Notas de Aula

Leandro F. Aurichi [1]

15 de novembro de 2022

[1]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Sumário

Capítulo 1

Modelos

1.1 (Muito) pouco sobre modelos

Começamos com um pouquinho de terminologia. Fixado um conjunto A:

Essa seção e a próxima estão bem próximas de [**?**].

- R é uma **relação** n-ária sobre A se $R \subset A^n$;
- f é uma **função** n-ária sobre A se $f : A^n \to A$.

Vamos dividir os símbolos lógicos em quatro tipos:

- variáveis (enumeráveis);
- símbolo de igualdade ($=$);
- operadores, subdivididos em conectivos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$) e quantificadores ($\exists$, $\forall$);
- símbolos para "agrupamentos": vírgulas e parênteses.

Além dos símbolos lógicos, podemos usar os seguintes símbolos (símbolos não lógicos):

- relações;
- funções;
- constantes.

Apesar de ser comum não se colocar todos formalmente, deixando os restantes como abreviações.

Normalmente, os símbolos lógicos estão sempre presentes enquanto os símbolos não lógicos variam. A coleção de todos os símbolos a serem utilizados é chamada de **vocabulário** (ou **linguagem**).

Uma vez fixado um vocabulário L, podemos formar L-**expressões**. Estas são de dois tipos: L-termos e L-fórmulas.

Um L-**termo** é um elemento do menor conjunto T contendo todas as constantes e variáveis e tal que:

- se $t_1, ..., t_n$ são elementos de T e f é uma função n-ária de L, então $f(t_1, ..., t_n)$ também é um elemento de T.

Uma L-**fórmula** é um elemento do menor conjunto F contendo as expressões da seguinte forma, onde $t_1, ..., t_n$ são L-termos:

- $t_1 = t_2$;
- $R(t_1, ..., t_n)$, onde R é uma função n-ária de L;

A afirmação $R(t_1, ..., t_n)$ quer dizer que $\langle t_1, ..., t_n \rangle$ pertence a R.

e tal que, se φ e ψ são elementos de F, então:

- $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ também são elementos de F;
- $\exists x\ \varphi$ e $\forall x\ \varphi$ também são elementos de F se x é uma variável.

As fórmulas do primeiro tipo são chamadas de **atômicas**. Uma ocorrência de variável numa fórmula atômica é dita **livre**. Se v ocorre livre em φ, então tal ocorrência não é mais livre em $\forall v\ \varphi$ nem em $\exists v\ \varphi$ - nestes casos dizemos que as ocorrências estão **ligadas** ao quantificador. Uma L-**sentença** é uma L-fórmula sem ocorrências livres.

É comum se abusar da linguagem e dizer que uma variável é livre, e não sua ocorrência - note que, por exemplo, uma mesma variável pode numa fórmula ter uma ocorrência livre e uma outra ocorrência ligada. Usaremos tal abuso quando não causar ambiguidade.

Um L-**modelo** $\mathcal{M}$ é um par $\langle M, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$ onde M é um conjunto (chamado de **universo**) e $\cdot^{\mathcal{M}}$ é uma função cujo domínio é formado por todos os símbolos não lógicos de L de forma que:

- se R é um símbolo de relação n-ária de L, então $R^{\mathcal{M}} \subset M^n$;
- se f é um símbolo de função n-ária de L, então $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$;
- se c é um símbolo constante de L, então $c^{\mathcal{M}} \in M$.

Quando dizemos a “cardinalidade de $\mathcal{M}$”, estamos nos referindo à cardinalidade de M. Dado um símbolo σ, chamamos de σ^M a **interpretação** de M.

Uma **valoração** é uma função que atribui a cada variável de L um elemento de M.

Fixada uma valoração α, para cada termo t de L podemos atribuir um valor em M, denotado por $t^{\mathcal{M}}[\alpha]$, da seguinte forma:

A ideia aqui é $t^{\mathcal{M}}[\alpha]$ ser um valor em M, baseado em α e na forma de construção de t.

- se t é uma variável, $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = \alpha(t)$;
- se t é uma constante, $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{M}}$;
- se t é da forma $f(t_1, ..., t_n)$ (f símbolo de função n-ária), então $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])$.

Com tudo isso, agora podemos definir a satisfação de fórmulas. Dada uma L-fórmula φ, dizemos que φ é **satisfeita** por α em $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$) se

- φ é da forma $s = t$ e vale $s^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{M}}[\alpha]$;
- φ é da forma $R(t_1, ..., t_n)$ e vale $R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha], ..., t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])$;
- φ é da forma $\neg\psi$ e vale $\mathcal{M} \nvDash \psi^{\mathcal{M}}[\alpha]$;
- φ é da forma $\psi_1 \wedge \psi_2$ e valem $\mathcal{M} \vDash \psi_1^{\mathcal{M}}[\alpha$ e $\mathcal{M} \vDash \psi_2^{\mathcal{M}}[\alpha]$ (analogamente para os outros conectivos);
- φ é da forma $\exists x\, \psi$ e existe $a \in M$ tal que $\mathcal{M} \vDash \psi^{\mathcal{M}}[\alpha_a^x]$ (e analogamente para o outro quantificador),

α_a^x quer dizer a função que vale o mesmo que α para todo símbolo, com exceção de x, onde vale a.

No caso em que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$ para todo α, dizemos que $\mathcal{M}$ **satisfaz** φ e denotamos simplesmente por $\mathcal{M} \vDash \varphi$.

Se $x_1, ..., x_n$ são as únicas variáveis livres de φ, denotamos por $\mathcal{M} \vDash \varphi[a_1, ..., a_n]$ a afirmação $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$ onde α é a valoração que leva cada x_i em a_i.

É um exercício mostrar que a satisfação ou não de cada fórmula segundo uma valoração só depende das variáveis que ocorrem livres.

Terminamos essa seção com uma curiosidade: não é possível construir uma fórmula que expresse a satisfação de todas as fórmulas.

Proposição 1.1.1. *Considere $\mathcal{F}$ a coleção de todas as L-fórmulas cuja única variável livre é x. Seja g uma função que associa a cada elemento de $\mathcal{F}$ um elemento de M. Então não existe uma L-fórmula $\psi(x, y)$ que defina a satisfação das fórmulas de $\mathcal{F}$. Isto é, não existe $\psi(x, y)$ de forma que, para todo $\varphi(x)$ elemento de $\mathcal{F}$ e para todo $a \in M$*

$$\mathcal{M} \vDash \varphi[a] \textit{ se, e somente se, } \mathcal{M} \vDash \psi[g(\varphi), a].$$

Demonstração. Suponha que exista ψ como no enunciado. Considere a fórmula φ dada por $\neg\psi(x, x)$. Note que φ pertence a $\mathcal{F}$. Seja $a = g(\varphi)$. Pela propriedade de ψ, temos que $\mathcal{M} \vDash \varphi[a]$ se, e somente se $\mathcal{M} \vDash \psi[g(\varphi), a]$. Mas a primeira afirmação nada mais é que $\mathcal{M} \vDash \neg\psi[a, a]$. Lembrando que $a = g(\varphi)$, temos uma contradição. $\square$

Algo que torna o resultado anterior mais interessante é que parte da demonstração do teorema da incompletude de Gödel passa por mostrar algo parecido com existir uma g como no enunciado para a qual existe uma ψ - com a diferença que, em vez de satisfação de φ, se indica a existência de uma demonstração para φ.

1.2 Relações entre modelos

Definição 1.2.1. Dizemos que dois L-modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são **isomorfos** ($\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$) se existe uma bijeção $h : M \to N$ tal que

- para todo símbolo relacional R e $a_1, ..., a_n \in M$, temos

$$R^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n) \text{ se, e somente se, } R^{\mathcal{N}}(h(a_1), ..., h(a_n))$$

- para todo símbolo funcional f e $a_1, ..., a_n \in M$, temos

$$h(f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n)) = f^{\mathcal{N}}(h(a_1), ..., h(a_n))$$

- para toda constante c, temos

$$h(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$$

Dizemos que h é um homomorfismo se satisfaz a segunda e a terceira propriedades mais a ida da primeira.

Definição 1.2.2. Dizemos que dois modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são **equivalentes** ($\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$) se, para toda L-fórmula φ

$$\mathcal{M} \vDash \varphi \text{ se, e somente se, } \mathcal{N} \vDash \varphi$$

$h \circ \alpha$ é a composição natural destas duas funções.

Lema 1.2.3. *Seja $h : M \to N$ isomorfismo entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Então, dado t termo, φ fórmula e α valoração em $\mathcal{M}$, temos:*

(a) $h(t^{\mathcal{M}}[\alpha]) = t^{\mathcal{N}}[h \circ \alpha]$;

(b) $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$ *se, e somente se,* $\mathcal{N} \vDash \varphi[h \circ \alpha]$.

Demonstração. (a) Por indução sobre t. Se t é uma variável x, então

$$h(x^{\mathcal{M}}[\alpha]) = h(\alpha(x)) = x^{\mathcal{N}}[h \circ \alpha]$$

Se t é uma constante c, então

$$h(c^{\mathcal{M}}[\alpha]) = h(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{N}}[\alpha]$$

Finalmente, se t é da forma $f(t_1, ..., t_n)$ e vale a hipótese de indução sobre cada t_i, temos

$$\begin{aligned} h(f(t_1,...,t_n)^{\mathcal{M}}[\alpha]) &= h(f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha],...,t_n^{\mathcal{N}}[\alpha])) \\ &= f^{\mathcal{N}}(h(t_1^{\mathcal{M}}[\alpha]),...,h(t_n^{\mathcal{M}}[\alpha])) \\ &= f^{\mathcal{N}}(t_1^{\mathcal{N}}[h\circ\alpha],...,t_n^{\mathcal{N}}[h\circ\alpha]), \end{aligned}$$

(b) Vamos provar por indução sobre φ. Se φ é da forma $s = t$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash (s=t)[\alpha] &\Leftrightarrow s^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{M}}[\alpha] \\ &\Leftrightarrow h(s^{\mathcal{M}}[\alpha] = h(t^{\mathcal{M}}[\alpha]) \\ &\Leftrightarrow s^{\mathcal{N}}[h\circ\alpha] = t^{\mathcal{N}}[h\circ\alpha] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash (s=t)[h\circ\alpha] \end{aligned}$$

Para um símbolo relacional R é análogo. Para os conectivos, vamos mostrar o caso em que φ é da forma $\psi_1 \wedge \psi_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash (\psi_1 \wedge \psi_2)[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi_1[\alpha] \text{ e } \mathcal{M} \vDash \psi_2[\alpha] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi[h\circ\alpha] \text{ e } \mathcal{N} \vDash \psi_2[h\circ\alpha] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash (\psi_1 \wedge \psi_2)[h\circ\alpha] \end{aligned}$$

Finalmente, se φ é da forma $\exists x\ \psi$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash \exists x\ \psi[\alpha] &\Leftrightarrow \text{existe } a \in M\ \mathcal{M} \vDash \psi[\alpha_a^x] \\ &\Leftrightarrow \text{existe } a \in M\ \mathcal{N} \vDash \psi[h(\alpha_a^x)] \\ &\Leftrightarrow \text{existe } b \in N\ \mathcal{N} \vDash \psi[h\circ\alpha_b^x] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \exists x\ \psi[h\circ\alpha] \end{aligned}$$

□

Como corolário, obtemos:

Teorema 1.2.4. *Se* $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, *então* $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.

Em geral, a volta não vale - com exceção do seguinte caso:

Proposição 1.2.5. *Se* $\mathcal{M}$ *é finito e* $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, *então* $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

1.3 Submodelos elementares

Definição 1.3.1. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um **submodelo** de $\mathcal{N}$ ($\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$) se

- $M \subset N$;
- $R^{\mathcal{M}} = R^{\mathcal{N}} \cap M^n$ se R é uma relação n-ária;
- $f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{N}} \restriction M^n$ se f é uma função n-ária;
- $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$ se c é um símbolo constante.

Lema 1.3.2. *Sejam $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e α uma valoração em $\mathcal{M}$. Então*

(a) para todo termo t, $t^{\mathcal{M}}[\alpha] = t^{\mathcal{N}}[\alpha]$;

(b) se φ é uma fórmula sem quantificadores, $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$ se, e somente se, $\mathcal{N} \vDash \varphi[\alpha]$.

Demonstração. Exercício (por indução). □

Definição 1.3.3. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um **submodelo elementar** de $\mathcal{N}$ ($\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$) se $M \subset N$ e, para toda valoração α sobre $\mathcal{M}$, temos

$$\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \text{ se, e somente se, } \mathcal{N} \vDash \varphi[\alpha]$$

Teorema 1.3.4 (Critério de Tarski)**.** *Suponha que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ e que para toda fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ e todo $a_1, ..., a_{n-1} \in M$ temos*

$$\mathcal{N} \vDash \exists x_n\, \varphi[a_1, ..., a_{n-1}] \text{ implica que existe } a \in M \text{ tal que } \mathcal{N} \vDash \varphi[a_1, ..., a_{n-1}, a]$$

Então $\mathcal{M}$ é submodelo elementar de $\mathcal{N}$.

Demonstração. Proceda por indução sobre as fórmulas. A parte crítica é provar que se vale o resultado para φ, então vale para $\exists x_n\, \varphi$. Seja α uma valoração em $\mathcal{M}$. Suponha que $\mathcal{M} \vDash \exists x_n\, \varphi[a_1, ..., a_{n-1}]$. Logo, existe $a_n \in M$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi[a_1, ..., a_{n-1}, a_n]$. Por hipótese de indução, vale $\mathcal{N} \vDash \varphi[a_1, ..., a_{n-1}, a_n]$ e, por definição, vale que $\mathcal{N} \vDash \exists x_n\, \varphi[a_1, ..., a_{n-1}]$.

Aqui ainda não usamos a hipótese do critério.

Agora suponha $\mathcal{N} \vDash \exists x_n\, \varphi[a_1, ..., a_{n-1}]$. Então, pelo critério, temos que existe $a_n \in M$ tal que $\mathcal{N} \vDash \varphi[a_1, ..., a_{n-1}, a_n]$. Por hipótese de indução, temos que $\mathcal{M} \vDash \varphi[a_1, ..., a_{n-1}, a_n]$ e, portanto, $\mathcal{M} \vDash \exists x_n\, \varphi[a_1, ..., a_{n-1}]$. □

Note que o enunciado do Critério de Tarski só trata de satisfação no modelo maior.

Lema 1.3.5. *Seja $\mathcal{N}$ um L-modelo. Sejam $X \subset N$ e κ cardinal tais que $\aleph_0, |L|, |X| \leq \kappa \leq |N|$. Então existe submodelo $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ tal que $X \subset M$ e $|M| = \kappa$.*

Demonstração. Seja $M_0 \subset N$ tal que $|M_0| = \kappa$, $X \subset M_0$ e que contenha todas as constantes de L. Para $n \in \omega$, suponha definido M_n. Defina

$$M_{n+1} = M_n \cup \{f^{\mathcal{N}}(t_1, ..., t_n) : t_1, ..., t_n \in M_n, f \text{ é um símbolo de função}\}$$

Note que $M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$ satisfaz o que desejamos (exercício). $\square$

Com um pouco mais de esforço, conseguimos acrescentar a palavra "elementar" no enunciado:

Teorema 1.3.6 (Löweinheim-Skolem-Tarkski para baixo)**.** *Seja $\mathcal{N}$ um L-modelo. Sejam $X \subset N$ e κ cardinal tais que $\aleph_0, |L|, |X| \leq \kappa \leq |B|$. Então existe submodelo elementar $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ tal que $X \subset M$ e $|M| = \kappa$.*

Demonstração. Seja $M_0 \subset N$ tal que $|M_0| = \kappa$, $X \subset M_0$ e que contenha todas as constantes de L. Para $n \in \omega$, suponha definido M_n. Para cada fórmula $\varphi(x_1, ..., x_k)$ e cada $a_1, ..., a_{k-1} \in M_n$ tais que

$$\mathcal{N} \vDash \exists x_k \ \varphi[a_1, ..., a_{k-1}]$$

escolha $a_\varphi \in N$ de forma que

$$\mathcal{N} \vDash \varphi[a_1, ..., a_{k-1}, a_\varphi]$$

Considere A_n o conjunto de todos os a_φ's como acima. Defina

$$M_{n+1} = M_n \cup A_n$$

Note que $M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$ satisfaz o que desejamos, usando o Critério de Tarski (exercício). $\square$

Note que não precisamos "fechar por imagem de função" como antes, as existenciais já cuidarão disso.

Definição 1.3.7. Uma **imersão** de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$ é um isomorfismo entre $\mathcal{M}$ e um submodelo de $\mathcal{N}$. Se, além de submodelo, a imagem for submodelo elementar, então dizemos que é uma **imersão elementar**.

Lema 1.3.8. *Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ L-modelos e $h : M \to N$. São equivalentes:*

(a) h é uma imersão (elementar);

(b) para toda fórmula atômica φ (para toda φ) e toda valoração α em M, temos que $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$ se, e somente se, $\mathcal{N} \vDash \varphi[h \circ \alpha]$.

Demonstração. Exercício. □

Definição 1.3.9. Seja α um ordinal limite. Dizemos que uma sequência $\langle M_\xi : \xi < \alpha \rangle$ de L-modelos é uma **cadeia** se, para todo $\xi < \beta < \alpha$, $\mathcal{M}_\xi \subset \mathcal{M}_\beta$. Se, além disso temos que $\mathcal{M}_\xi \prec \mathcal{M}_\beta$, dizemos que é uma **cadeia elementar**.

Note que se $\langle \mathcal{M}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ é uma cadeia, então $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$ é um modelo M tal que cada $\mathcal{M}_\xi \subset \mathcal{M}$. (Exercício).

Estamos "abusando" da notação de união, mas a definição formal é a natural.

Proposição 1.3.10. *Se $\langle \mathcal{M}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ é uma cadeia elementar, então $\bigcup_{\xi<\alpha} \mathcal{M}_\xi$ é um modelo M tal que cada $\mathcal{M}_\xi \prec \mathcal{M}$.*

Demonstração. Exercício. □

1.4 Absolutividade

Essa seção e a próxima seguem [**?**].

Poderíamos colocar o símbolo de constante $\emptyset$, mas isso não é necessário.

Daqui em diante, vamos nos concentrar na linguagem de teoria dos conjuntos. O único símbolo não lógico necessário é o símbolo de relação binária $\in$. Outra propriedade que também usaremos sem menção é que os modelos são "padrão": a interpretação de $\in$ é a usual (pertencer).

O intuito desta seção é dar uma coleção de fórmulas que *sempre* são satisfeitas em certos tipos de modelos como os acima. Vamos começar com quem são as fórmulas.

Definição 1.4.1. Dizemos que uma fórmula é Δ_0 se ela pertence ao menor conjunto A de fórmulas que contém as atômicas, é fechado por uso de conectivos e tal que, se φ é uma fórmula de A e t é um termo, então

$\forall x \in t$ e $\exists x \in t$ são abreviações para $\forall x\ x \in t \rightarrow$ e $\exists x\ x \in t \wedge$ respectivamente.

- $\forall x \in t\ \varphi$ é um elemento de A;
- $\exists x \in t\ \varphi$ é um elemento de A.

Definição 1.4.2. Dizemos que um modelo $\mathcal{M}$ é **transitivo** se M é transitivo - isto é, para todo $x \in M$, $x \subset M$.

