] = -[\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!]$. Note que $-a + b = 1$ se, e somente se, $a \leq b$ para qualquer a, b na álgebra de Boole. □

Proposição 7.2.9. *Considere φ o axioma da extensionalidade. Isto é,*

$$\forall x\ \forall y\ x = y \leftrightarrow (\forall z\ (z \in x \to z \in y) \land (z \in y \to z \in x))$$

Então $[\![\varphi]\!] = 1$.

Demonstração. Note que, para isso, só precisamos mostrar que, dados x, y nomes, temos que $[\![x = y]\!] = [\![x \subset y]\!][\![y \subset x]\!]$. Mas isso segue diretamente das definições. □

Proposição 7.2.10. *Considere φ o axioma do par. Isto é*

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ x \in z \land y \in z$$

Então $[\![\varphi]\!] = 1$.

Demonstração. Fixe x, y nomes. Considere o nome $z : \{x, y\} \longrightarrow A$ tal que $z(x) = 1$ e $z(y) = 1$. Basta mostrar que $[\![x \in z]\!][\![y \in z]\!] = 1$. Temos

$$\begin{array}{rcl} [\![x \in z]\!] & = & \sup_{t \in \mathrm{dom}(z)} [\![x = t]\!] z(t) \\ & = & \geq [\![x = x]\!] z(x) \\ & = & 1 \end{array}$$

Note que $[\![y \in z]\!] = 1$ é análogo. □

De maneira parecida podemos provar que todos os axiomas de ZFC tem valor 1.

Aumentando o universo

A ideia da próxima definição é a de levar "cópias" de conjuntos usuais para essa extensão de uma maneira canônica:

Definição 7.2.11. Seja x um conjunto. Definimos o nome $\check{x}$ de maneira recursiva da seguinte maneira: $\check{x} = \{(\check{y}, 1) : y \in x\}$.

Note que $\check{\emptyset} = \emptyset$.

Proposição 7.2.12. *Sejam x, y conjuntos. Então*

(a) se $x \in y$ então $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 1$.

(b) se $x \notin y$ então $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 0$.

(c) se $x \subset y$ então $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = 1$.

(d) se $x \not\subset y$ então $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = 0$.

Demonstração. Vamos mostrar todas as condições por indução sobre o *rank* de x e y ao mesmo tempo:

(a) Suponha $x \in y$. Então

$$\begin{array}{rcl} [\![\check{x} \in \check{y}]\!] & = & \sup_{t \in \mathrm{dom}(y)} [\![t = \check{x}]\!]\check{y}(t) \\ & \geq & [\![\check{x} = \check{x}]\!]\check{y}(\check{x}) \\ & = & 1 \end{array}$$

(b) Suponha $x \notin y$. Por hipótese de indução, para todo $t \in y$, temos que $[\![\check{x} = \check{t}]\!] = 0$ (pois $x \neq t$). Assim, $[\![x \in y]\!] = 0$.

(c) Suponha $x \subset y$. Seja $t \in dom(x)$. Então $x(t) = 1$. Além disso, por hipótese de indução, $[\![t \in y]\!] = 1$ já que $t \in y$. Logo,

$$[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \inf_{t \in \mathrm{dom}(x)} \check{x}(t)[\![t \in y]\!] = 1$$

(d) Suponha $x \not\subset y$. Então existe $t \in x$ tal que $t \notin y$. Logo, por hipótese de indução, $[\![t \in \check{y}]\!] = 0$. Assim

$$[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \inf_{s \in \mathrm{dom}(x)} \check{x}(s)[\![s \in y]\!] \leq \check{x}(t)[\![t \in y]\!] = 0$$

$\square$

Proposição 7.2.13. *Sejam x um conjunto e τ um nome. Se $[\![\tau \in x]\!] \neq 0$, então existe $y \in x$ tal que $[\![\tau \in x]\!] \leq [\![\check{y} = \tau]\!]$.*

Mas nem todos os elementos nesta extensão são da forma $\check{x}$ para algum x:

Definição 7.2.14. Chamamos de $\dot{G}$ o nome $\dot{G} : \{\check{a} : a \in A\} \longrightarrow A$ dado por $\dot{G}(\check{a}) = a$.