Definição 1.4.3. Dizemos que φ é **absoluta entre os modelos** $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ se, para toda valoração em $M \cap N$ temos

$$\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha] \text{ se, e somente se, } \mathcal{N} \vDash \varphi[\alpha]$$

Dizemos que φ é **absoluta** se ela é absoluta entre quaisquer modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ transitivos.

Proposição 1.4.4. *Se φ é uma fórmula Δ_0, então φ é absoluta.*

Demonstração. Fixe $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ modelos transitivos. Vamos mostrar o resultado por indução sobre φ. Suponha φ da forma $t = s$ onde t e s são termos. Como não temos símbolos funcionais ou constantes, os únicos termos possíveis são variáveis. Desta forma, $\mathcal{M} \vDash \varphi[\alpha]$ se, e somente se, $\alpha(s) = \alpha(t)$. O análogo temos para se φ fosse da forma $t \in s$ Suponha φ da forma $\psi_1 \wedge \psi_2$. Então

No caso de $\in$ usamos o fato que os modelos são da forma padrão.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \vDash \psi_1 \wedge \psi_2[\alpha] &\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi_1[\alpha] \text{ e } \mathcal{M} \vDash \varphi_2[\alpha] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi_1[\alpha] \text{ e } \mathcal{N} \vDash \varphi_2[\alpha] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi_1 \wedge \psi_2[\alpha] \end{aligned}$$

Para os outros conectivos é análogo. Agora suponha φ da forma $\exists x \in t\ \psi$. Se $\mathcal{M} \vDash \exists x \in t\ \psi(x)[\alpha]$, então existe $a \in M$ tal que

$$\mathcal{M} \vDash x \in t \wedge \psi[\alpha_a^x]$$

Note que como $\alpha(t) \in N$ e N é transitivo, então $a \in N$. Assim, α_a^x é uma valoração em $M \cap N$ e, portanto, pela hipótese de indução,

$$\mathcal{N} \vDash x \in t \wedge \psi[\alpha_a^x].$$

Logo, $\mathcal{N} \vDash \exists x \in t\ \psi[\alpha]$. Para o outro quantificador, é análogo. □

Talvez seja mais fácil pensar o que poderia acontecer se o modelo não fosse transitivo: nada iria garantir que a testemunha do existe em M iria pertencer também a N.

Note que com uma demonstração bastante parecida com a anterior, podemos mostrar que para uma fórmula φ Δ_0, ela vale num modelo transitivo se, e somente se, ela vale "no universo" (classe de todos os conjuntos). Vamos usar isso várias vezes no decorrer do texto.

Lema 1.4.5. *Dados conjuntos x, y, z, as seguintes afirmações são equivalente a fórmulas Δ_0 (e, portanto, são absolutas):*

(a) x *é vazio;*

(b) $x \subset y$*;*

(c) $x = y$*;*

(d) $x = \{y, z\}$*;*

(e) $x = \langle y, z \rangle$*;*

(f) x *é ordinal;*

(g) $x = \omega$*;*

(h) $x \in \omega$;

(i) $x = y \times x$;

(j) $x = dom(y)$;

Normalmente, vamos falar que uma afirmação é Δ_0 se ela é equivalente a alguma fórmula Δ_0.

Vale destacar que muitas afirmações que envolvem cardinalidades *não* são absolutas: $|x| = |y|$, $x = \wp(y)$, x é cardinal, x é regular etc.

1.5 Alguns modelos

Definição 1.5.1. Seja X um conjunto. Definimos $rank(\emptyset) = \emptyset$ e denotamos por $rank(X)= \sup\{rank(y) + 1 : y \in X\}$.

Além do *rank* dar uma medida sobre a complexidade do conjunto, também nos dá uma ideia sobre sua construção. Considere a seguinte construção recursiva:

- $V_0 = \emptyset$;
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} V_\xi$

Pode-se provar que todo conjunto pertence a algum dos V_α's. Para isso, o seguinte resultado ajuda:

Lema 1.5.2. *Sejam α, β ordinais. Temos:*

(a) V_α é transitivo.

(b) $V_\alpha \subset V_\beta$ se $\alpha \leq \beta$.

(c) se $X \subset V_\alpha$ e $\alpha < \beta$, então $X \in V_\beta$.

(d) se $X \in V_\alpha$, então $X \subset V_\xi$ para algum $\xi < \alpha$.

Proposição 1.5.3. *Seja X um conjunto. Então $rank(X) = \alpha$ se, e somente se, $X \subset V_\alpha$ e $X \not\subset V_\beta$ para todo $\beta < \alpha$.*

Além da coleção de todos os V_α conter todos os conjuntos, cada V_α é um conjunto que modela uma parte de ZFC. Por exemplo:

Proposição 1.5.4. *$V_{\omega+\omega}$ é um modelo para todos os axiomas de ZFC, com exceção do da substituição.*

Demonstração. Vamos mostrar que o axioma da união é satisfeito. Seja $X \in V_{\omega+\omega}$. Seja $Y = \bigcup X$. Note que $Y \in V_{\omega+\omega}$. Como a fórmula "$Y = \bigcup X$" é Δ_0, temos o resultado.

Que de fato os outros axiomas são satisfeitos, fica como exercício. Note que cada $V_{\omega+n} \in \mathcal{V}_{\omega+\omega}$. Suponha que o axioma da substituição seja satisfeito em $V_{\omega+\omega}$. Então o seguinte conjunto X é um elemento de $V_{\omega+\omega}$:

$$X = \{V_{\omega+n} : n \in \omega\}$$

Como $V_{\omega+\omega}$ satisfaz o axioma da união, temos que $\bigcup X \in V_{\omega+\omega}$. Mas note que $\bigcup X = V_{\omega+\omega}$, contradição. $\square$

Um conceito que ajuda é o do seguinte resultado, cuja demonstração fica como exercício:

Proposição 1.5.5. *Seja X um conjunto qualquer. Então existe um conjunto transitivo $tr(X)$ onde $X \subset tr(X)$ e, dado qualquer conjunto Y transitivo tal que $X \subset Y$, temos que $tr(X) \subset Y$.*

Chamamos $tr(X)$ de **fecho transitivo** de X.

Definição 1.5.6. Dado κ cardinal, dizemos que X é **hereditariamente de cardinalidade** $< \kappa$ se $|tr(X)| < \kappa$. Denotamos por $H(\kappa)$ a coleção de todos os conjuntos hereditariamente de cardinalidade κ.

O seguinte fato é útil ao relacionar *rank* e *tr* (cuja demonstração também fica como exercício):

Proposição 1.5.7. *Seja x um conjunto tal que $rank(x) = \alpha$. Então $\{rank(y) : y \in tr(x)\} = \alpha$.*

A ideia aqui é que o *rank* dentro do fecho transitivo não "pula" qualquer valor.

Proposição 1.5.8. *Dado κ cardinal infinito, $H(\kappa) \subset V_\kappa$. Em particular, $H(\kappa)$ é um conjunto.*

Demonstração. Note que, se $x \in H(\kappa)$, então $|tr(x)| < \kappa$. Pelo resultado anterior, $\{rank(y) : y \in tr(x)\} = \alpha$. Assim, $\alpha < \kappa$ e, portanto $x \in V_\kappa$. $\square$

O seguinte resultado é imediato:

Proposição 1.5.9. *Dado um cardinal κ, $H(\kappa)$ é transitivo.*

Para o próximo resultado, o seguinte resultado é útil (e a demonstração fica como exercício):

Lema 1.5.10. *Suponha κ regular. Seja $x \subset H(\kappa)$ tal que $|x| < \kappa$. Então $x \in H(\kappa)$. Seja φ uma fórmula tipo função tal que para todo $a \in H(\kappa)$, $\varphi(a) \in H(\kappa)$. Então, dado $A \in H(\kappa)$, $\{\varphi(a) : a \in A\} \in H(\kappa)$.*

Proposição 1.5.11. *Se κ é um cardinal não enumerável e regular, então $H(\kappa)$ é um modelo para todos os axiomas de ZFC, com exceção do axioma das partes.*

Demonstração. A maioria do axiomas seguem como no caso de $V_{\omega+\omega}$. O axioma da substituição segue do resultado anterior. O axioma das parte em geral não vale pois, dado $\eta < \kappa$, pode ocorrer $2^\eta \geq \kappa$. $\square$

Note que no resultado anterior, apesar do axioma das partes não valer em geral, ele vale para $x \in H(\kappa)$ de forma que $2^{|x|} < \kappa$. Assim, se numa demonstração não se usa o axioma das partes irrestrito, é comum se adotar como modelo $H(\kappa)$ para κ grande o suficiente.

1.6 Algumas aplicações de submodelos elementares

Nesta seção, vamos apresentar algumas aplicações da técnica de submodelos elementares. Em geral, tomaremos como modelo $H(\kappa)$, com algum κ grande o suficiente - na maioria dos casos, não enumerável e regular serve. Mas em alguns casos, precisamos que $\omega_1 \in H(\kappa)$ (ou seja, $\kappa \geq \omega_2$).

Nesta seção estamos seguindo [**?**].

Começamos com alguns resultados básicos.

Proposição 1.6.1. *Seja $M \preceq H(\kappa)$. Temos:*

(a) $\omega \in M$ e $\omega \subset M$.

(b) Se $a \in M$ e a é enumerável, então $a \subset M$.

(c) Se $a \subset M$ é finito, $a \in M$.

Demonstração. (a) Note que M satisfaz o axioma do infinito, logo ω é definível em M e, portanto, é elemento de M. Por indução, cada $n \in \omega$ é tal que $n \in M$.

(b) A afirmação "$\exists f : \omega \to a$ sobrejetora" é satisfeita em $H(\kappa)$. Logo, existe $f \in M$ que satisfaz tal afirmação (pois ω e a são elementos de M). Assim, cada $f(n)$ é definível em M e, portanto, um elemento de M.

(c) Basta escrever a fórmula que descreve a.

$\square$

Definição 1.6.2. Dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos forma um **Δ-sistema** de **raiz** Δ se para todo $F, G \in \mathcal{F}$ distintos, $F \cap G = \Delta$.

Proposição 1.6.3 (Lema do Δ-sistema)**.** *Seja $\mathcal{F}$ uma família não enumerável de conjuntos finitos. Então existe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ não enumerável que forma um Δ-sistema.*

Demonstração. Seja $M \preceq H(\kappa)$ submodelo enumerável tal que $\mathcal{F} \in M$. Como $\mathcal{F}$ é não enumerável, podemos tomar $F_0 \in \mathcal{F} \smallsetminus M$. Considere $\Delta = M \cap F_0$. Como Δ é finito, temos $\Delta \in M$. Pelo critério de Tarski, existe $F_1 \in M \cap \mathcal{F}$ tal que $\delta \subset F_1$. Note que $F_0 \cap F_1 = \Delta$ (pois $F_1 \subset M$). Note que a fórmula

$$\exists F \in \mathcal{F} \; F \cap F_1 = \Delta \wedge F \neq F_1$$

é satisfeita em $H(\kappa)$. Logo, por Tarski novamente, existe $F_2 \in \mathcal{F} \cap M$ tal que $F_1 \cap F_2 = \Delta$.

Seja $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ maximal tal que para todo $F, G \in \mathcal{F}'$ distintos, $F \cap G = \Delta$ (basta estender $\{F_1, F_2\}$ por exemplo). Se $\mathcal{F}'$ é não enumerável, terminamos. Vamos mostrar que o caso $\mathcal{F}'$ enumerável é impossível. Suponha que não. Como a existência de tal $\mathcal{F}'$ vale em $H(\kappa)$, podemos supor $\mathcal{F}' \in M$. Como $\mathcal{F}'$ é enumerável, temos que $\mathcal{F}' \subset M$. Dado qualquer $F \in \mathcal{F}'$, temos que $F \cap F_0 = \Delta$ - ou seja, $\mathcal{F}' \cup \{F_0\}$ contraria a maximalidade de $\mathcal{F}'$. $\square$

Vamos terminar essa seção apresentando uma aplicação topológica. Mas, antes, precisamos de um tipo específico de submodelo elementar:

Definição 1.6.4. Dizemos que um submodelo elementar é **enumeravelmente fechado** se, para todo $E \subset M$ enumerável, temos que $E \in M$.

Cabe notar que é impossível obtermos um submodelo elementar enumerável que seja enumeravelmente fechado - basta contar quantos subconjuntos precisariam ser elemetos. Por outro lado, é possível conseguir um de cardinalidade contínuo:

Proposição 1.6.5. *Dado X tal que $|X| \leq \mathfrak{c}$, existe $\mathcal{M}$ submodelo elementar enumeravelmente fechado tal que $X \subset M$ e $|M| = \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Defina $\mathcal{M}_0$ como um submodelo elementar qualquer contendo ω_1. Dados $\langle M_\xi : \xi < \eta \rangle$ com $\eta < \omega_1$ definidos, defina $M_\eta = \bigcup_{\xi < \eta} M_\xi$ se η for limite (é fácil mostrar que M_η é também submodelo elementar) ou, se $\eta = \alpha + 1$, defina M_η como sendo um submodelo de cardinalidade $\mathfrak{c}$ de forma que $M_\eta \supset [M_\alpha]^{\aleph_0} \cup \{M_\alpha\}$. Considere $M = \bigcup_{\xi<\omega_1} M_\xi$ e note que M também é submodelo elementar. Resta provar que é enumeravelmente fechado. Seja $E \subset M$ enumerável. Então existe $\alpha < \omega_1$ tal que $E \subset M_\alpha$. Assim, $E \in M_{\alpha+1} \subset M$. $\square$

Agora temos todos os ingredientes para fazer nossa aplicação topológica. Lembrando, um espaço topológico X é dito de Lindelöf se toda cobertura aberta para X admite subcobertura enumerável:

Proposição 1.6.6. *Seja X espaço de Lindelöf, de Hausforff e com bases locais enumeráveis. Então $|X| \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{M}$ submodelo elementar enumeravelmente fechado tal que $|M| = \mathfrak{c}$ e $X \in M$. Note que, se provarmos que $X \subset M$, teremos o resultado. Primeiramente, vamos provar que $X \cap M$ é fechado. De fato, suponha $x \in \overline{X \cap M}$. Note que existe $\langle a_n^{:} n \in \omega\rangle$ sequência de pontos de $X \cap M$ convergindo para x (aqui usamos o fato que x admite base local enumerável). Como $\{a_n : n \in \omega\} \subset M$ e $\mathcal{M}$ é enumeravelmente fechado, obtemos que $\langle a_n : n \in \omega\rangle$. Pelo critério de Tarski, temos que existe um limite y em $M \cap X$ para $\langle a_n : n \in \omega\rangle$. Como X é de Hausdorff, pela unicidade do limite, obtemos que $y = x$ e, portanto, $x \in M$. Ou seja, $\overline{X \cap M} \subset M$ e, portanto, $\overline{X \cap M} = X \cap M$.

Vamos agora mostrar que $X \cap M = X$. Suponha que exista $y \in X \setminus M$. Para cada $x \in X \cap M$, seja $\mathcal{V}_x$ base local enumerável para x. Note que $\mathcal{V}_x \subset M$. Além disso, existe $V_x \in \mathcal{V}_x$ tal que $y \notin V_x$ - aqui é importante que $V_x \in M$ para o que vamos fazer na sequência. Note que $\{V_x : x \in X \cap M\}$ é uma cobertura aberta para $X \cap M$. Como $X \cap M$ é fechado, é de Lindelöf. Logo, existe $E \subset X \cap M$ enumerável que $\{V_x : x \in E\}$ é uma cobertura para $X \cap M$. E, como $\mathcal{M}$ é enumeravelmente fechado, $E \in M$. Assim

$$\mathcal{M} \vDash \forall x \in X\ \exists z \in E\ x \in V_z.$$

Pela elementariedade, E é cobertura para X - o que é uma contradição, já que y não é coberto por qualquer elemento de E. $\square$

Capítulo 2

Axioma de Martin

2.1 Definição e resultados básicos

Nesta seção, vamos apresentar mais uma afirmação independente de ZFC. Para isso, precisamos de algumas definições:

Definição 2.1.1. Dada $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem, temos que $p, q \in \mathbb{P}$ são **incompatíveis** se não existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p, q$ (notação, $p \perp q$).

Quando trabalhamos neste contexto, muitas vezes lê-se $p \leq q$ como p estende q ou p é mais forte que q. Isso deve ficar mais claro com os exemplos.

Definição 2.1.2. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Dizemos que $A \subset \mathbb{P}$ é uma **anticadeia** se, para todos $p, q \in A$ distintos, temos que $p \perp q$. Dizemos que $\mathbb{P}$ satisfaz **ccc** (*countable chain condition*) se não existe $A \subset \mathbb{P}$ anticadeia não enumerável.

Sim, fica assim meio estranho por motivos históricos.

Definição 2.1.3. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Dizemos que $D \subset \mathbb{P}$ é **denso** se, para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $d \in D$ tal que $d \leq p$.

Definição 2.1.4. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $\mathcal{F} \subset \mathbb{P}$ é um **filtro** se

Uma interpretação possível para os elementos de um filtro seria que eles satisfazem a definição de "ser grande" numa ordem.

(a) $\mathcal{F} \neq \emptyset, \mathbb{P}$.

(b) se $p, q \in \mathcal{F}$, existe $r \in \mathcal{F}$ tal que $r \leq p, q$.

(c) se $p \in \mathcal{F}$ e $q \in \mathbb{P}$ são tais que $p \leq q$, então $q \in \mathcal{F}$.

Definição 2.1.5. Seja $(\mathbb{P}, \leq)$ uma ordem. Seja $\mathcal{D}$ uma família de densos de $\mathbb{P}$. Dizemos que um filtro F sobre $\mathbb{P}$ é **$\mathcal{D}$-genérico** se, para todo $D \in \mathcal{D}$, temos $F \cap D \neq \emptyset$.

Definição 2.1.6. Seja κ cardinal infinito. Denotamos por MA_κ a afirmação "para toda ordem $(\mathbb{P}, \leq)$ ccc e toda família $\mathcal{D}$ de densos de $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| \leq \kappa$, existe G filtro sobre $\mathbb{P}$ $\mathcal{D}$-genérico.

Se $\mathcal{D}$ é uma família enumerável de densos, existe G $\mathcal{D}$-genérico (Exercicio 2.1.12). Desta forma, MA_ω vale trivialmente (nem precisamos da hipótese ccc).

Definição 2.1.7. Chamamos de **axioma de Martin** (MA) a afirmação: "para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$ vale MA_κ".

Ou seja, trivialmente, temos:

Proposição 2.1.8. *$CH \Rightarrow MA$.*

Note que a nomenclatura de ser incompatível aqui fica bem natural.

Definição 2.1.9. Sejam X e Y conjuntos. Chamamos de $Fn(X, Y)$ o conjunto das funções finitas cujo domínio está contido em X e imagem em Y. Vamos denotar $f \leq g$ quando $f \supset g$.

Lema 2.1.10. *Sejam X, Y conjuntos com X infinito e $|Y| \geq 2$. Sejam $x \in X$ e $f : X \longrightarrow Y$ função. Então os conjuntos*

$$D_x = \{p \in Fn(X, Y) : x \in dom(p)\}$$

$$E_f = \{p \in Fn(X, Y) : \exists a \in dom(p)\ p(a) \neq f(a)\}$$

são densos em $Fn(X, Y)$.

Demonstração. Seja $p \in Fn(X, Y)$. Seja $x \in X$. Se $x \in \mathrm{dom}(p)$, temos que $p \in D_x$. Caso contrário, $q = p \cup \{(x, y)\}$ onde $y \in Y$ é tal que $q \in D_x$ e $q \leq p$.

Seja $f \in Y^X$. Seja $x \in X \setminus \mathrm{dom}(p)$. Seja $y \in Y$ com $y \neq f(x)$. Note que $q = p \cup \{(x, y)\}$ é tal que $q \in E_f$ e $q \leq p$. □

Proposição 2.1.11. *Não vale $MA_{2^{\aleph_0}}$.*

Demonstração. Note que $Fn(\omega, 2)$ é ccc, já que é enumerável. Suponha que vale $MA_{2^{\aleph_0}}$. Então existe G filtro sobre $Fn(\omega, 2)$ filtro $\mathcal{D}$-genérico, onde, seguindo a notação do resultado anterior,

$$\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_f : f \in 2^\omega\}.$$

Seja $g = \bigcup G$. Note que g é uma função (veja Exercício 2.1.13). Seja $n \in \omega$. Como $G \cap D_n \neq \emptyset$, temos que $n \in \mathrm{dom}(g)$. Assim, $g \in 2^\omega$. Mas, dada $f \in 2^\omega$, como $G \cap E_g \neq \emptyset$, temos que $g \neq f$, contradição. □

Exercícios

Exercício 2.1.12. Seja $(P, \leq)$ uma ordem. Seja $\mathcal{D}$ família enumerável de densos. Então existe G $\mathcal{D}$-genérico.

Exercício 2.1.13. Seja F filtro sobre $Fn(X, Y)$. Mostre que $\bigcup F$ é uma função.

2.2 Uma aplicação lúdica

Nesta seção, vamos trabalhar com o seguinte jogo topológico:

Definição 2.2.1. Seja (X, τ) um espaço topológico. Chamamos de **jogo de Rothberger** o seguinte jogo entre os jogadores ALICE e BETO. A cada rodada $n \in \omega$, ALICE escolhe $\mathcal{C}_n$ cobertura aberta para X. Depois, BETO escolhe $C_n \in \mathcal{C}_n$. No final, BETO é declarado vencedor se $\bigcup_{n \in \omega} C_n$ é uma cobertura para X. ALICE é declarada vencedora caso contrário.

Definição 2.2.2. Dizemos que um espaço X é um **espaço de Rothberger** se ALICE não tem uma estratégia vencedora para o jogo de Rothberger.

A definição clássica desta propriedade não é esta, mas essa formulação é equivalente - num resultado bastante não trivial devido a Pawlikowski [**?**].

Note que todo espaço enumerável é de Rothberger e que todo espaço de Rothberger é de Lindelöf (veja o Exercício 2.2.6).

Proposição 2.2.3. *O espaço 2^ω é um compacto que não é de Rothberger.*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe uma estratégia vencedora para ALICE. A cada rodada n, considere a cobertura $\mathcal{C}_n = \{C_n^0, C_n^1\}$, onde

$$C_n^i = \{f \in 2^\omega : f(n) = i\}$$

Note que, de fato, cada C_n^i é um aberto e que $\mathcal{C}_n$ é uma cobertura. Considere uma partida em que ALICE jogou sempre $\mathcal{C}_n$ em cada rodada n. Seja $f \in 2^\omega$ tal que, a cada rodada n, a escolha de BETO foi $C_n^{f(n)}$. Defina $g \in 2^\omega$ tal que $g(n) = 0$ se $f(n) = 1$ e $g(n) = 1$ se $f(n) = 0$. Note que $g \notin \bigcup_{n \in \omega} C_n^{f(n)}$ e, portanto, ALICE venceu a partida. □

Proposição 2.2.4. *(MA) Se X é de Lindelöf e $|X| < 2^{\aleph_0}$, então X é de Rothberger.*

Indicamos por (MA) que tal resultado vale na presença do axioma de Martin.

Demonstração. Seja σ uma estratégia para ALICE. Note que, como o espaço é de Lindelöf, podemos supor que toda cobertura dada por σ é enumerável. Assim, considere $\{C_n : n \in \omega\}$ a cobertura dada por σ na rodada 0. Dado

$k \in \omega$, considere $\{C_{k^\frown n} : n \in \omega\}$ a cobertura dada por σ caso Beto escolha C_k. De forma geral, dado $s \in \omega^{<\omega}$, $\{C_{s^\frown n} : n \in \omega\}$ é a cobertura dada por σ se Alice escolheu C_s na rodada anterior.

Considere $\mathbb{P} = \{C_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ com a seguinte ordem: $C_s \leq C_t$ se $t \subset s$. Note que $\mathbb{P}$ é enumerável e, portanto, ccc. Seja $x \in X$. Considere

$$D_x = \{C_s : x \in C_s\}$$

Note que, uma vez que $\{C_{s^\frown n} : n \in \omega\}$ é uma cobertura para todo $s \in \omega^{<\omega}$, D_x é denso. Como $|X| < 2^{\aleph_0}$, temos que existe F filtro $(D_x)_{x\in X}$-genérico. Note que os elementos de tal filtro formam uma partida em que Beto vence o jogo de Rothberger e Alice segue σ. Ou seja, σ não é uma estratégia vencedora. □

Com os dois últimos resultados, obtemos o seguinte resultado de independência:

CH nos dá que 2^ω é um contraexemplo e MA_{ω_1} implica que o resultado é verdadeiro.

Corolário 2.2.5. *A afirmação "Todo espaço de Lindelöf com cardinalidade $\aleph_1$ é de Rothberger" é independente de ZFC.*

Exercícios

Exercício 2.2.6. Mostre que todo espaço enumerável é de Rothberger. Mostre que todo espaço de Rothberger é de Lindelöf.

Exercício 2.2.7. Mostre que $\mathbb{R}$ não é de Rothberger.

Exercício 2.2.8. Considere o seguinte jogo entre os Alice e Beto. A cada rodada $n \in \omega$, Alice escolhe D_n um denso sobre X. Então, Beto escolhe $d_n \in D_n$. Ao final, Beto é o vencedor se $\{d_n : n \in \omega\}$ é denso.

(a) Mostre que se X tem base enumerável, então Beto tem estratégia vencedora.

Um espaço é dito **hereditariamente separável** se todo subespaço seu é separável.

(b) (MA) Mostre que se X é hereditariamente separável e X tem uma base $\mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{B}| < 2^{\aleph_0}$, então Alice não tem estratégia vencedora.

Exercício 2.2.9. Mostre que em todo espaço compacto de Hausdorff sem pontos isolados, Alice admite estratégia vencedora no jogo de Rothberger.

2.3 Ordens ccc

Começamos mostrando que uma importante classe de ordens é ccc.

Proposição 2.3.1. *Sejam A e B conjuntos tais que B é enumerável. Então $Fn(A,B)$ é ccc.*

Já tínhamos usado o resultado para o caso mais simples em que A é enumerável.

Demonstração. Seja $\mathcal{C} \subset Fn(A,B)$ não enumerável. Precisamos mostrar que existem $f, g \in \mathcal{C}$ distintos e compatíveis. Considere $\{D : D = \text{dom}(f)$ para algum $f \in \mathcal{C}\}$. Como algumas funções distintas podem ter o mesmo domínio, poderia ser que tal conjunto fosse enumerável. Mas isso é impossível - se isso ocorresse, uma quantidade não enumerável de funções de $\mathcal{C}$ teria o mesmo domínio (finito). Como B é enumerável, só existem enumeráveis funções possíveis com tal domínio fixado, gerando uma contradição.

Assim, tal conjunto é não enumerável e, portanto, podemos tomar um conjunto $D = \{D_\xi : \xi < \omega_1$ e $D_\xi = \text{dom}(f)$ para algum $f \in \mathcal{C}\}$ de forma que todos os elementos de D são distintos. Como os elementos de D são finitos, podemos também supor que D forma um Δ-sistema. Para cada $\xi < \omega_1$, seja $p_\xi \in \mathcal{C}$ tal que $\text{dom}(p_\xi) = D_\xi$. Como Δ é finito, só existem finitas possibilidades para funções de Δ em B. Ou seja, existe $p : \Delta \to B$ tal que uma quantidade não enumerável ξ's é tal que $p_\xi \supset p$. Sejam α e β distintos tais que $p_\alpha, p_\beta \supset p$. Como $\text{dom}(p_\alpha) \cap \text{dom}(p_\beta) = \Delta$, temos que p_α e p_β são compatíveis e, portanto, o resultado. □

Os próximos resultados servirão para mostrar que, sob CH, existem $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ ccc tais que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não é ccc - é também consistente com ZFC que a classe das ordens ccc é fechada pelo produto.

Começamos com a definição da ordem produto:

Definição 2.3.2. Sejam $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ ordens. Definimos sobre $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ a ordem $\langle p_1, q_1 \rangle \leq \langle p_2, q_2 \rangle$ se $p_1 \leq p_2$ e $q_1 \leq q_2$.

Vamos mostrar o exemplo fazendo uso de submodelos enumeráveis. Preciamos de mais algumas definições. Começamos com uma ideia similar a uma que já apareceu numa das aplicaçoes:

Definição 2.3.3. Dizemos que $\langle M_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ é uma **boa cadeia elementar** de submodelos enumeráveis se:

(a) Cada $M_\xi \preceq H(\kappa)$ e é enumerável;

(b) $M_\xi \in M_{\xi+1}$;

(c) $M_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} M_\eta$ se ξ é limite.

Proposição 2.3.4. *Existe $\langle M_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ boa cadeia elementar de submodelos elementares enumeráveis de $H(\kappa)$.*

Demonstração. Seja $\xi \in \omega_1$. Se ξ é da forma $\alpha + 1$, defina $M_{\alpha+1}$ como um submodelos elementar enumerável de $H(\kappa)$ contendo $M_\alpha \cup \{M_\alpha\}$. Se ξ é limite, note que $M_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} M_\eta$ é enumerável e é um submodelo elementar de $H(\kappa)$ pelo critério de Tarski. □

Dado um submodelo elementar enumerável M qualquer, sabemos que $\omega \subset M$. Não podemos afirmar o mesmo sobre ω_1, mesmo que o modelo em questão seja não enumerável - pelo critério de Tarski, $\omega_1 \in M$ (se κ for grande o suficiente para que $\omega_1 \in H(\kappa)$), mas a inclusão não necessariamente é verdadeira. Por outro lado, se tomamos uma uma cadeia elementar, o resultado vale para a união da cadeia. O próximo resultado, que fica como exercício, dá um caminho de como se provar isso:

Proposição 2.3.5. *Sejam $M, N \preceq H(\kappa)$ enumeráveis tais que $M \subset N$ e $M \in N$. Então as seguintes são verdadeiras:*

(a) $M \cap \omega_1 \in \omega_1$;

(b) $M \cap \omega_1 \in N$.

Proposição 2.3.6. *Se $\langle M_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ é uma boa cadeia elementar de submodelos enumeráveis, temos que $\omega_1 \subset \bigcup_{\xi<\omega_1} M_\xi$.*

Proposição 2.3.7. *(CH) Se $\langle M_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ é uma boa cadeia elementar de submodelos enumeráveis, temos que $\bigcup_{\xi<\omega_1} M_\xi$ é enumeravelmente fechado.*

Demonstração. Seja $E \subset M = \bigcup_{\xi<\omega_1} M_\xi$ enumerável. Note que existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $E \subset M_\alpha$. Por CH, temos que $\wp(M_\alpha) = \omega_1$. Logo, existe $g : \omega_1 \to \wp(M_\alpha)$ sobrejetora. Note que, sem perda de generalidade, podemos supor $g \in M_{\alpha+1}$ (todos os parâmetros para defini-la estão em $M_{\alpha+1}$). Seja $\eta < \omega_1$ tal que $g(\eta) = E$. Seja M_β tal que $\beta > \alpha$ e $\eta \in M_\beta$. Note que $E = f(\eta) \in M_\beta$. □

Finalmente temos os ingredientes para o exemplo desejado:

Definição 2.3.8. Seja I um conjunto não vazio. Seja $f : [I]^2 \to 2$. Definimos para $i = 0, 1$ o conjunto

Isto é, $\mathbb{P}_i$ é a família dos conjuntos homogêneos finitos de cor i.

$$\mathbb{P}_i = \{X \in [I]^{<\omega} : \forall \alpha \neq \beta \in X \ f(\{\alpha, \beta\}) = i\}$$

com a ordem $X \leq Y$ se $X \supset Y$.

Ordens como a acima quase provam o que queremos:

Lema 2.3.9. *Seja I não enumerável e $f : [I]^2 \to 2$ tal que $\mathbb{P}_0$ e $\mathbb{P}_1$ são não vazios. Então $\mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$ não é ccc.*

Demonstração. Considere

$$A = \{\langle\{a\}, \{a\}\rangle : a \in I\}$$

Note que A é não enumerável e que $A \subset \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$. Só precisamos mostrar que A é uma anticadeia. Sejam $a, b \in I$ distintos e suponha $X, Y \in [I]^{<\omega}$ tais que

$$\langle X, Y\rangle \leq \langle\{a\}, \{a\}\rangle, \langle\{b\}, \{b\}\rangle$$

Note que, então, $a, b \in X \cap Y$ e, pela primeira coordenada, $f(\{a, b\}) = 0$ enquanto que pela segunda $f(\{a, b\}) = 1$, contradição. $\square$

Ou seja, se conseguirmos algum I não enumerável e alguma $f : [I]^2 \to 2$ de forma que $\mathbb{P}_0$ e $\mathbb{P}_1$ sejam ccc, terminamos.

Lema 2.3.10. *Dada $f : [\omega_1]^2 \to 2$, se $\mathbb{P}_i$ não é ccc, então $\mathbb{P}$ contém uma anticadeia não enumerável de elementos dois a dois disjuntos.*

Demonstração. Seja A anticadeia não enumerável. Pelo Lema do Δ-sistema, podemos supor que A forma um Δ-sistema de raiz Δ. Vamos mostrar que

$$A' = \{X \setminus \Delta : X \in A\}$$

é uma anticadeia. Sejam $X, Y \in A$ distintos. Note que, como $X \perp Y$, temos que $X \cup Y \notin \mathbb{P}_i$. Assim, existem $\alpha, \beta \in X \cup Y$ tais que $f(\{\alpha, \beta\}) \neq i$. Note que, sem perda de generalidade, $\alpha \in X \setminus \Delta$, $\beta \in Y \setminus \Delta$ e, portanto, $(X \setminus \Delta) \perp (Y \setminus \Delta)$. $\square$

Teorema 2.3.11. *CH implica que existem $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ ccc tais que $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ não é ccc.*

Demonstração. Pelo Lema 2.3.9, só precisamos construir $f : [\omega_1]^2 \to 2$ de forma que $\mathbb{P}_0$ e $\mathbb{P}_1$ sejam ccc. Seja $\langle M_\xi : \xi < \omega_1\rangle$ uma boa cadeia elementar de submodelos elementares enumeráveis de $H(\kappa)$. Vamos construir uma sequência de funções $\langle g_\xi : \xi < \omega_1\rangle$ de forma que cada $g_\xi : \xi \to 2$ satisfaz:

(a) $g_\xi \in M_{\xi+1}$;

(b) se $E \in M_\xi$ é um conjunto enumerável infinito de subconjuntos finitos de ξ, dois a dois disjuntos, então existem infinitos $X \in E$ satisfazendo

$$\forall \alpha \in X \ g_\xi(\alpha) = i$$

para $i = 0, 1$.

Vejamos que tal construção é possível. Note que a condição (b) é satisfeita trivialmente quando ξ é finito. Desta forma, podemos apenas cuidar do caso ξ infinito.

Como M_ξ é enumerável, podemos listar $\langle E_n : n \in \omega \rangle$ como todos os E's relevantes para a condição (b) de forma que, para cada E o conjunto $\{m \in \omega : E_m = E\}$ contenha infinitos pares e infinitos ímpares. Escolha recursivamente uma família $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ de forma que

Em particular, estamos repetindo E infinitas vezes na lista.

(i) $X_i \in E_i$;

(ii) $X_i \cap X_j = \emptyset$ se $j < i$.

Dado $\alpha \in \xi$, defina

$$g_\xi(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \in X_n \text{ e } n \text{ é par} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que g_ξ assim definida satisfaz (b) e, como M_ξ, $\xi \in M_{\xi+1}$, podemos supor que $g_\xi \in M_{\xi+1}$.

Uma vez definidas $\langle g_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$, definimos $f : [\omega_1]^2 \to 2$ da seguinte forma. Dados, $\alpha < \beta < \omega_1$:

$$f(\{\alpha, \beta\}) = g_\beta(\alpha).$$

Agora vamos mostrar que cada $\mathbb{P}_i$ é ccc. Suponha que não. Então, pelo lema anterior, existe $A \subset \mathbb{P}_i$ anticadeia não enumerável de elementos dois a dois disjuntos. Seja $E \subset A$ enumerável infinito. Note que existe $\xi < \omega_1$ tal que $E \in M_\xi$. Seja $X \in A$ tal que $\min X > \sup E$. Escreva $X = \{\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}\}$, onde $\alpha_i < \alpha_j$ se $i < j$. Defina $E_0 = E$. Para cada $k < n - 1$, suponha definido E_k e defina

$$E_{k+1} = \{Y \in E_k : \forall \beta \in Y \ f(\{\beta, \alpha_k\}) = g_{\alpha_k}(\beta) = i\}$$

Por indução, cada E_k é infinito. Em particular, $E_n \neq \emptyset$. Note que, dado qualquer $Y \in E_n$, temos que, para todo $\beta \in Y$ e todo $k < n$, $f(\{\beta, \alpha_k\}) = i$ e, portanto, X e Y são compatíveis, contradição. $\square$

2.4 Algumas aplicações do axioma de Martin

Começamos com uma aplicação simples da técnica: uma consequência de $MA_{\aleph_0}$ - e, portanto, um teorema ZFC:

Proposição 2.4.1. *Seja X um conjunto enumerável ordenado por uma ordem densa em si mesma e sem extremos. Então X é isomorfo (no sentido de ordem) a $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$\mathbb{P} = \{f : A \to \mathbb{Q} | A \subset X \text{ é finito e } f \text{ preserva a ordem}\}$$

Para cada $x \in X$, note que o conjunto

$$D_x = \{f \in \mathbb{P} : x \in \mathrm{dom}(f)\}$$

é denso em X. Assim como, para cada $q \in \mathbb{Q}$, o conjunto

$$E_q = \{f \in \mathbb{P} : q \in \mathrm{Im}(f)\}$$

é denso em $\mathbb{P}$. Seja $\mathcal{D} = \{D_x : x \in X\} \cup \{E_q : q \in \mathbb{Q}\}$. Note que $\mathcal{D}$ é enumerável. Assim, existe G $\mathcal{D}$-genérico. Considere $f = \bigcup_{p \in G} p$. Note que, como G é filtro, f é função. Como $G \cap D_x \neq \emptyset$, $x \in \mathrm{dom}(f)$ para todo $x \in X$. Como $G \cap E_q \neq \emptyset$, $q \in \mathrm{Im}(f)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Resta mostrar que f preserva a ordem. Sem $x, y \in X$ com $x < y$. Sejam $p_x \in D_x \cap G$ e $p_y \in D_y \cap G$. Como G é filtro, existe $p \in G$ tal que $p \leq p_x, p_q$. Note que $f(x) = p(x) < p(y) = f(y)$. □

Proposição 2.4.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que $|X| \leq \kappa$. Se vale MA_κ, então X tem medida nula.*

Demonstração. Note que é suficiente mostrar que $X \subset U$, onde U é uma união enumerável de intervalos tais que a soma de seus diâmetros é menor um $\varepsilon > 0$ previamente fixado. Seja $\{I_n : n \in \omega\}$ uma enumeração para todos os invervalos abertos de extremos racionais de $\mathbb{R}$. Seja $\varepsilon > 0$. Fixe $\langle x_n : n \in \omega \rangle$ uma sequência de reais positivos tais que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n < \varepsilon$. Considere

$$\mathbb{P} = \{f \in Fn(\omega, \omega) : diam(I_{f(n)}) < x_n \text{para todo } n \in \mathrm{dom}(f)\}$$

com a ordem usual (extensão de funções). Como $\mathbb{P}$ é enumerável, $\mathbb{P}$ é ccc. Seja $x \in X$. Note que

$$D_x = \{p \in \mathbb{P} : x \in \bigcup_{n \in \mathrm{dom}(p)} I_{p(n)}\}$$

é denso em $\mathbb{P}$. Para cada $n \in \omega$, note que

$$E_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \operatorname{dom}(p)\}$$

é denso em $\mathbb{P}$. Seja $\mathcal{D} = \{D_x : x \in X\} \cup \{E_n : n \in \omega\}$. Note que $|\mathcal{D}| = \kappa$. Assim, seja G $\mathcal{D}$-genérico. Note que $f = \bigcup_{p \in G} p$ é uma função de ω em ω. Além disso, note que $X \subset \bigcup_{n \in \omega} I_{f(n)}$ e que $diam(I_{f(n)}) \leq x_n$. □

Definição 2.4.3. Dizemos que uma família $\mathcal{A}$ de subconjunto infinitos de ω é **quase disjunta** se, dados $A, B \in \mathcal{A}$ distintos, $A \cap B$ é finito. Dizemos que $\mathcal{A}$ é não trivial se $\mathcal{A}$ é infinita.