Lema 7.2.15. *Seja $a \in A$. Então $[\![\check{a} \in \dot{G}]\!] = a$.*

Demonstração. Note que, dado $\check{t} \in \mathrm{dom}(\dot{G})$, temos $[\![\check{a} = \check{t}]\!] = 1$ se $a = t$ ou $[\![\check{a} = \check{t}]\!] = 0$ se $t \neq a$. Assim

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!] = \sup_{\check{t} \in \mathrm{dom}(\dot{G}} [\![\check{t} = a]\!]\dot{G}(\check{a}) = \dot{G}(\check{a}) = a$$

□

Em particular, $[\![1 \in \dot{G}(\check{1})]\!] = 1$ e $[\![0 \in \dot{G}(\check{0})]\!] = 0$.

Proposição 7.2.16. $[\![\dot{G}$ *é filtro sobre* $\check{A}]\!] = 1$.

Demonstração. Note que $[\![\check{1} \in \dot{G}]\!] = 1$. Sejam $a, b \in A$. Vamos mostrar que

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \dot{G}]\!] \leq [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq \check{a}, \check{b}]\!]$$

$$\begin{array}{rcl} [\![\check{a} \in G]\!][\![\check{b} \in G]\!] & = & ab \\ & = & [\![\check{ab} \in \dot{G}]\!] \\ & = & [\![\check{ab} \in \dot{G}]\!][\![\check{ab} \leq \check{a}, \check{b}]\!] \\ & = & [\![\exists \tau\ \tau \in \dot{G} \wedge \tau \leq \check{a}, \check{b}]\!] \end{array}$$

Ou seja, provamos que

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \dot{G}]\!] \Rightarrow [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq \check{a}, \check{b}]\!] = 1$$

Tomando-se os ínfimos para a e b, obtemos

$$[\![\forall a \in \dot{G} \forall b \in \dot{G}]\!] \Rightarrow [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq a, b]\!] = 1$$

A terceira condição sobre filtros é análoga. □

Proposição 7.2.17. *Se D é denso em A, então $[\![\dot{G} \cap \check{F} \neq \emptyset]\!] = 1$.*

Demonstração. Vamos provar que

$$a = [\![\exists \sigma x\ x \in \check{D} \wedge x \in \dot{G}]\!] = 1$$

Suponha que não. Então $1 - a > 0$. Seja $b \in D$ tal que $b \leq 1 - a$. Note que

$$b \leq [\![\check{b} \in \dot{G}]\!] = [\![\check{b} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \dot{D}]\!]$$

Assim, $b \leq a$, contrariando o fato que $b \leq 1 - a$. □

7.3 A consistência de $\neg CH$

Proposição 7.3.1. *Para toda fórmula $\varphi(y, x_1, ..., x_n)$ e todo $\tau_1, ..., \tau_n$ nomes, existe σ nome tal que*

$$[\![\varphi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)]\!] = [\![\exists y\ \varphi(y, \tau_1, ..., \tau_n)]\!]$$

Proposição 7.3.2. *Dada uma ordem "não trivial" $\mathbb{P}$, existe A uma álgebra de Boole completa e existe $f : \mathbb{P} \longrightarrow A$ homomorfismo de ordem injetor tal que, para todo $D \subset \mathbb{P}$ denso, $f[D]$ é denso em A.*

Considere $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$. Pela proposição acima, podemos considerar A uma álgebra de Boole que contém tal ordem (de maneira densa). No decorrer desta seção, vamos sempre considerar tal álgebra A.

Proposição 7.3.3. $[\![\exists x\ x = \bigcup \dot{G}]\!] = 1$.

Demonstração. Note que isso é consequência dos axiomas de ZFC terem valor 1. □

Assim, existe $\dot{f}$ nome para a união do resultado anterior.

Proposição 7.3.4. $[\![\dot{f}$ *é função de* $\check{\omega}_2 \times \check{\omega}$ *em* $\check{2}]\!] = 1$.

Demonstração. Segue do fato disso ser consequência de ZFC e do fato de $[\![\dot{G}\ \check{D} \cap G \neq \emptyset]\!] = 1$ para todo D denso em A. □

Proposição 7.3.5. *Para cada $\xi < \omega_2$, considere $\dot{f}_\xi$ nome tal que $[\![\forall \alpha \in \check{\omega}\ \dot{f}_{\check{\xi}}(\alpha) = \dot{f}(\check{\xi}, \alpha)]\!] = 1$. Então, dados $\xi \neq \eta < \omega_2$, temos que $[\![\dot{f}_\xi \neq \dot{f}_\eta]\!]$.*

Demonstração. Isso segue do fato que, para cada $\xi, \eta < \omega_2$,

$$D_{\xi,\eta} = \{p \in Fn(\omega_2 \times \omega, 2) : \exists n \in \omega\ (\alpha, n) \in \text{dom}(p) \wedge p(\xi, n) \neq p(\eta, n)\}$$

ser denso em A. □

Como consequência do último resultado, temos:

Proposição 7.3.6. $[\![2^{\dot{\omega}} \geq \check{\omega}_2]\!] = 1$.