O próximo resultado é imediato a partir do Lema de Zorn:

Proposição 2.4.4. *Dada uma família $\mathcal{A}$ quase disjunta não trivial, existe uma $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ maximal.*

Proposição 2.4.5. *Não existe uma $\mathcal{A}$ quase disjunta não trivial enumerável.*

Demonstração. Seja $\{A_n : n \in \omega\}$ quase disjunta. Para cada $n \in \omega$, seja $a_n \in A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k$. Note que $A = \{a_n : n \in \omega\}$ é infinito e que $|A \cap A_n| \leq n + 1$. □

Proposição 2.4.6. *Existe uma $\mathcal{A}$ quase disjunta tal que $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$.*

Proposição 2.4.7. *Suponha MA_κ. Então não existe uma família quase disjunta não trivial $\mathcal{A}$ maximal tal que $|\mathcal{A}| \leq \kappa$.*

Demonstração. Fixe $\mathcal{A}$ como no enunciado. Considere

$$\mathbb{P} = \{(s, F) : s \in [\omega]^{<\aleph_0}, F \in [\mathcal{A}]^{\aleph_0}\}$$

com a seguinte relação: $(s, F) \leq (s', F')$ se

- $s \supset s'$;
- $F \supset F'$;
- $(s \setminus s') \cap A = \emptyset$ para todo $A \in F'$.

Note que $\leq$ é uma relação de ordem. Vamos mostrar que $\mathbb{P}$ é ccc. Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}$ não enumerável. Note que existe s, F, G tais que

$$(s, F), (s, G) \in \mathcal{C}$$

pois só existem enumeráveis opções para a primeira coordenada. Note que $(s, F \cup G) \leq (s, F), (s, G)$. Note que, dado $A \in \mathcal{A}$,

$$D_A = \{(s, F) \in \mathbb{P} : A \in F\}$$

é denso em $\mathbb{P}$. Dado $k \in \omega$, considere

$$E_k = \{(s, F) \in \mathbb{P} : |s| \geq k\}.$$

Vamos mostrar que E_k é denso. Seja (s, F) qualquer. Note que é suficiente mostrar que existe $n \in \omega \setminus s$ tal que $(s \cup \{n\}, F) \leq (s, F)$. Seja $A \in \mathcal{A} \setminus F$ (existe pois $\mathcal{A}$ é não trivial). Note que existe $n \in A \setminus \bigcup_{B \in F} B$, pois $\mathcal{A}$ é quase disjunta. Note que tal n satisfaz o desejado.

Considere $\mathcal{D} = \{D_A : A \in \mathcal{A}\} \cup \{E_k : k \in \omega\}$. Note que $|\mathcal{D}| = |\mathcal{A}|$. Seja G $\mathcal{D}$-genérico. Seja $B = \bigcup_{(s,F) \in G} s$. Como cada $E_k \cap G \neq \emptyset$, B é infinito. Vamos mostrar que $A \cap B$ é finito para todo $A \in \mathcal{A}$ - portanto, $\mathcal{A}$ não é maximal.

Seja $A \in \mathcal{A}$. Seja $(s, F) \in G \cap D_A$. Vamos provar que $A \cap B \subset s$ - e, portanto, é finito. Seja $n \in A \cap B$. Como $n \in B$, existe $(s', F') \in G$ tal que $n \in s'$. Como G é filtro, existe $(s'', F'') \leq (s, F), (s', F')$. Como $n \in s'$, $n \in s''$. Como $(s'', F'') \leq (s, F)$ e $A \in F$, temos que $n \in s$.

$\square$

2.5 MA e produto de ordens ccc

Vimos que o produto de duas ordens ccc não necessariamente é ccc sob CH. Vamos ver que a situação é diferente sob MA.

Lema 2.5.1. *Se $\mathbb{P}$ é ccc, então $p\downarrow$ é ccc para todo $p \in \mathbb{P}$, onde $p\downarrow = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. Se $G \subset p\downarrow$ é um filtro em $p\downarrow$, então $G^* = \{q \in \mathbb{P} : \exists r \in G\ r \leq q\}$ é um filtro sobre $\mathbb{P}$.*

Proposição 2.5.2. *Se vale $MA_{\aleph_1}$, então para toda ordem $\mathbb{P}$ e todo $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}$ não enumerável, existe $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ não enumerável centrado (isto é, se $F \subset \mathcal{A}'$ é finito, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq q$ para todo $q \in F$).*

Demonstração. Sem perda de generalidade, escreva $\mathcal{A} = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Para cada α, considere

$$D_\alpha = \{d : \exists \beta \geq \alpha\ d \leq p_\beta\}.$$

Note que, se $\xi < \eta$, então $D_\eta \subset D_\xi$. Temos dois casos - suponha que existe p tal que todos os D_α's são densos abaixo de p. Nesse caso, como $p\downarrow$ é ccc e

$D_\alpha \cap p\downarrow$ é denso em $p\downarrow$, por $MA_{\aleph_1}$, existe G filtro $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$-genérico. Considere G^* o filtro como acima e note que, como $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ implica que existe $\beta \geq \alpha$ tal que $p_\beta \in G^*$. Ou seja $\{\alpha < \omega_1 : p_\alpha \in G^*\}$ é ilimitado e, portanto, não enumerável. Como todo subconjunto de um filtro é centrado (exercício), temos o resultado desejado.

Agora vamos mostrar que o segundo caso é impossível. Isto é, que não existir p tal que todo D_α é denso abaixo de p gera uma contradição. Supondo a não existência, em particular temos, para todo todo ξ, existe α_ξ tal que D_{α_ξ} não é denso abaixo de p_ξ. Ou seja, para todo ξ existe $r_\xi \leq p_\xi$ tal que não existem $d \leq r_\xi$ e $\beta \geq \alpha_\xi$ tais que $d \leq r_{\alpha_\xi}$ (em particular, $\alpha_\xi > \xi$). Note que $r_\xi \perp r_\eta$ se $\alpha_\xi < \eta$. De fato, se $s \leq r_\xi, r_\eta$, s daria uma contradição com a definição de r_ξ. Assim, podemos contruir recursimavamente uma anticadeia ilimitada em $\{r_\xi : \xi < \omega_1\}$, contrariando o fato de $\mathbb{P}$ ser ccc. □

Proposição 2.5.3. *($MA_{\aleph_1}$) Se $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ são ccc, então $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ é ccc.*

Demonstração. Seja $\{(p_\xi, q_\xi) : \xi < \omega_1\} \subset \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{P}$ é ccc, pelo resultado anterior, podemos supor que $\{p_\xi : \xi < \omega_1\}$ forma um conjunto centrado. Como $\mathbb{Q}$ é ccc, existem α, β distintos tais que $q_\alpha \not\perp q_\beta$. Assim, $(p_\alpha, q_\alpha) \not\perp (p_\beta, q_\beta)$. □

2.6 Ideia geral de forcing, via modelos enumeráveis transitivos

Nesta seção, daremos uma ideia geral da justificativa da técnica de forcing, usando modelos. Esta não será a maneira que abordaremos mais tarde, mas pelo menos sua ideia já é acessível no momento.

Suponha que queremos mostrar a consistência de $\neg CH$. Note que isso pode ser feito se, por exemplo, mostrarmos a consistência da existência de uma função $f : \wp(\omega) \to \omega_2$ sobrejetora. Uma maneira de se mostrar isso é apresentando um modelo onde isso ocorra - aqui já aparece um primeiro problema, uma vez que não podemos mostrar a existência de um modelo para ZFC, muito menos para ZFC + existência de tal função.

Uma solução para tal problema é, novamente, modelar apenas o necessário:

Princípio de forcing (versão intuitiva): Fixada uma fórmula φ, suponha que para cada $\varphi_1, ..., \varphi_n$ axiomas de ZFC + φ, existem axiomas $\psi_1, ..., \psi_m$ em ZFC tais que:

Para todo modelo M "bom" tal que $M \vDash \psi_1, ..., \psi_m$, é possível expandir M para um modelo "bom" $N \supset M$ tal que $N \vDash \varphi_1, ..., \varphi_n$.

Então, se ZFC é consistente, ZFC + φ também é.

O que queremos como modelo "bom", vamos discutir depois. Primeiramente, vejamos que para provar o princípio, só precisamos do seguinte tipo de resultado:

Existência de modelos: Fixados $\psi_1, ..., \psi_n$ axiomas de ZFC, existe M modelo "bom" tal que $M \vDash \psi_1, ..., \psi_n$.

Com isso, vamos à demonstração do princípio:

Prova do princípio: Suponha que $ZFC + \varphi$ seja inconsistente. Então existe uma demonstração para $A \wedge \neg A$. Sejam $\varphi_1, ..., \varphi_n$ axiomas de ZFC + φ usados na demonstração de $A \wedge \neg A$. Sejam $\psi_1, ..., \psi_m$ axiomas de ZFC satisfazendo a hipótese do princípio. Pelo resultado da existência de modelos, existe M tal que $M \vDash \psi_1, ..., \psi_m$. Assim, novamente pela hipótese do princípio, temos que existe N tal que $N \vDash \varphi_1, ..., \varphi_n$, o que é uma contradição.

Vejamos agora uma maneira de obter a hipótese do princípio. Suponha M um modelo "bom" para uma subcoleção finita de axiomas de ZFC - por enquanto não vamos fixar para qual coleção exatamente, deixando isso como "grande o suficiente". Suponha A um conjunto tal que $A \notin M$. Suponha possível a construção $M[A]$ - aqui indicamos por $M[A]$ o menor modelo "bom" tal que $M \subset M[A]$ e $A \in M[A]$. O que queremos é que $M[A]$ satisfaça coleções arbitrariamente grandes, mas finitas, de axiomas de ZFC, mais algumas outras afirmações. Note que dada uma afirmação ψ (um axioma de ZFC ou não), uma demonstração para $M[A] \vDash \psi$ seria da forma: "isso é satisfeito, uma vez que $A \in M[A]$, $M \subset M[A]$ e $M[A] \vDash \varphi_1, ..., \varphi_n$", onde $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Note que então bastaria voltar na hipótese de criação de M para escolher quais exatamente axiomas gostaríamos que M satisfizesse.

Ou seja, agora resta vermos como estender M para $M[A]$. Para facilitar um pouco o argumento, vamos para um caso particular. Vamos tentar mostrar a consistência de $\neg CH$. $\neg CH$ é equivalente à afirmação "existe $f : \wp(\omega) \to \omega_2$ sobrejetora". Então poderíamos tentar o seguinte: considere $\wp(\omega)^M, \omega_2^M \in M$ como os elementos que fazem o papel de $\wp(\omega)$ e ω_2 em M respectivamente. Suponha que possamos mostrar que existe uma função $f : \wp(\omega)^M \to \omega_2^M$ (não necessariamente em M) sobrejetora. Então $M[f]$ parece ser um bom candidato para modelar $\neg CH$.

Vamos examinar essa passagem mais de perto. A princípio, podemos ter que f de fato satisfaça ser "uma função de $\wp(\omega)^M$ em ω_2^M sobrejetora" em $M[f]$ - isso depende um pouco de como podemos passar afirmações de um modelo para o outro. Mas mesmo assim, temos um problema: a princípio não temos um motivo forte para afirmar que $\wp(\omega)^M = \wp(\omega)^{M[f]}$ ou que

$\omega_2^M = \omega_2^{M[f]}$. Isso não ocorrendo, pode até ser que f satisfaça ser uma função sobrejetora, mas o domínio e o contradomínio podem não ser os que a gente gostaria que fossem.

É agora que precisamos discutir um pouco sobre o que poderia ser o tal modelo "bom" que usamos acima. Num primeiro momento, poderia parecer que pedir em M, $M[f]$ fossem submodelos elementares de algum $H(\kappa)$ grande o suficiente resolveria o problema - afinal, pela elementariedade, $\wp(\omega)^M = \wp(\omega)^{M[f]}$ e $\omega_2^M = \omega_2^{M[f]}$. Mas o problema passaria a ser como conseguir a própria f: se $f \in H(\kappa)$, então, novamente pela elementariedade, valeria "$f : \wp(\omega) \to \omega_2$ é sobrejetora" no próprio $H(\kappa)$ - o que simplesmente quer dizer que vale $\neg CH$ (nada de consistência aqui, consequência pura e simples).

Desta forma, elementariedade é pedir demais. É claro que podemos simplesmente trabalhar com a ideia geral de modelo (abandonar a restrição de ser "bom"). Mas isso criaria certas complicações (por exemplo, como construir $M[f]$, como conseguir a própria f e, principalmente, como decidir o que vale em $M[f]$). Numa tentativa de simplificar as coisas, vamos pedir duas propriedades:

- Os modelos precisam ser standard (isto é, $\in$ é interpretado como pertencer mesmo);

- Termos que algumas fórmulas "básicas" tenham sua verificação de validade de maneira fácil.

Note que com o que temos até agora, um candidato natural para "bom" são os modelos transitivos - o segundo item já conta com todas as fórmulas Δ_0. Por outro lado, como era de se esperar, não podemos afirmar imediatamente que coisas como $\omega_2^M = \omega_2^{M[f]}$. Mas um outro problema já caminha para uma solução: a existência de f. Suponha que $|M| \leq \aleph_1$. Então, pela transitividade de M, temos que $|\wp(\omega)|^M|, |\omega_2^M| \leq \aleph_1$. Ou seja, trabalhando fora de M, temos de fato uma chance de que exista uma f como queremos. Na verdade, vamos trabalhar com $|M| \leq \aleph_0$ (o que de fato melhora o argumento anterior), mas os motivos para isso ficarão mais claros abaixo.

Com tudo isso, o que nos falta de fato é como construir $M[f]$ a partir de M e f. Teremos um conjunto $N \subset M$, cujo cada elemento será chamado de **nome**. Em geral, $N \notin M$. Uma maneira de imaginar a função de um nome x é tomá-lo como uma função: uma vez dada f, $x(f)$ é um conjunto. Grosso modo, teremos

$$M[f] = \{x(f) : x \in N\}.$$

Uma analogia aqui é pensar em cada nome como sendo um polinômio de coeficientes racionais. Sabemos

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{p(\sqrt{2}) : p \text{ polinômio de coeficientes racionais}\}$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{p(\sqrt{3}) : p \text{ polinômio de coeficientes racionais}\}$$

A ideia é que esses dois conjuntos são diferentes e de fato satisfazem afirmações diferentes: por exemplo, "$\exists x\ x^2 = 2$" é satisfeito no primeiro, mas não no segundo. A analogia aqui é a seguinte: com os polinômios (nomes) conseguimos descrever todos os elementos destes conjuntos - mas só conseguimos descrever completamente cada elemento uma vez sabendo qual o valor de x (f).

Note que, como no caso dos polinômios, pode ocorrer que $x(f) = y(f)$, mesmo quando $x \neq y$. Outra coisa é, novamente como no caso dos polinômios, existem alguns nomes especiais tais que, dado um conjunto a, existe um nome "especial" $\breve{a}$ de forma que, não importa qual a f, $\breve{a}(f) = a$ - no caso dos polinômios, isso seriam os contantes. Note que com isso já ganhamos $M \subset M[f]$.

Resta ver o que $M[f]$ satisfaz. Para boa parte das afirmações, teremos uma demonstração no formato descrito acima: uma afirmação φ vale em $M[f]$ uma vez que $\psi_1, ..., \psi_n$ valem em M.

Restam afirmações mais problemáticas como "$\omega_2^M = \omega_2^{M[f]}$. Veremos que para certas construções, isso vai valer (isso vai depender do que é exatamente f). Uma parte do argumento passa por algo como calcular quantos nomes para subconjuntos de ω existem dentro de M - não de fora, mas dentro de M, isto é, se M satisfaz que tal conjunto é enumerável ou não etc.

Finalmente, vejamos um pouco melhor como obter tal f. Não é de se esperar que a construção acima seja feita apenas para acrescentar uma única f - isso talvez resolvesse o caso $\neg CH$, mas pareceria muito específico para ser aplicado em outro problemas. De fato, o que normalmente é feito é o seguinte: fixa-se uma ordem $\mathbb{P}$ (que chamamos de **forcing**) (toma-se M de forma que $\mathbb{P} \in M$) e o que se acrescenta é um G. Tal G é um filtro sobre $\mathbb{P}$ de forma que, para qualquer D denso em $\mathbb{P}$ tal que $D \in M$, temos que $D \cap G \neq \emptyset$. Para a maioria dos $\mathbb{P}$'s, é impossível a existência de um G filtro que intercepte todos os densos - mas lembre que estamos fazendo isso fora de M - a intenção é até que $G \notin M$. Daí aqui aparece uma motivação para mais uma restrição para "bom" nos modelos: que, além deles serem transitivos, eles sejam enumeráveis. Isso automaticamente implicaria a existência (fora de M) de tal G: como M é enumerável, só existem enumeráveis densos pertencentes a M. E, para tal quantidade de densos, sempre é possível encontrar um G como o desejado.

Note que pela técnica de nomes, automaticamente o $M[f]$ - agora $M[G]$ - é enumerável. Também é possível mostrar que é tal conjunto é transitivo.

Ou seja, o único resultado faltante seria provar o resultado sobre existência de modelos enumeráveis transitivos para qualquer fragmento finito de ZFC (note que comentamos como obter enumerável, mas não transitivo). Isso é possível, mas é um processo um tanto longo - e não muito útil para o que vamos fazer na sequência (mas pode ser encontrado em [**?**]).

O que vamos fazer na sequência é apresentar (em detalhes) uma técnica parecida, que faz uso de álgebras de Boole.

Capítulo 3

Forcing - ideia básica

3.1 Álgebras de Boole

Começamos com um breve básico sobre álgebras de Boole.

Neste capítulo, estamos seguindo principalmente [?, ?].

Definição 3.1.1. Chamamos de uma **álgebra de Boole** um conjunto A munido de duas operações binárias $+$ e $\cdot$ e uma unária $-$ com dois elementos denotados por $0, 1 \in A$ tais que, para todo $a, b, c \in A$:

Normalmente denotamos por ab em vez de $a \cdot b$.

- $a \cdot b = b \cdot a$ e $a + b = b + a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ e $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ e $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- $a \cdot (a + b) = a + (a \cdot b) = a$
- $a \cdot (-a) = 0$ e $a + (-a) = 1$

Exemplo 3.1.2. Seja X um conjunto. Então $\wp(X)$ com as operações de $\cup$ e $\cap$ forma uma álgebra de Boole.

Exemplo 3.1.3. O conjunto $\{0, 1\}$ interpretado como 0 sendo falso e 1 sendo verdadeiro, mais as operações $\vee$ (ou), $\wedge$ (e) e $\neg$ (negação), formam uma álgebra de Boole.

Algumas propriedade básicas (e de fácil demonstração) são:

Proposição 3.1.4. *Seja A uma álgebra de Boole. Então, para todo $a, b \in A$, temos:*

- $a + a = aa = a$

- $a0 = 0$ e $a + 1 = 1$
- $a1 = a$ e $a + 0 = a$
- $-0 = 1$ e $-1 = 0$

Note que, para o caso de $\wp(X)$, $a \leq b$ assim definido simplesmente significa $a \subset b$.

Definição 3.1.5. Seja A uma álgebra de Boole. Para $a, b \in A$, definimos $a \leq b$ se $ab = a$. Essa é a ordem usual numa álgebra de Boole (ver Exercício 3.1.8).

Definição 3.1.6. Dizemos que uma álgebra de Boole é **completa** se todo $X \subset A$ admite supremo.

Exercícios

Exercício 3.1.7. Mostre que existe uma única álgebra de Boole com dois elementos.

Exercício 3.1.8. Mostre que $\leq$ definida acima é de fato uma ordem.

Exercício 3.1.9. Seja A uma álgebra de Boole. Mostre que, dados $a, a', b, b' \in A$, se $a \leq b$ e $a' \leq b'$, então $aa' \leq bb'$.

Exercício 3.1.10. Mostre que para todo $a \in A$, $0 \leq a \leq 1$.

Exercício 3.1.11. Mostre que $a \leq b$ se, e somente se, $a + b = b$.

Exercício 3.1.12. Seja A uma álgebra de Boole. Sejam $a, b \in A$. Denotamos por $a - b = a \cdot (-b)$. Mostre que $a \not\leq b$ se, e somente se, $a - b \neq 0$.

3.2 Ideia geral de forcing, via álgebras de Boole

O que faremos na sequência é, informalmente, atribuir a cada fórmula da linguagem de teoria dos conjuntos um valor numa álgebra de Boole fixada. Assim, dada uma fórmula φ, indicaremos por $[\![\varphi]\!]$ seu valor atribuido.

Tal atribuição respeitará algumas regras, como por exemplo $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!][\![\psi]\!]$ e $[\![\neg\varphi]\!] = -[\![\varphi]\!]$. Com esse tipo de regras, vamos obter automaticamente que, se $\varphi \rightarrow \psi$, então $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$. Finalmente, faremos a atribuição de valores de forma que se φ é um axioma de ZFC, então $[\![\varphi]\!] = 1$. Note que com tudo isso, qualquer consequência de axiomas de ZFC também terá valor 1.

Com todas essas propriedades, temos um roteiro de como tentar provar a consistência de uma certa φ: primeiramente, note que provar que φ é consistente é o mesmo que provar que $\neg\varphi$ não é consequência de ZFC. Assim, provar a consistência de φ se resume a provar que $[\![\varphi]\!] > 0$. De fato, suponha que $[\![\varphi]\!] > 0$ e que φ não seja consistente. Então existe uma demonstração para $\neg\varphi$ e, portanto, $[\![\varphi]\!] = -[\![\neg\varphi]\!] = -(1) = 0$, contradição.

Sabendo que o necessário para o resultado funcionar é a existência de uma atribuição de valores às fórmulas de maneira que as acima se apliquem, passamos à discussão de como fazer tal atribuição. Note que para valer as propriedades relativas a conectivos, uma maneira direta é a definição por indução na complexidade das fórmulas de forma adequada. Dessa forma, a escolha de como atrinuir os valores se resume às fórmulas atômicas. Ou seja, precisamos discutir como atribuir um valor para $[\![x \in y]\!]$ e $[\![x = y]\!]$. Se nos restringirmos a interpretar x e y como conjuntos usuais, é de se esperar que não teremos valores diferentes de 0 e 1 e, como consequência, só vamos conseguir determinar o valor das fórmulas para as quais temos uma prova de fato (da própria afirmação ou de sua negação). Precisamos então de algo mais amplo que isso.

3.3 Dando valores às fórmulas

Nesta seção, trabalharemos sempre com uma álgebra de Boole completa A fixada. Também vamos usar a notação $a \Rightarrow b$ para $-a + b$. Vamos usar diversas vezes a seguinte equivalência, para quaisquer $a, b \in A$:

$$a \leq b \text{ se, e somente, } a \Rightarrow b = 1$$

Definição 3.3.1. Vamos chamar um conjunto τ de um **nome** se τ é uma função tal que todo elemento de seu domínio é um nome e todo elemento da imagem é um elemento de $A \setminus \{0\}$.

Atenção, isso é uma definição recursiva.

Exemplo 3.3.2. Por vacuidade, $\emptyset$ é um nome. Assim, $\sigma = \{(\emptyset, a)\}$ também é um nome se $a \in A$. Dados $b, c \in A$, temos que $\{(\emptyset, b), (\sigma, c)\}$ é um nome.

A ideia aqui é que dado um par $(\sigma, a) \in \tau$, a "mede" quanto é a chance σ pertencer a τ. Agora, vamos usar essa ideia para atribuir valores booleanos para todas as fórmulas. Para isso, vamos sempre substituir as variáveis por nomes. Começamos com as atômicas:

Definição 3.3.3. Dados dois nomes σ, τ, definimos

$$[\![\sigma \in \tau]\!] = \sup_{t \in \mathrm{dom}(\tau)} [\![\sigma = t]\!]\tau(t)$$

$$[\![\sigma \subset \tau]\!] = \inf_{t \in dom(\sigma)} (\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \tau]\!])$$

$$[\![\sigma = \tau]\!] = [\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau \subset \sigma]\!]$$

Um jeito de pensar é que as fórmulas não tem um valor "verdadeiro" ou "falso", mas um "nível de força", que varia dentro de A.

Formalmente, essa definição é recursiva. A ideia na primeira definição é mais ou menos a seguinte: $\sigma \in \tau$ tem valor mais alto conforme algum $t \in \mathrm{dom}(\tau)$ tiver $[\![\sigma = t]\!]$ alto e, ao mesmo tempo, o valor de $t \in \mathrm{dom}(\tau)$ for alto. De certa forma, $\tau(t)$ mede o quanto vale t pertencer a τ e $[\![\sigma = t]\!]$ mede o quanto vale σ ser igual a t.

Como essa definição é recursiva, podemos usar o *rank* como definimos anteriormente para ajudar a trabalhar com ela. Por exemplo, a primeira parte diz que podemos definir $[\![\sigma \in \tau]\!]$ se já sabemos a definição de $[\![\sigma = t]\!]$ onde $rank(t) < rank(\sigma)$. Vamos mostrar o seguinte resultado, que usa bem essa ideia:

A ideia disso é que a chance de $\sigma = \sigma$ é 1, ou seja, é a máxima possível.

Proposição 3.3.4. *Seja σ nome qualquer. Então $[\![\sigma = \sigma]\!] = 1$.*

Demonstração. Vamos provar isso por indução sobre o $rank(\sigma)$. Por definição, temos que mostrar que $[\![\sigma \subset \sigma]\!] = 1$. Para isso, temos que mostrar que $\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \sigma]\!] = 1$ para todo $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$. Ou seja, precisamos mostrar que $\sigma(t) \leq [\![t \in \sigma]\!]$ para todo $t \in \mathrm{dom}(t)$. Temos:

$$[\![t \in \sigma]\!] = \sup_{s \in \mathrm{dom}(\sigma)} [\![s = t]\!]\sigma(t)$$

Assim, por hipótese de indução, $[\![t = t]\!] = 1$ e, portanto, o supremo da expressão acima é maior ou igual a $[\![t = t]\!]\sigma(t) = \sigma(t)$. □

Exemplo 3.3.5. Com o resultado anterior, temos como provar a ideia intuitiva que tínhamos antes: considere $\sigma = \{(\emptyset, a)\}$ para algum $a \in A$. Lembrando, esse nome tem a possibilidade de um único elemento ($\emptyset$) e a "força" deste elemento estar em σ é dada por a. De fato, podemos calcular:

$$\begin{aligned} [\![\emptyset \in \sigma]\!] &= \sup\nolimits_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)} [\![\emptyset = t]\!]\sigma(t) \\ &= [\![\emptyset = \emptyset]\!]\sigma(\emptyset) \\ &= 1\sigma(\emptyset) \\ &= a \end{aligned}$$

Proposição 3.3.6. *Dados σ, τ e ρ nomes, temos:*

(a) $[\![\sigma = \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma = \rho]\!]$

(b) $[\![\sigma \in \tau]\!][\![\sigma = \rho]\!] \leq [\![\rho \in \tau]\!]$

(c) $[\![\sigma \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma \in \rho]\!]$

Demonstração. Isso precisa ser provado por indução sobre o *rank* de σ, τ e ρ. E fazemos isso supondo as 3 condições ao mesmo tempo para nomes de *rank* menor. Vamos apresentar a demonstração da condição (a), deixando as outras como exercício:

Note que é suficiente provarmos que

$$[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![\sigma \subset \rho]\!]$$

De fato, provando a inequação acima e invertendo os papéis de de σ e de ρ, temos:

$$[\![\rho \subset \tau]\!][\![\tau = \sigma]\!] \leq [\![\rho \subset \sigma]\!]$$

Multiplicando-se lado a lado as duas últimas, obtemos:

$$[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!][\![\rho \subset \tau]\!][\![\tau = \sigma]\!] \leq [\![\sigma \subset \rho]\!][\![\rho \subset \sigma]\!].$$

Note que, simplificando ambos os lados, obtemos a inequação desejada.

Assim, pela definição de $[\![\cdot \subset \cdot]\!]$, temos:

$$\begin{aligned}
[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] &= \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \tau]\!])[\![\tau = \rho]\!] \\
&= \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(-\sigma(t) + [\![t \in \tau]\!])[\![\tau = \rho]\!] \\
&= \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(([\![\tau = \rho]\!] - \sigma(t)) + [\![t \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!])
\end{aligned}$$

Note que, para qualquer $t \in \mathrm{dom}(\sigma)$,

$$[\![\tau = \rho]\!] - \sigma(t) \leq -\sigma(t)$$

e que, por hipótese de indução,

$$[\![t \in \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] \leq [\![t \in \rho]\!]$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
[\![\sigma \subset \tau]\!][\![\tau = \rho]\!] &\leq \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(-\sigma(t) + [\![t \in \rho]\!]) \\
&= \inf_{t \in \mathrm{dom}(\sigma)}(\sigma(t) \Rightarrow [\![t \in \rho]\!]) \\
&= [\![\sigma \subset \rho]\!]
\end{aligned}$$

$\square$

O próximo lema nos indica que, de fato, $x(y)$ mede a força de $y \in x$. Mas aqui há um pequeno ajuste. Suponha que exista um outro possível elemento de x - vamos chamá-lo de z. Então z tem força $x(z)$ de estar em x. Mas poderia ocorrer que $[\![z = y]\!]$ tivesse valor alto. Desta forma, seria natural esperamos que $[\![y \in x]\!]$ tivesse valor ainda maior que $x(y)$ (já que deveríamos levar em conta também o valor de $x(z)$).

Lema 3.3.7. *Sejam x, y nomes. Se $y \in dom(x)$, então $x(y) \leq [\![y \in x]\!]$.*

Demonstração. Suponha $y \in \mathrm{dom}(x)$. Então

$$[\![y \in x]\!] = \sup_{t \in dom(x)} [\![y = t]\!] x(t) \geq [\![y = y]\!] x(y) = x(y)$$

□

Definição 3.3.8. Dada uma fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$, onde x_i's indicam suas variáveis livres, e dados $\tau_1, ..., \tau_n$ nomes, definimos $[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$ por recursão sobre a complexidade de φ da seguinte maneira:

- Se $\varphi(x_1, x_2)$ é da forma "$x_1 \in x_2$" ou "$x_1 = x_2$", fazemos como anteriormente.
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\neg\psi(x_1, ..., x_n)$, definimos
$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = -[\![\psi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$$
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\psi(x_1, ..., x_n) \wedge \psi'(x_1, ..., x_n)$, definimos
$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = [\![\psi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!][\![\psi'(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$$
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\psi(x_1, ..., x_n) \vee \psi'(x_1, ..., x_n)$, definimos
$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = [\![\psi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] + [\![\psi'(\tau_1, ..., \tau_n)]\!]$$
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\exists y \ \psi(y, x_1, ..., x_n)$, definimos
$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = \sup_\sigma [\![\psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)]\!],$$
onde $\sup_\sigma$ indica o supremo com relação a todos os σ nomes.
- Se $\varphi(x_1, ..., x_n)$ é da forma $\forall y \ \psi(y, x_1, ..., x_n)$, definimos
$$[\![\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)]\!] = \inf_\sigma [\![\psi(\sigma, \tau_1, ..., \tau_n)]\!],$$
onde $\inf_\sigma$ indica o ínfimo com relação a todos os σ nomes.

Note que, apesar da coleção de todos os nomes não formar um conjunto, tomar o supremo de valores booleanos com relação a todos os nomes como acima não é um problema, uma vez que os valores variam dentro da álgebra de Boole fixada.

Lema 3.3.9. *Sejam φ, ψ fórmulas. Então $[\![\varphi \to \psi]\!] = 1$ se, e somente se, $[\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$.*

Demonstração. Note que $[\![\varphi \to \psi]\!] = -[\![\varphi]\!] + [\![\psi]\!]$. Note que $-a + b = 1$ se, e somente se, $a \leq b$ para qualquer a, b na álgebra de Boole. □

Proposição 3.3.10. *Considere φ o axioma da extensionalidade. Isto é,*

$$\forall x\ \forall y\ x = y \leftrightarrow (\forall z\ (z \in x \to z \in y) \land (z \in y \to z \in x))$$

Então $[\![\varphi]\!] = 1$.

Demonstração. Note que, para isso, só precisamos mostrar que, dados a, b nomes, temos que $[\![a = b]\!] = [\![a \subset b]\!][\![b \subset a]\!]$. Mas isso segue diretamente das definições. □

Proposição 3.3.11. *Considere φ o axioma do par. Isto é*

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ x \in z \land y \in z$$

Então $[\![\varphi]\!] = 1$.

Demonstração. Fixe a, b nomes. Considere o nome $c : \{a, b\} \longrightarrow A$ tal que $c(a) = 1$ e $c(b) = 1$. Basta mostrar que $[\![a \in c]\!][\![b \in c]\!] = 1$. Mas isso segue diretamente do fato que $c(a) \leq [\![a \in c]\!]$ e que $c(b) \leq [\![b \in c]\!]$. □

De maneira parecida podemos provar que todos os axiomas de ZFC tem valor 1 (os resultados da próxima seção ajudam bastante para isso).

Exercícios

Exercício 3.3.12. Sejam X, Y com relações **bem fundadas** (isto é, uma relação sem cadeias decrescente infinitas). Mostre que $\langle x_1, y_1 \rangle < \langle x_2, y_2 \rangle$ dada por

$$(x_1 = x_2 \land y_1 < y_2) \lor (x_1 < x_2 \land y_1 = y_2)$$

é bem fundada sobre $X \times Y$.

Exercício 3.3.13. Dado α ordinal defina, por indução, $Z_\alpha = \{\langle \sigma, 0 \rangle : \sigma \in \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta\}$.

A ideia aqui é que cada Z_α é um nome complicado para $\emptyset$.

(a) Mostre que cada Z_α é um nome.

(b) Mostre que $[\![\neg(\exists x\ x \in Z_\alpha)]\!] = 1$.

Compare com o Lema 3.3.7.

Exercício 3.3.14. Dizemos que um nome σ é **extensional** se, para todo $x \in \mathrm{dom}(\sigma)$, $\sigma(x) = [\![x \in \sigma]\!]$. Mostre que para todo τ nome, existe σ extensional tal que $[\![\sigma = \tau]\!] = 1$.

3.4 Aumentando o universo

A ideia nesta seção é pensarmos que as fórmulas falam sobre nomes como se fossem conjuntos. Dentre os nomes, teremos alguns que se comportam de maneira muito parecida com os conjuntos "normais" e outros que não são dessa forma. Pense nos da segunda forma como se fossem conjuntos novos e os da primeira forma como se fossem os originais.

A seguinte definição indica os conjuntos originais:

Definição 3.4.1. Seja x um conjunto. Definimos o nome $\check{x}$ de maneira recursiva da seguinte maneira: $\check{x} = \{(\check{y}, 1) : y \in x\}$.

Note que $\check{\emptyset} = \emptyset$.

Proposição 3.4.2. *Sejam x, y conjuntos. Então*

Olhe para essa proposição da seguinte forma: se vale uma relação entre x e y, a mesma relação vale com suas respectivas cópias com força total. Se tal relação não vale, então sua negação vale com força total nas cópias.

(a) se $x \in y$ então $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 1$.

(b) se $x \notin y$ então $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 0$.

(c) se $x \subset y$ então $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = 1$.

(d) se $x \not\subset y$ então $[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = 0$.

Demonstração. Vamos mostrar todas as condições por indução sobre o *rank* de x e y ao mesmo tempo:

(a) Suponha $x \in y$. Então

$$\begin{array}{rcl} [\![\check{x} \in \check{y}]\!] & = & \sup_{t \in \mathrm{dom}(\check{y})} [\![t = \check{x}]\!]\check{y}(t) \\ & \geq & [\![\check{x} = \check{x}]\!]\check{y}(\check{x}) \\ & = & 1 \end{array}$$

(b) Suponha $x \notin y$. Por hipótese de indução, para todo $t \in y$, temos que $[\![\check{x} = \check{t}]\!] = 0$ (pois $x \neq t$). Assim, $[\![\check{x} \in \check{y}]\!] = 0$.

(c) Suponha $x \subset y$. Seja $t \in dom(\check{x})$. Além disso, por hipótese de indução, $[\![t \in \check{y}]\!] = 1$ já que $t \in y$. Logo,

$$[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \inf_{t \in \mathrm{dom}(x)} (\check{x}(t) \Rightarrow [\![t \in y]\!]) = 1$$

(d) Suponha $x \not\subset y$. Então existe $t \in x$ tal que $t \notin y$. Logo, por hipótese de indução, $[\![t \in \check{y}]\!] = 0$. Assim

$$[\![\check{x} \subset \check{y}]\!] = \inf_{s \in \mathrm{dom}(\check{x})} (\check{x}(s) \Rightarrow [\![s \in \check{y}]\!]) \leq (\check{x}(t) \Rightarrow [\![t \in \check{y}]\!]) = 0$$

$\square$

Mas nem todos os elementos nesta extensão são da forma $\check{x}$ para algum x:

Definição 3.4.3. Chamamos de $\dot{G}$ o nome $\dot{G} : \{\check{a} : a \in A\} \longrightarrow A$ dado por $\dot{G}(\check{a}) = a$.