Ou seja, "quase" temos a negação da hipótese do contínuo. A questão é que temos $2^{\dot{\omega}} \geq \check{\omega}_2$ e deveríamos ter $2^{\dot{\omega}} \geq \dot{\omega}_2$, onde $\dot{\omega}_2$ é um nome que satisfaz a definição de ω_2. Mas obtemos tal resultado a partir do seguinte:

Proposição 7.3.7. *Se A é c.c.c., então para todo ω_α, temos que $[\![\check{\omega}_\alpha = \dot{\omega}_\alpha]\!] = 1$.*

E, de fato, temos que A com a qual estamos trabalhando é c.c.c. (pois $Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$ é c.c.c).

Com isso, temos que $[\![\neg CH]\!] = 1$ e, portanto, $\neg CH$ é consistente. De fato, suponha que CH fosse consequência de ZFC. Então, como os axiomas de ZFC tem valor 1, teríamos que CH também tem valor 1 e, portanto, $[\![\neg CH]\!] = 0$, contradição.

Linguagem de Forcing

É comum trabalharmos com forcing pensando numa "extensão" para todos os conjuntos, no sentido que acrescentamos um novo conjunto que não era uma consequência de ZFC e daí acrescentamos tudo o que precisamos para continuar valendo ZFC. Por exemplo, se x é um conjunto e G é o tal conjunto novo, precisamos que o conjunto $x \cup G$ também exista.

A ideia é que pensamos que G (o dado pelo nome $\dot{G}$) existe, apesar de não ser dado pelos axiomas de ZFC. Daí, os outros conjuntos são formados da seguinte maneira: se x é um nome, então

$$x_G = \{y_G : (y, a) \in x \wedge a \in G\}$$

Novamente, isso é uma definição por recursão. Note que aplicar isso a $\dot{G}$ nos dá de volta G. Chamamos a coleção de todos esses "novos" conjuntos de $V[G]$. Note que, se temos um conjunto x, $x_G = x$. E, portanto, $V \subset V[G]$.

Pode-se mostrar que uma fórmula φ vale em $V[G]$ se, e somente se, $[\![\varphi]\!] \in G$.

Considere a seguinte notação, para $a \in A$ e φ fórmula:

$$a \Vdash \varphi \text{ se, e somente se, } a \leq [\![\varphi]\!]$$

Como G é filtro, temos que, se $a \in G$, então $[\![\varphi]\!] \in G$ e, portanto, vale φ em $V[G]$. Por outro lado, se vale φ em $V[G]$, temos que $[\![\varphi]\!] \in G$. Se $a \notin G$, então $-a \in G$ (pois pode-se mostrar que G é um ultrafiltro). Assim, como $a \leq [\![\varphi]\!]$, temos que $-a \cdot [\![\varphi]\!] = 0$, contrariando o fato de ambos estarem no filtro.

Desta forma, lê-se $a \Vdash \varphi$ como "a força φ". Alguns resultados são imediatos e os listamos como exemplos:

Proposição 7.3.8. *Sejam $a, b \in A$ e φ, ψ fórmulas. Temos:*

(a) se $a \Vdash \varphi$ e $b \leq a$, então $b \Vdash \varphi$

(b) se $a \Vdash \varphi$ *e* $a \Vdash \psi$*, então* $a \Vdash \varphi \wedge \psi$*.*

(c) se $\{a \in A : a \Vdash \varphi\}$ *é denso, então vale* φ *em* $V[G]$*.*

Dicas de alguns exercícios

1.1.15 Verifique os axiomas na ordem em que eles foram listados aqui.

2.4.20 Corolário do König.

2.4.21 Função normal.

Soluções de alguns exercícios

Referências Bibliográficas

[1] A. Blass. Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary Mathematics*, 31:31–33, 1984.

[2] K. Ciesielski. *Set theory for the working mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] T. J. Jech. *The Axiom of Choice*. 1973.

Notação

Índice Remissivo