Este nome também costuma ser denotado por Γ.

Lema 3.4.4. *Seja $a \in A$. Então $[\![\check{a} \in \dot{G}]\!] = a$.*

Demonstração. Note que, dado $\check{t} \in \mathrm{dom}(\dot{G})$, temos $[\![\check{a} = \check{t}]\!] = 1$ se $a = t$ ou $[\![\check{a} = \check{t}]\!] = 0$ se $t \neq a$. Assim

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!] = \sup_{\check{t} \in \mathrm{dom}(\dot{G})} [\![\check{t} = \check{a}]\!]\dot{G}(\check{a}) = \dot{G}(\check{a}) = a$$

$\square$

Em particular, $[\![1 \in \dot{G}(\check{1})]\!] = 1$ e $[\![0 \in \dot{G}(\check{0})]\!] = 0$.

Antes de continuarmos, um pequeno comentário sobre notação: vamos usar alguns valores da forma $[\![x \leq y]\!]$. Formalmente, precisamos lembrar que $\leq$ é dado por um conjunto de pares (para facilitar, vamos chamar tal conjunto de pares de R). Então a fórmula acima na verdade é $[\![(x, y) \in \check{R}]\!]$. Como aparece o par ordenado, precisaríamos ainda trocar o termo (x, y) por sua definição formal - não vamos fazer isso (mas é esperado o exercício mental de ver que isso seria possível). Finalmente, se $a, b \in A$, não é muito difícil de ver $[\![(\check{a}, \check{b}) = \check{(a, b)}]\!] = 1$. Finalmente, se $a, b \in A$, temos pelos comentários acima e pela Proposição 3.4.2 que $[\![\check{a} \leq \check{b}]\!] = 1$ se $a \leq b$ e que $[\![\check{a} \leq \check{b}]\!] = 0$ se não vale $a \leq b$.

Proposição 3.4.5. $[\![\dot{G}$ *é filtro sobre* $\check{A}]\!] = 1$.

Demonstração. Note que $[\![\check{1} \in \dot{G}]\!] = 1$. Sejam $a, b \in A$. Vamos mostrar que

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \dot{G}]\!] \leq [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq \check{a}, \check{b}]\!]$$

$$\begin{aligned} [\![\check{a} \in G]\!][\![\check{b} \in G]\!] &= ab \\ &= [\![\check{ab} \in \dot{G}]\!] \\ &= [\![\check{ab} \in \dot{G}]\!][\![\check{ab} \leq \check{a}, \check{b}]\!] \\ &\leq [\![\exists \tau\ \tau \in \dot{G} \wedge \tau \leq \check{a}, \check{b}]\!] \end{aligned}$$

Ou seja, provamos que

$$[\![\check{a} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \dot{G}]\!] \Rightarrow [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq \check{a}, \check{b}]\!] = 1$$

Tomando-se os ínfimos para a e b, obtemos

$$[\![\forall a \in \dot{G} \forall b \in \dot{G}]\!] \Rightarrow [\![\exists c\ c \in \dot{G} \wedge c \leq a, b]\!] = 1$$

A terceira condição sobre filtros é análoga. $\square$

Proposição 3.4.6. *Se D é denso em A, então* $[\![\dot{G} \cap \check{D} \neq \emptyset]\!] = 1$.

Demonstração. Vamos provar que

$$a = [\![\exists x\ x \in \check{D} \wedge x \in \dot{G}]\!] = 1$$

Suponha que não. Então $1 - a > 0$. Seja $b \in D$ tal que $0 \neq b \leq 1 - a$. Note que

$$b = [\![\check{b} \in \dot{G}]\!] = [\![\check{b} \in \dot{G}]\!][\![\check{b} \in \check{D}]\!]$$

Assim, $b \leq a$, contrariando o fato que $b \leq 1 - a$. $\square$

Isso em particular nos dá a ideia que o conjunto representado por $\dot{G}$ é um conjunto novo: em geral, não existe um G filtro que intercepte todos os densos D. Mas note que não temos uma contradição aqui. $\dot{G}$ intercepta todos os densos "velhos" (os da forma $\check{D}$). Ou seja, com certeza existe um denso "novo" tal que $\dot{G}$ não o intercepta.

Na sequência, vamos ver mais algumas propriedades básicas dos nomes padrão. Considere a álgebra de Boole trivial $A = \{0, 1\}$. Como nas imagens dos nomes só aceitamos valores diferentes de 0, nomes com relação a essa álgebra só assumem valores 1. Isso motiva o seguinte:

Definição 3.4.7. Dizemos que x é um **1-nome** se x é da forma

$$\{\langle y, 1 \rangle : y \text{ é 1-nome}\}$$

Note que, em particular, todo $\check{x}$ é um 1-nome. O próximo resultado mostra que estes dois conceitos, como era de se esperar, identificam a mesma coisa:

Proposição 3.4.8. *Seja x um 1-nome. Então existe a tal que $x = \check{a}$.*

Demonstração. Procedemos por indução sobre o rank de x. Por hipótese de indução, todo elemento de x é da forma $\langle \check{b}, 1 \rangle$. Assim, $x = \check{B}$, onde B é o conjunto das primeiras coordenadas dos elementos de x. $\square$

Como comentado acima, se considerarmos como A a álgebra de Boole trivial, todos os nomes são 1-nomes e, portanto, são da forma *check*. No caso dessa álgebra de Boole, tudo é mantido com relação aos conjuntos originais:

Proposição 3.4.9. *Fixe $\varphi(v_1, ..., v_n)$. Sejam $x_1, ..., x_n$ conjuntos. Então*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) \text{ se, e somente se, } [\![\varphi(\check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] = 1$$

onde $[\![\cdot]\!]$ é tomado com relação à álgebra de Boole $\{0, 1\}$.

Demonstração. Por indução sobre a complexidade de φ. Note que se φ é atômica, isso nada mais é que a Proposição 3.4.2. Para os conectivos, a indução é trivial. Resta fazer um dos quantificadores. Suponha $\varphi(v_1, ..., v_n)$ da forma $\exists v\ \psi(v, v_1, ..., v_n)$. Vejamos as duas implicações.

Suponha $\exists v\ \psi(v, x_1, ..., x_n)$. Seja x conjunto tal que $\psi(x, x_1, ..., x_n)$. Por hipótese de indução, temos $[\![\psi(\check{x}, \check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] = 1$. Note que isso implica $[\![\exists v\ \psi(v, \check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] = 1$ como queríamos.

Agora suponha $[\![\exists v\ \psi(v, x_1, ..., x_n)]\!] = 1$. Isso implica que existe a tal que $[\![\psi(a, x_1, ..., x_n)]\!] = 1$. Como $A = \{0, 1\}$, temos que a é um 1-nome. Assim, existe x tal que $a = \check{x}$ e, portanto, $[\![\psi(\check{x}, \check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] = 1$. Pela hipótese de indução, temos que vale $\psi(x, x_1, ..., x_n)$ - ou seja, vale $\exists v\ \psi(v, x_1, ..., x_n)$ como queríamos. $\square$

Lembre que $A = \{0, 1\}$.

Mas mesmo quando a álgebra é qualquer, ainda temos controle sobre as fórmulas Δ_0 - mas antes, precisamos de um resultado auxiliar:

Lema 3.4.10. *Fixe $\varphi(v_1, ..., v_n)$ Δ_0. Sejam $x_1, ..., x_n$ conjuntos. Então*

$$[\![\varphi(\check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] = [\![\varphi(\check{x}_1, ..., x_n)]\!]^1$$

onde $[\![\cdot]\!]^1$ indica o cálculo do valor com relação à álgebra $\{0, 1\}$.

Note que isso não é um problema, uma vez que todos os nomes presentes são 1-nomes.

Demonstração. Por indução na complexidade de φ. Note que o caso em que φ é atômica segue da Proposição 3.4.2. O caso dos conectivos é trivial, restando apenas os quantificadores. Vamos fazer o caso $\exists v \in y$, deixando o outro como exercício. Suponha $\varphi(v_1, ..., v_n)$ da forma $\exists v \in y\ \psi(v, v_1, ..., v_n)$. Temos

$$\begin{array}{rcl} [\![\exists v \in \check{y}\ \psi(v, \check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] & = & \sup_{t \in \mathrm{dom}(\check{y})} [\![t \in \check{y}]\!][\![\psi(t, \check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] \\ & = & \sup_{t \in \mathrm{dom}(\check{y})} [\![t \in \check{y}]\!]^1 [\![\psi(t, \check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!]^1 \\ & = & [\![\exists v \in \check{y}\ \psi(v, \check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!]^1 \end{array}$$

□

Proposição 3.4.11. *Fixe $\varphi(v_1, ..., v_n)$ Δ_0. Sejam $x_1, ..., x_n$ conjuntos. Então*

$$\varphi(x_1, ..., x_n) \text{ se, e somente se, } [\![\varphi(\check{x}_1, ..., \check{x}_n)]\!] = 1.$$

Demonstração. Note que basta usar o lema anterior, mais a Proposição 3.4.9. □

Exercícios

Exercício 3.4.12. Sejam x um conjunto e τ um nome qualquer. Mostre que, se $[\![\tau \in \check{x}]\!] \neq 0$, então existe $y \in x$ tal que $[\![\check{y} = \tau]\!] \neq 0$.

3.5 Calculando o valor de algumas fórmulas

Vamos ver nesta seção mais alguns exemplos de cálculos explícitos de valores de algumas fórmulas. Começamos com alguns resultados preliminares. O primeiro ajuda com substituições de variáveis:

Lema 3.5.1. *Sejam a, b nomes e φ uma fórmula. Temos:*

(a) $[\![a = b]\!][\![\varphi(b)]\!] \leq [\![\varphi(a)]\!]$;

(b) $\sup_c [\![a = c \wedge \varphi(c)]\!] = [\![\varphi(a)]\!]$.

Demonstração. (a) Por indução sobre a complexidade de φ.

(b) Uma desigualdade segue do item anterior. A outra segue do fato que

$$[\![a = a \wedge \varphi(a)]\!] = [\![\varphi(a)]\!]$$

□

O próximo resultado fala como trabalhar com quantificadores restritos:

Proposição 3.5.2. *Seja φ uma fórmula (possivelmente com parâmetros) e $\dot{x}$ um nome. Então*

(a) $[\![\exists y \in \dot{x}\ \varphi(y)]\!] = \sup_{y \in dom(\dot{x})} \dot{x}(y)[\![\varphi(y)]\!]$;

(b) $[\![\forall y \in \dot{x}\ \varphi(y)]\!] = \inf_{y \in dom(\dot{x})} \dot{x}(y) \Rightarrow [\![\varphi(y)]\!]$.

Demonstração. (a)

$$\begin{array}{rcl} [\![\exists y \in \dot{x}\ \varphi(x)]\!] & = & \sup_t [\![t \in \dot{x} \wedge \varphi(t)]\!] \\ & = & \sup_t [\![\varphi(t)]\!] \sup_{y \in \mathrm{dom}(\dot{x})} [\![y = t]\!]\dot{x}(y) \\ & = & \sup_{y \in \mathrm{dom}(\dot{x})} \dot{x}(y) \sup_t [\![\varphi(t) \wedge y = t]\!] \\ & = & \sup_{y \in \mathrm{dom}(\dot{x})} \dot{x}(y)[\![\varphi(y)]\!] \end{array}$$

(b) Exercício.

□

Vamos terminar esta seção apresentando o cálculo explícito de mais dois axiomas:

Proposição 3.5.3. *Se φ é uma instância do esquema do axioma da separação, então $[\![\varphi]\!] = 1$.*

Demonstração. Considere φ da forma

ψ pode ou não ter parâmetros.

$$\forall x\ \exists v\ \forall y\ (y \in v \leftrightarrow y \in x \wedge \psi(y))$$

Dado $\dot{x}$ nome, considere $\dot{v}$ tal que $\mathrm{dom}(\dot{v}) = \mathrm{dom}(\dot{x})$ e tal que

A ideia de v é que seus elementos levem em conta a probalidade de estarem em $\dot{x}$ e de satisfazerem ψ.

$$\dot{v}(\alpha) = \dot{x}(\alpha)[\![\psi(\alpha)]\!]$$

para todo $\alpha \in \mathrm{dom}(\dot{x})$.

Basta provarmos que

$$[\![\forall y\ y \in \dot{v} \leftrightarrow (y \in \dot{x} \wedge \psi(y))]\!] = 1.$$

Por sua vez, para isso é suficiente provar que

$$[\![\forall y\ y \in \dot{v} \to (y \in \dot{x} \wedge \psi(y))]\!] = 1$$

e

$$[\![\forall y\ (y \in \dot{x} \wedge \psi(y)) \to y \in \dot{x}]\!] = 1.$$

Vamos provar a primeira igualdade, deixando a segunda como exercício.

$$[\![\forall y\ y \in \dot{v} \to (y \in \dot{x} \wedge \psi(y))]\!] = \inf_{t \in \mathrm{dom}(\dot{v})} \dot{v}(t) \Rightarrow [\![t \in \dot{x} \wedge \psi(t)]\!]$$

Mas, fixado $t \in \mathrm{dom}(\dot{v})$, temos

$$\dot{v}(t) = \dot{x}(t)[\![\psi(t)]\!] \leq [\![t \in \dot{x}]\!][\![\psi(t)]\!] = [\![t \in \dot{x} \wedge \psi(t)]\!]$$

como desejado. $\square$

Proposição 3.5.4. *Considere φ o axioma das partes, então $[\![\varphi]\!] = 1$.*

Demonstração. Lembrando, este axioma é

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ z \subset x \to z \in y.$$

Fixe $\dot{x}$ um nome. Considere $\dot{y}$ nome tal que $\mathrm{dom}(\dot{y}) = A^{\mathrm{dom}(\dot{x})}$ e, para cada $z \in \mathrm{dom}(\dot{y})$ defina

$$\dot{y}(z) = [\![z \subset \dot{x}]\!].$$

Temos que mostrar que

$$[\![\forall z\ z \subset \dot{x} \to z \in \dot{y}]\!].$$

Dado um nome z qualquer, considere α nome tal que $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\dot{x})$ tal que

$$\alpha(\beta) = [\![\beta \in z]\!]$$

para todo $\beta \in \mathrm{dom}(\dot{x})$.

Vamos provar duas igualdades:

(i) $[\![z \subset \dot{x} \to z = \alpha]\!] = 1$;

(ii) $[\![z \subset \dot{x} \to \alpha \in \dot{y}]\!] = 1$.

Note que destas duas igualdades, obtemos a igualdade desejada:

$$[\![z \subset \dot{x} \to z \in \dot{y}]\!] = 1.$$

Resta assim provar de fato as igualdades:

(i) Note que

$$\begin{aligned}
[\![\alpha \subset z]\!] &= \inf_{\beta \in \mathrm{dom}(\alpha)} \alpha(\beta) \Rightarrow [\![\beta \in z]\!] \\
&= \inf_{\beta \in \mathrm{dom}(\alpha)} [\![\beta \in z]\!] \Rightarrow [\![\beta \in z]\!] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dado β nome qualquer, temos:

$$\begin{aligned}
[\![\beta \in \dot{x} \wedge \beta \in z]\!] &= \sup_{t \in \mathrm{dom}(\dot{x})} \dot{x}(t)[\![t = \beta]\!][\![\beta \in z]\!] \\
&= \sup_{t \in \mathrm{dom}(\dot{x})} \dot{x}(t)[\![t = \beta]\!][\![\beta \in z]\!][\![t = \beta]\!] \\
&\leq \sup_{t \in \mathrm{dom}(\dot{x})} \dot{x}(t)[\![t \in z]\!][\![t = \beta]\!] \\
&\leq \sup_{t \in \mathrm{dom}(\alpha)} [\![t \in z]\!][\![t = \beta]\!] \\
&\leq \sup_{t \in \mathrm{dom}(\alpha)} \alpha(t)[\![t = \beta]\!] \\
&= [\![\beta \in \alpha]\!]
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que $[\![(\dot{x} \cap z) \subset \alpha]\!] = 1$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
[\![z \subset \dot{x}]\!] &= [\![z \subset \dot{x}]\!][\![(\dot{x} \cap z) \subset \alpha]\!] \\
&\leq [\![z \subset \alpha]\!]
\end{aligned}$$

o que, com a primeira parte, conclui a primeira equação.

(ii) Temos:

$$\begin{aligned}
[\![z \subset \dot{x}]\!]^1 &= [\![z \subset \dot{x}]\!][\![z = \alpha]\!] \\
&= \dot{y}(z)[\![z = \alpha]\!] \\
&\leq [\![z = \alpha]\!][\![z \in \dot{y}]\!] \\
&\leq [\![\alpha \in \dot{y}]\!]
\end{aligned}$$

□

3.6 Princípio do máximo

Nesta seção vamos ver como o supremo que aparece na definição de valor de uma fórmula existencial é de fato atingido. Começamos com uma maneira de construir um nome que combina “informações de diferentes fontes”.

Definição 3.6.1. Dizemos que $a, b \in A$ são **incompatíveis** e denotamos por $a \perp b$ se $ab = 0$.

[1] Pela primeira igualdade.

Sejam $a = \langle a_i : i \in I \rangle$ sequência de elementos de A e $u = \langle u_i : i \in I \rangle$ sequência de nomes. Definimos M_a^u como o nome tal que

$$\mathrm{dom}(M_a^u) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{dom}(u_i)$$

$$M_a^u(x) = \sup_{i \in I} a_i [\![x \in u_i]\!]$$

para todo $x \in \mathrm{dom}(M_a^u)$.

No próximo resultado, será útil o seguinte resultado sobre elementos de uma álgebra B qualquer:

$$xy \leq z \text{ se, e somente se, } x \leq (y \Rightarrow z)$$

Lema 3.6.2 (da Mistura)**.** *Sejam $a = \langle a_i : i \in I \rangle$ sequência de elementos de A e $u = \langle u_i : i \in I \rangle$ sequência de nomes. Suponha que*

$$a_i a_j \leq [\![u_i = u_j]\!].$$

Então, para todo $i \in I$ temos

$$a_i \leq [\![u_i = M_a^u]\!].$$

Note que, em particular, a hipótese do lema é satisfeita se $a_i \perp a_j$ para $i \neq j$.

Demonstração. Seja $i \in I$. Note que

$$\begin{array}{rcl} [\![u_i = M_a^u]\!] & = & [\![u_i \subset M_a^u]\!][\![M_a^u \subset u_i]\!] \\ & = & (\inf_{x \in \mathrm{dom}(u_i)} u_i(x) \Rightarrow [\![x \in M_a^u]\!])(\inf_{y \in \mathrm{dom}(M_a^u)} M_a^u(y) \Rightarrow [\![y \in u_i]\!]) \end{array}$$

Assim, basta mostrar que, para todo $x \in \mathrm{dom}(u_i)$,

$$a_i \leq u_i(x) \Rightarrow [\![x \in M_a^u]\!]$$

e, para todo $y \in \mathrm{dom}(M_a^u)$,

$$a_i \leq M_a^u(y) \Rightarrow [\![y \in u_i]\!].$$

Vamos provar as duas desigualdades usando a observação acima:

$$\begin{array}{rcl} a_i u_i(x) & \leq & a_i [\![x \in u_i]\!] \\ & \leq & \sup_{j \in I} a_j [\![x \in u_j]\!] \\ & = & M_a^u(x) \\ & \leq & [\![x \in M_a^u]\!] \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a_i M_a^u(y) & = & a_i \sup_{j\in I} a_j [\![y \in u_j]\!] \\ & = & \sup_{j\in I} a_i a_j [\![y \in u_j]\!] \\ & \leq & sup_{j\in I}[\![u_i = u_j]\!][\![y \in u_j]\!] \\ & \leq & \sup_{j\in I} [\![y \in u_i]\!] \\ & = & [\![y \in u_i]\!] \end{array}$$

□

Proposição 3.6.3 (Princípio do máximo). *Dada φ fórmula, existe α nome tal que $[\![\exists x\ \varphi(x)]\!] = [\![\varphi(\alpha)]\!]$.*

Demonstração. Por definição, temos

$$[\![\exists x\ \varphi(x)]\!] = \sup_\alpha [\![\varphi(\alpha)]\!]$$

Seja κ ordinal e seja $\langle u_\xi : \xi \in \kappa\rangle$ tal que $\{[\![\varphi(\alpha)]\!] : \alpha \text{ nome}\} = \{[\![\varphi(u_\xi)]\!] : \xi \in \kappa\}$. Note que

$$\sup_\alpha [\![\varphi(\alpha)]\!] = \sup_{\xi\in\kappa} [\![\varphi(u_\xi)]\!]$$

Para cada $\xi \in \kappa$, considere

$$a_\xi = [\![\varphi(u_\xi)]\!] - \sup_{\eta<\xi} [\![\varphi(u_\eta)]\!].$$

Note que, dados $\xi \neq \eta$, $a_\xi \perp a_\eta$ e $a_\xi \leq [\![\varphi(u_\xi)]\!]$. Aplicando o Lema da Mistura (usando a notação de tal lema), obtemos que

$$a_\xi \leq [\![u_\xi = M_a^u]\!]$$

para todo $\xi \in \kappa$. Note também que

$$[\![\varphi(M_a^u)]\!] \leq [\![\exists x\ \varphi(x)]\!].$$

Por outro lado, para cada $\xi < \kappa$,

$$a_\xi \leq [\![u_\xi = M_a^u]\!][\![\varphi(u_\xi)]\!] \leq [\![\varphi(M_a^u)]\!].$$

Como $[\![\exists x\ \varphi(x)]\!] = \sup_{\xi<\kappa} a_\xi$, obtemos que $[\![\exists x\ \varphi(x)]\!] \leq [\![\varphi(M_a^u)]\!]$ e assim o resultado. □

Como aplicação do Princípio do máximo, podemos provar mais um axioma:

Proposição 3.6.4. *Considere φ o axioma da escolha. Então $[\![\varphi]\!] = 1$.*

Demonstração. O axioma da escolha é dado por

$$\forall \mathcal{F}\ (\forall F \in \mathcal{F}\ \exists x \in F) \to (\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F} \wedge \forall F \in \mathcal{F}\ f(F) \in F)$$

Ou seja, precisamos provar que, dado $\dot{\mathcal{F}}$ nome qualquer,

$$[\![\forall F \in \dot{\mathcal{F}}\ \exists x \in F]\!] \leq [\![\exists f : \dot{\mathcal{F}} \to \bigcup \dot{\mathcal{F}} \wedge \forall F \in \dot{\mathcal{F}}\ f(F) \in F]\!]$$

Lembrando que

$$[\![\forall F \in \dot{\mathcal{F}}\ \exists x \in F]\!] = \inf_{\dot{F} \in \mathrm{dom}(\dot{\mathcal{F}})} \dot{\mathcal{F}}(\dot{F}) \Rightarrow [\![\exists x \in \dot{F}]\!]$$

Pelo Princípio do máximo, para cada $\dot{F} \in \mathrm{dom}(\dot{\mathcal{F}})$, temos que existe $\dot{x}_{\dot{F}}$ nome tal que

$$[\![\exists x\ x \in \dot{F}]\!] = [\![\dot{x}_{\dot{F}} \in \dot{F}]\!].$$

Considere

$$\dot{f} = \left\{ \left\langle \overbrace{\left\langle \dot{F}, \dot{x}_{\dot{F}} \right\rangle}^{\cdot}, 1 \right\rangle : \dot{F} \in \mathrm{dom}(\dot{\mathcal{F}}) \right\}.$$

Então resta mostrar que $\dot{f}$ assim construída satisfaz o desejado. $\square$

3.7 A relação de forcing

Supor que existe 1 é só mais cômodo. A segunda condição evita certas trivialidades.

Definição 3.7.1. Chamamos uma ordem $\mathbb{P}$ de um **forcing** se existe $1 \in \mathbb{P}$ tal que $1 \geq p$ para todo $p \in \mathbb{P}$ e, para todo $p, q \in \mathbb{P}$ tai que $q \not\leq p$, existe $p' \leq q$ tal que $p' \perp p$.

A menos de menção contrária, vamos sempre supor $\mathbb{P}$ um forcing. Além disso, note que a não ser que ela seja unitária, ela não possui mínimo (exercício).

Dado $p \in \mathbb{P}$, denotamos por

$$\downarrow p = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}.$$

Proposição 3.7.2. *Dado um forcing $\mathbb{P}$, o conjunto $\{\downarrow p : p \in \mathbb{P}\}$ forma uma base para uma topologia sobre $\mathbb{P}$.*

Proposição 3.7.3. *Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico. Então $\{V \subset X : \overset{\circ}{\overline{V}} = V\}$ forma uma álgebra completa com as operações usuais.*

Tendo em vista os últimos resultados, dado um forcing $\mathbb{P}$, denotamos por $RO(\mathbb{P})$ a álgebra completa dos abertos regulares de $\mathbb{P}$.

Lema 3.7.4. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Note que se $A \subset \mathbb{P}$ é aberto e $p \in A$, então $\downarrow p \subset A$.*

Lema 3.7.5. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Temos:*

(a) dado $p \in \mathbb{P}$, $\downarrow p$ é aberto regular;

(b) a função $\varphi : \mathbb{P} \to RO(\mathbb{P})$ dada por $\varphi(p) = \downarrow p$ é um isormorfismo de ordem sobre um conjunto denso de $RO(\mathbb{P})$.

Demonstração. (a) Sejam $p \in \mathbb{P}$ e $q \in \overset{\circ}{\overline{\downarrow p}}$. Queremos mostrar que $q \leq p$. Suponha que não. Então existe $p' \leq q$ tal que $p \perp p'$. Assim, $p' \in \downarrow q$ e $\downarrow p' \cap \downarrow p = \emptyset$. Em particular, $p' \notin \overline{\downarrow p}$ e, portanto, $q \notin \overset{\circ}{\overline{\downarrow p}}$.

(b) Segue imediatamente do item anterior.

□

Lema 3.7.6. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Sejam A e B álgebras de Boole completas, $a : \mathbb{P} \to A$ e $b : \mathbb{P} \to B$ isomorfismos sobre subconjuntos densos de A e B respectivamente. Então A e B são isomorfos.*

Demonstração. Seja $x \in A$. Considere $D_x = \downarrow x \cap a[\mathbb{P}]$. Note que $x = \sup D_x$. Defina $\varphi(x) = \sup b[a^{-1}[D_x]]$. Mostre que φ é o ismorfismo procurado (exercício). □

Definição 3.7.7. Dado um forcing $\mathbb{P}$, chamamos $RO(\mathbb{P})$ de **completamento** de $\mathbb{P}$.

Definição 3.7.8. Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Dada φ uma fórmula, denotamos por $p \Vdash \varphi$ (p **força** φ) se $\downarrow p \leq [\![\varphi]\!]$, onde $[\![\cdot]\!]$ é tomado em relação a $RO(\mathbb{P})$.

Na última definição, note que se considerarmos $\mathbb{P}$ como subconjunto de seu completamento, temos que $p \Vdash \varphi$ se, e somente se, $p \leq [\![\varphi]\!]$. No decorrer do texto, a menos de menção contrária, vamos sempre supor $\mathbb{P}$ como subconjunto de seu completamento. Note que se $p \in \mathbb{P}$, como estamos supondo não unitário, $p \neq 0$.

Vamos terminar esta seção com algumas propriedades de tal relação. Começamos com um resultado que é imediato a partir da definição:

Lema 3.7.9. *Seja φ uma fórmula. Se $p \Vdash \varphi$ e $q \leq p$, então $q \Vdash \varphi$.*

Proposição 3.7.10. *Dada φ fórmula, temos que $p \Vdash \neg\varphi$ se, e somente se, não existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \varphi$.*

Demonstração. Suponha $p \Vdash \neg\varphi$. Então $p \leq [\![\neg\varphi]\!]$. Assim, $p \leq -[\![\varphi]\!]$. Dado $q \leq p$, suponha $q \Vdash \varphi$. Ou seja, $q \leq [\![\varphi]\!]$. Então $q \leq [\![\varphi]\!], -[\![\varphi]\!]$, o que implica $q = 0$, contradição.

Por outro lado, suponha $p \not\Vdash \neg\varphi$. Então $p \not\leq -[\![\varphi]\!]$. Ou seja, $q' = p[\![\varphi]\!] \neq 0$. Assim, existe $q \leq q'$ com $q \in \mathbb{P}$ e assim $q \leq p$ e $q \Vdash \varphi$. □

Proposição 3.7.11. *Dadas φ e ψ fórmulas e $p \in \mathbb{P}$, temos:*

(a) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ se, e somente se, $p \Vdash \varphi$ e $p \Vdash \psi$;

(b) $p \Vdash \varphi \vee \psi$ se, e somente se, para todo $q \leq p$, existe $r \leq q$ tal que $r \Vdash \varphi$ ou $r \Vdash \psi$;

(c) $p \Vdash \varphi \to \psi$ se, e somente se, para todo $q \leq p$, $(q \Vdash \varphi) \to (q \Vdash \psi)$.

Demonstração. (a) Suponha $p \Vdash \varphi \wedge \psi$. Ou seja, $p \leq [\![\varphi]\!][\![\psi]\!]$ e, portanto, $p \Vdash \varphi$ e $p \Vdash \psi$. Note que o outro lado tem o mesmo argumento.

(b) Temos

$$\begin{array}{lll} p \Vdash \varphi \vee \psi & \text{sse} & p \Vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ & \text{sse} & \nexists q \leq p \; q \Vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ & \text{sse} & \nexists q \leq p \; (q \Vdash \neg\varphi \text{ e } q \Vdash \neg\psi) \\ & \text{sse} & \nexists q \leq p \; ((\nexists r \leq q \; (r \Vdash \varphi) \text{ e } \nexists r \leq q \; (r \Vdash \psi)) \\ & \text{sse} & \forall q \leq p \; \exists r \leq q \; r \Vdash \varphi \text{ ou } r \Vdash \psi \\ & \text{sse} & \forall q \leq p \; \exists r \leq q \; r \Vdash \varphi \text{ ou } r \Vdash \psi \end{array}$$

(c) Exercício.

□

Proposição 3.7.12. *Sejam $p \in \mathbb{P}$ e φ fórmula. Então:*

(a) $p \Vdash \forall x \varphi(x)$ se, e somente se, para todo $\dot{x}$ nome $p \Vdash \varphi(\dot{x})$;

(b) $p \Vdash \exists x \; \varphi(x)$ se, e somente se, para todo $q \leq p$, existem $r \leq q$ e $\dot{x}$ nome tais que $r \Vdash \varphi(\dot{x})$.

Demonstração. (a) Exercício.

$$
\text{(b)} \quad \begin{array}{lll}
p \Vdash \exists x\ \varphi(x) & \text{sse} & p \Vdash \neg(\forall x\ \neg\varphi(x)) \\
& \text{sse} & \nexists q \leq p\ q \Vdash \forall x\ \neg\varphi(x) \\
& \text{sse} & \nexists q \leq p \text{ para todo } \dot{x} \text{ nome } q \Vdash \neg\varphi(\dot{x}) \\
& \text{sse} & \nexists q \leq p \text{ para todo } \dot{x} \text{ nome } \nexists r \leq q\ r \Vdash \varphi(\dot{x}) \\
& \text{sse} & \forall q \leq p \text{ existe } \dot{x} \text{ nome } \exists r \leq q\ r \Vdash \varphi(\dot{x})
\end{array}
$$

□

Vale o análogo ao anterior para quantificadores limitados:

Proposição 3.7.13. *Sejam $p \in \mathbb{P}$, φ fórmula e y conjunto. Então:*

(a) $p \Vdash \forall x \in \check{y}\varphi(x)$ se, e somente se, para todo $x \in y$, $p \Vdash \varphi(\check{x})$;

(b) $p \Vdash \exists x \in \check{y}\ \varphi(x)$ se, e somente se, para todo $q \leq p$, existem $r \leq q$ e $x \in y$ tais que $r \Vdash \varphi(\check{x})$.

Demonstração. Exercício. □

Proposição 3.7.14. *Dada φ fórmula, temos:*

(a) $[\![\varphi]\!] = 0$ se, e somente se, $\nexists p\ p \Vdash \varphi$;

(b) $[\![\varphi]\!] = 1$ se, e somente se, $\forall p\ p \Vdash \varphi$.

Proposição 3.7.15. *Sejam $p \in \mathbb{P}$ e φ uma fórmula. Então existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \varphi$ ou $q \Vdash \neg\varphi$.*

Demonstração. Se $p \Vdash \varphi$, terminamos. Caso contrário, como $p \not\leq [\![\varphi]\!]$, temos que $q' = p - [\![\varphi]\!] \neq 0$. Note que existe $q \leq q'$, com $q \in \mathbb{P}$. Assim, $q \leq p$ e $q \leq -[\![\varphi]\!]$ e, portanto, $q \Vdash \neg\varphi$. □

Finalmente, uma condição pode forçar apenas uma das possibilidades:

Proposição 3.7.16. *Sejam $p \in \mathbb{P}$ e φ uma fórmula. Se $p \Vdash \varphi$, então $p \nVdash \neg\varphi$.*

3.8 A consistência de ¬ CH

Definição 3.8.1. Sejam A, B conjuntos. Denotamos por $Fn(A, B)$ o conjunto de todas as funções parciais de domínio finito contido em A e imagem contida em B. Adotamos neste conjunto a ordem $\leq$ dada pela extensão de funções. Note que tal conjunto é um forcing como na nossa definição.

Considere $\mathbb{P} = Fn(\omega_2 \times \omega, 2)$. Como na seção anterior, podemos adotar A como o completamento de $\mathbb{P}$. No decorrer desta seção, vamos sempre trabalhar com este par.

Antes de começarmos, precisamos de alguns ingredientes. Provamos que, dado um axioma φ de ZFC, $[\![\varphi]\!] = 1$ - e lembre que consequências de afirmações tem valores ainda maiores. Assim temos:

$$[\![\exists x \; x \text{ é o segundo ordinal não enumerável}]\!] = 1.$$

Usando o princípio do máximo, sabemos que existe $\dot{\omega}_2$ nome tal que

$$[\![\dot{\omega}_2 \text{ é o segundo ordinal não enumerável}]\!] = 1.$$

Na Proposição 3.4.5, provamos que, em qualquer álgebra de Boole completa, $[\![\dot{G} \text{ é filtro sobre } \check{A}]\!] = 1$. Além disso, provamos que se D é denso em A, $[\![\dot{G} \cap \check{D} \neq \emptyset]\!] = 1$. Finalmente, note que $[\![\exists f \; f = \bigcup \dot{G}]\!] = 1$. Assim, novamente pelo princípio do máximo, temos que existe um nome $\dot{f}$ tal que $[\![\dot{f} = \bigcup \dot{G}]\!] = 1$.

Vamos começar traduzindo as afirmações acima para a linguagem de forcing. Dado $p \in \mathbb{P}$, temos:

- $p \Vdash \dot{G}$ é filtro sobre $\check{A}$;
- dado $D \subset \mathbb{P}$ denso, $p \Vdash \check{D} \cap \dot{G} \neq \emptyset$;
- $p \Vdash \dot{f} = \bigcup \dot{G}$;
- $p \Vdash \dot{\omega}_2$ é o segundo ordinal não enumerável.

Note que temos tal resultado automaticamente para todo D denso em A. Mas pela densidade de $\mathbb{P}$ em A, temos que todo denso de $\mathbb{P}$ é também denso em A.

De maneira análoga aos anteriores, também vamos considerar

- $p \Vdash \dot{2^\omega}$ é o conjunto das funções de ω em 2.

Vamos usar diversas vezes, sem qualquer menção, que se $p \Vdash \varphi$ e $\varphi \rightarrow \psi$ é verdadeira em ZFC, então $p \Vdash \psi$. Note que isso é imediato a partir da definição de $\Vdash$.

Os seguintes lemas são elementares:

Lema 3.8.2. *Dados $\alpha \in \omega_2$ e $n \in \omega$, o conjunto $D_{\alpha,n} = \{g \in \mathbb{P} : \langle \alpha, n \rangle \in dom(g)\}$ é denso em $\mathbb{P}$.*

Lema 3.8.3. *Dados $\alpha, \beta \in \omega_2$ distintos, $E_{\alpha,\beta} = \{g \in \mathbb{P} : \exists n \; g(\alpha, n) \neq g(\beta, n)\}$ é denso em $\mathbb{P}$.*

Proposição 3.8.4. *Dado $p \in \mathbb{P}$, $p \Vdash$ "$\dot{f}$ é uma função cujo domínio é $\check{\omega}_2 \times \check{\omega}$ e o contradomínio é $\check{2}$".*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{P}$. Como $p \Vdash \dot{f} = \bigcup \dot{G}$ e $p \Vdash \dot{G}$ é filtro sobre $\check{A}$, temos que $p \Vdash \dot{f}$ é função.

Além disso, dados $\alpha \in \omega_2$ e $n \in \omega$, temos que $p \Vdash \dot{G} \cap D_{\alpha,n} \neq \emptyset$. Assim, $p \Vdash \langle \check{\alpha}, \check{n} \rangle \in \mathrm{dom}(\dot{f})$.

Assim, p força o desejado. $\square$

Proposição 3.8.5. *Dados $p \in \mathbb{P}$ e $\alpha, \beta \in \omega_2$ distintos $p \Vdash \exists n \in \check{\omega}\ \dot{f}(\check{\alpha}, n) \neq \dot{f}(\check{\beta}, n)$".*

Note que se quiséssemos "saber" em qual n acontece a distinção, teríamos que ir para uma condição mais forte: sabemos que existem $q \leq p$ e $n \in \omega$ tais que $q \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}, \check{n}) \neq \dot{f}(\check{\beta}, \check{n})$. Note também que condições distintas podem forçar n's diferentes.

Demonstração. Como $p \Vdash \check{E}_{\alpha,\beta} \cap \dot{G} \neq \emptyset$, temos que $p \Vdash$ "$\exists n \in \check{\omega}\ \dot{f}(\check{\alpha}, n) \neq \dot{f}(\check{\beta}, n)$" como desejado. $\square$

Proposição 3.8.6. *Dado $p \in \mathbb{P}$, $p \Vdash \check{\omega}_2 \leq \dot{2^{\omega}}$.*

Demonstração. Note que pelos resultados anteriores, dado $\alpha \in \omega_2$, $p \Vdash$ "$\dot{f}(\check{\alpha}, \cdot)$ é uma função de $\check{\omega} \to \check{2}$" e que, para $\alpha \neq \beta$, $p \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}, \cdot) \neq \dot{f}(\check{\beta}, \cdot)$. $\square$

Note que se φ é tal que algum $p \Vdash \varphi$, então φ é consistente com ZFC: caso contrário, ZFC provaria $\neg\varphi$ e, portanto, $[\![\neg\varphi]\!] = 1$ e, portanto, $[\![\varphi]\!] = 0$, o que impossibilita algum $p \Vdash \varphi$.

Tendo isso em mente, o último resultado apresentado aparenta ter resolvido a consistência de não CH. Mas há um problema: o que mostramos foi que $p \Vdash \check{\omega}_2 \geq \dot{2^{\omega}}$. Para termos a consistência de $\neg$ CH, deveríamos ter $p \Vdash \dot{\omega}_2 \geq \dot{2^{\omega}}$. Se tivéssemos $p \Vdash \check{\omega}_2 = \dot{\omega}_2$, tudo estaria resolvido - note que $\dot{\omega}_2$ é quem satisfaz a definição de ω_2, enquanto $\check{\omega}_2$ é simplesmente o nome para o ω_2 original. Como coisas como "ser um cardinal" não são Δ_0, a princípio não temos como garantir o resultado com o que temos até agora.

De fato, com forcings em geral, o problema descrito acima realmente aparece. Mas neste caso específico, não. Vamos ver como resolver isso na próxima seção.

3.9 Preservação de cardinais

Nesta seção, vamos finalizar o que ficou faltando na prova da consistência de $\neg$ CH. Antes de começarmos com os resultados principais desta seção, vejamos um resultado auxiliar que usaremos diversas vezes sem qualquer menção:

Esta seção segue [?].

Proposição 3.9.1. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Sejam $p \in \mathbb{P}$ e φ uma afirmação. Então:*

(i) $p \Vdash \varphi$ se, e somente se, $\{q \in \mathbb{P} : q \Vdash \varphi\}$ for denso abaixo de $\mathbb{P}$ (dizemos que um conjunto D é **denso abaixo** *de p se, para todo $q \leq p$, existe $r \leq q$ tal que $r \in D$);*

(ii) se $p \nVdash \varphi$, existe $q \leq p$ tal que $r \Vdash \neg\varphi$.

Demonstração. (i) Se $p \Vdash \varphi$, não há nada a ser provado. Por outro lado, suponha $p \nVdash \varphi$. Ou seja, $p \not\leq [\![\varphi]\!]$ e, portanto, $p[\![\neg\varphi]\!] \neq 0$. Assim, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leq p[\![\neg\varphi]\!]$. Por hipótese, existe $r \leq q$ tal que $r \Vdash \varphi$, contradição.

Lembre que $-[\![\varphi]\!] = [\![\neg\varphi]\!]$.

(ii) Como $p \nVdash \varphi$, existe $q \leq p$ tal que nenhum $r \leq q$ é tal que $r \Vdash \varphi$. Mas, pela Proposição 3.7.15, temos que existe $r \leq q$ tal que $r \Vdash \varphi$ ou $r \Vdash \neg\varphi$. Assim, necessariamente, $r \Vdash \neg\varphi$.

□

O próximo resultado nos mostra que forcings ccc's, apesar de acresecentarem novas funções, cada uma delas pode ser aproximada por uma função original (se domínio e contra-domínio já existirem originalmente):

Proposição 3.9.2. *Seja $\mathbb{P}$ ccc. Sejam A, B conjuntos, $\dot{f}$ nome e $p \in \mathbb{P}$ tais que $p \Vdash \dot{f} : \check{A} \to \check{B}$. Então existe $F : A \to \wp(B)$ tal que, para todo $a \in A$, $|F(a)| \leq \aleph_0$ e $p \Vdash \dot{f}(\check{a}) \in \check{F}(\check{a})$.*

Demonstração. Defina $F : A \to \wp(B)$ como

$$F(a) = \{b \in B : \exists q \leq p \; q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}\}$$

para $a \in A$. Vamos provar que $p \Vdash \dot{f}(\check{a}) \in \check{F}(\check{a})$. Suponha que não. Então existe $q \leq p$ tal que $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) \notin \check{F}(\check{a})$. Sejam $r \leq q$ e $b \in B$ tais que

$$r \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}.$$

Pela definição de $F(a)$, $b \in F(b)$. Ou seja, $r \Vdash \dot{f}(\check{a}) \in \check{F}(\check{a})$, contradição. Resta provar $F(a)$ é enumerável para qualquer $a \in A$. Fixado $a \in A$, sejam $b \in F(a)$. Seja p_b tal que $p_b \Vdash \dot{f}(\check{a}) = \check{b}$. Note que se $b \neq b'$, então $p_b \perp p_{b'}$ - caso contrário, teríamos que existe $q \leq p_b, p_{b'}$ e $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = b$ e $q \Vdash \dot{f}(\check{a}) = b'$, contradição. Desta forma, $F(a)$ é enumerável. □

Um caminho para discutir a preservação de cardinais é olhar para a preservação de cofinalidades. É isso que faremos nos próximos resultados.

Proposição 3.9.3. *Sejam α, β ordinais tais que $\alpha = cof(\beta)$. Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Então $1 \Vdash \alpha \geq cof(\beta)$.*

Demonstração. Seja $f : \alpha \to \beta$ uma função cofinal. Note que $1 \Vdash \check{f} : \check{\alpha} \to \check{\beta}$ é cofinal. □

Pense em fórmulas Δ_0.

Definição 3.9.4. Seja $\mathbb{P}$ um forcing. Dizemos que $\mathbb{P}$ **preserva cofinalidades** se, dados α, β ordinais tais que $\alpha = \text{cof}(\beta)$ temos que $1 \Vdash \check{\alpha} = \dot{\text{cof}}(\check{\beta})$.

$\dot{\text{cof}}(\check{\beta})$ se refere ao nome que satisfaz ser a cofinalidade de β.

Lema 3.9.5. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing tal que, para todo α ordinal regular temos que $1 \Vdash \check{\alpha}$ é regular. Então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades.*

Demonstração. Sejam α, β ordinais tais $\alpha = \text{cof}(\beta)$. Suponha que $1 \nVdash \check{\alpha} = \dot{\text{cof}}(\beta)$ e, portanto, pela proposição anterior, $1 \Vdash \check{\alpha} > \dot{\text{cof}}(\beta)$. Além disso, pela definição de cofinalidade, $1 \Vdash \dot{\text{cof}}(\check{\alpha}) \leq \dot{\text{cof}}(\check{\beta})$. Sejam γ e $q \leq 1$ tais que $q \Vdash \dot{\text{cof}}(\beta) = \gamma$. Note que $\gamma < \alpha$ e que $q \Vdash \gamma \geq \dot{\text{cof}}(\check{\alpha})$. Mas isso contradiz o fato que α é regular (por ser igual à $\text{cof}(\beta)$) e a hipótese sobre $\mathbb{P}$. □

Proposição 3.9.6. *Seja $\mathbb{P}$ um forcing ccc. Então $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades.*

Demonstração. Seja α regular. Pelo lema anterior, só precisamos mostrar que $1 \Vdash \check{\alpha}$ é regular. Suponha que não. Sejam $p \leq 1$, $\dot{f}$ nome e β ordinal tais que $p \Vdash \dot{f} : \check{\beta} \to \alpha$ é cofinal - vamos aqui tratar apenas do caso em que $\beta > \omega$, o outro caso segue de maneira análoga. Pela Proposição 3.9.2, existe $F : \beta \to \wp(\alpha)$ tal que $F(\gamma)$ é enumerável e $p \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) \in \check{F}(\check{\gamma})$ para todo $\gamma < \beta$. Mas então a função $g : \beta \to \alpha$, dada por $g(\gamma) = \sup F(\gamma)$ é cofinal em α, contradizendo a regularidade. □

Definição 3.9.7. Dizemos que um forcing $\mathbb{P}$ **preserva cardinais** se, para todo κ cardinal, $1 \Vdash \check{\kappa}$ é cardinal.

Proposição 3.9.8. *Se $\mathbb{P}$ preserva cofinalidades, então $\mathbb{P}$ preserva cardinais.*

Demonstração. Se κ é regular não enumerável, segue dos resultados anteriores. Se $\kappa \leq \omega$ segue por absolutividade e, finalmente, se κ é singular, basta usar o fato que então κ é supremo de regulares. □

Lembre que cardinais sucessores são sempre regulares.

Corolário 3.9.9. *Se $\mathbb{P}$ é um forcing ccc, então $\mathbb{P}$ preserva cardinais.*

Em particular, por indução, podemos provar que

Corolário 3.9.10. *Dado $n \in \omega$, se $\mathbb{P}$ é ccc, então $\mathbb{P} \Vdash \check{\aleph}_n = \dot{\aleph}_n$.*

Exercícios

Exercício 3.9.11. Enuncie e prove o análogo à Proposição 3.9.2 se só tivermos que toda anticadeia de $\mathbb{P}$ é menor ou igual a κ.

3.10 A consistência de CH

Nesta seção vamos apresentar duas construções envolvendo forcings enumeravelmente fechados. Ao lado dos forcing ccc, esses são dois dos mais comuns tipos de forcing. Vamos começar apresentando algumas propriedades básicas de forcings enumeravelmente fechados.

Ou pelo menos são dois dos tipos mais bem comportados de forcings.

Definição 3.10.1. Dizemos que um forcing $\mathbb{P}$ é **enumeravelmente fechado** se, dada uma sequência $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ de elementos de $\mathbb{P}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$ para todo $n \in \omega$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_n$ para todo $n \in \omega$.

Proposição 3.10.2. *Seja $\mathbb{P}$ enumeravelmente fechado. Seja A conjunto e seja $\dot{f}$ nome tal que $p \Vdash \dot{f} : \check{\omega} \to \check{A}$ para algum $p \in \mathbb{P}$. Então existem $f : \omega \to A$ e $q \leq p$ tais que $q \Vdash \check{f} = \dot{f}$.*

Demonstração. Seja $p' \leq p$. Sejam $p_0 \leq p'$ e $a_0 \in A$ tal que $p_0 \Vdash \dot{f}(\check{0}) = \check{a}$. Por indução, defina $\langle p_n : n \in \omega \rangle$ e $\langle a_n : n \in \omega \rangle$ de forma que

- $p_{n+1} \leq p_n$;
- $p_{n+1} \Vdash \dot{f}(n+1) = \check{a}_{n+1}$.

Defina a função $f : \omega \to A$ por $f(n) = a_n$. Seja $q \leq p_n$ para todo n. Note que $q \Vdash \dot{f} = \check{f}$. □

Por composição de funções, é imediato provar que:

Corolário 3.10.3. *Seja $\mathbb{P}$ enumeravelmente fechado. Sejam A, B conjuntos, sendo A enumerável. Seja $\dot{f}$ nome tal que $p \Vdash \dot{f} : \check{A} \to \check{B}$ para algum $p \in \mathbb{P}$. Então existem $f : A \to B$ e $q \leq p$ tais que $q \Vdash \check{f} = \dot{f}$.*

Compare com a Proposição 3.9.2.

Em particular, obtemos:

Corolário 3.10.4. *Seja $\mathbb{P}$ enumeravelmente fechado. Então* $1 \Vdash \check{2^{\omega}} = \dot{2^{\omega}}$.

Novamente por composição de funções, obtemos que forcings enumeravelmente fechados "não acrescentam subconjuntos enumeráveis":

Corolário 3.10.5. *Seja $\mathbb{P}$ enumeravelmente fechado. Seja A conjunto. Seja $\dot{X}$ nome tal que, para algum $p \in \mathbb{P}$, $p \Vdash \dot{X} \subset \check{A}$ é enumerável. Então existem $X \subset A$ e $q \leq p$ tais que $q \Vdash \dot{X} = \check{X}$.*

De maneira parecida, obtemos:

Proposição 3.10.6. *Seja $\mathbb{P}$ enumeravelmente fechado. Então $1 \Vdash \dot{\omega}_1 = \check{\omega}_1$.*

Demonstração. Já temos que $1 \Vdash \check{\omega}_1 \leq \dot{\omega}_1$. Se mostrarmos que $1 \Vdash \check{\omega}_1$ é não enumerável, terminamos. Suponha que não. Então existem $p \in \mathbb{P}$ e $\dot{f}$ nome tais que $p \Vdash \dot{f} : \omega \to \check{\omega}_1$ sobrejetora. Pelo Corolário 3.10.3, existem $f : \omega \to \check{\omega}_1$ e $q \leq p$ tais que $q \Vdash \check{f} = \dot{f}$. Assim, f precisa ser sobrejetora, absurdo. □

Vamos exibir um forcing que dá a consistência de CH. Depois, vamos apresentar outro forcing que na verdade dá uma afirmação ainda mais forte.

Proposição 3.10.7. *Existe $\mathbb{P}$ forcing tal que $1 \Vdash CH$.*

Demonstração. Considere $\mathbb{P}$ o conjunto

$\{p \subset \omega_1 \times \omega \times 2 : p$ é função com domínio enumerável contido em $\omega_1 \times \omega\}$.

Dada $f \in 2^\omega$, note que

$$D_f = \{p \in \mathbb{P} : \exists \alpha \in \omega_1 \; p(\alpha, \cdot) = f\}$$

é denso em $\mathbb{P}$.

Considere $\dot{\varphi}$ nome tal que $1 \Vdash \dot{\varphi} = \bigcup \dot{G}$. Por argumento de densidade feito anteriormente, temos que $1 \Vdash \dot{\varphi} : \check{w}_1 \times \check{\omega} \to 2$. Note também que, para cada $f \in 2^\omega$, pela densidade de D_f, temos $1 \Vdash \exists \alpha \in \check{\omega}_1 \; \varphi(\alpha, \cdot) = \check{f}$. Ou seja, provamos que $1 \Vdash \check{2^w} = \check{\omega}_1$. Como o $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechado, temos que $1 \Vdash \check{2^\omega} = \dot{2^\omega}$ e $\check{\omega}_1 = \dot{\omega}_1$ e obtemos o resultado. □

Definição 3.10.8. Seja α ordinal e seja $F \subset \alpha$. Dizemos que F é um **club** se F é fechado e ilimitado. Dizemos que $S \subset \alpha$ é **estacionário** se, para todo F club temos $F \cap S \neq \emptyset$.

Definição 3.10.9. Chamamos de **princípio** $\diamondsuit$ a afirmação: existe uma sequência $\langle A_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ tal que, para todo $\xi < \omega_1$, $A_\xi \subset \xi$ e tal que, dado qualquer $A \subset \omega_1$, $\{\xi < \omega_1 : A \cap \xi = A_\xi\}$ é estacionário.

Chamamos tal sequência de **sequência** $\diamondsuit$.

$\diamondsuit$ é uma afirmação mais forte que CH:

Proposição 3.10.10. *Se vale $\diamondsuit$, vale CH.*

Demonstração. Seja $A \subset \omega$ e seja $\langle A_\xi : \xi < \omega_1 \rangle$ uma sequência $\diamondsuit$. Como $\{\xi < \omega_1 : A \cap \xi = A_\xi\}$ é estacionário, em particular, existe $\xi < \omega_1$ com $\xi > \omega$ tal que $A_\xi = A \cap \xi = A$. Ou seja, $\wp(\omega) \subset \{A_\xi : \xi < \omega_1\}$. $\square$

Considere $\mathbb{P}$ onde cada $p \in \mathbb{P}$ é uma sequência $\langle A_\xi : \xi < \alpha \rangle$ tal que cada $A_\xi \subset \xi$ e $\alpha < \omega_1$. Considere sobre $\mathbb{P}$ a ordem dada pela extensão (isto é, $p \leq q$ se p estende q como sequência).

Lema 3.10.11. *Considere $\mathbb{P}$ como acima. Então $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechado.*

Proposição 3.10.12. *Considere $\mathbb{P}$ como acima. Então $1 \Vdash \diamondsuit$.*

Demonstração. Seja $\langle A_{\dot\xi} : \dot\xi < \omega_1 \rangle$ tal que $1 \Vdash \bigcup \dot G = \langle A_{\dot\xi} : \dot\xi < \omega_1 \rangle$. Vamos provar que $1 \Vdash \langle A_{\dot\xi} : \dot\xi < \omega_1 \rangle$ é uma sequência $\diamondsuit$. Sejam $\dot A$ e $\dot C$ nomes tais que $1 \Vdash \dot C \subset \check\omega_1$ é um club e $1 \Vdash \dot A \subset \check\omega_1$. Precisamos mostrar que $1 \Vdash \exists \xi\ \dot A_\xi = \dot A \cap \xi$ e $\xi \in \dot C$. Para isso, é suficiente provar que o conjunto dos $p \in \mathbb{P}$ que forçam tal afirmação é denso. Seja $p \in \mathbb{P}$. Considere o seguinte:

Fato 3.10.13. *Dado $q_n \leq p$, existe $q_{n+1} \leq q_n$ tal que existe $\alpha_n \in dom(q_{n+1}) \setminus dom(q_n)$ tal que $q_{n+1} \Vdash \check\alpha_n \in \dot C$. Além disso, para todo $\alpha \in dom(q_n)$, $q_{n+1} \Vdash \check\alpha \in \dot A$ ou $q_{n+1} \Vdash \check\alpha \notin \dot A$.*

Demonstração. Seja $\beta = \mathrm{dom}(q_n)$. Como $q_n \Vdash \dot C$ é ilimitado, $q_n \Vdash \exists \alpha\ \alpha \in \dot C$ e $\alpha > \check\beta$. Basta escolher $q_{n+1} \leq q_n$ e $\alpha_n > \beta$ de forma que $q_{n+1} \Vdash \check\alpha_n \in \dot C$. Para a parte do além disso, basta usar o fato que $\mathrm{dom}(q_n)$ é enumerável e que $\mathbb{P}$ é enumeravelmente fechado para tomar q_{n+1} ainda mais forte para ter o desejado. $\square$

Aqui já encontramos α_n. No caso de mesmo assim $\alpha_n \notin \mathrm{dom}(q_{n+1})$, simplesmente estendemos q_{n+1} para que isso não ocorra.

Aplique o fato para construir indutivamente sequências $\langle q_n : n \in \omega \rangle$, $\langle \alpha_n : n \in \omega \rangle$. Seja $q = \bigcup_{n \in \omega} q_n$ (note que então $q \leq q_n$ para todo n) e seja $\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$ (note que $\alpha = \mathrm{dom}(q)$). Como $q \Vdash \dot C$ é fechado, temos que $q \Vdash \check\alpha \in \dot C$. Defina

$$A = \{\beta \in \alpha : q \Vdash \check\beta \in \dot A\}.$$

Considere $q' = q \cup \{\langle \alpha, A \rangle\}$. Note que $q' \leq q$ e que $q' \Vdash (\dot A \cap \alpha) = \check A = \dot A_\alpha$. $\square$

3.11 Forcing × modelos

Seja M modelo para "uma parte grande o suficiente" de ZFC. Podemos repetir todas as construções feitas nas seções anteriores dentro de M. Vamos denotar por M-nome a coleção de todos os nomes definidos em M.

Seja U um ultrafiltro sobre A (a álgebra de Boole completa fixada). Em geral, tal $U \notin M$. Definimos uma relação sobre os M-nomes dada por

$$x \sim_U y \text{ se, e somente se, } [\![x = y]\!] \in U.$$

Denote por x_U a classe de equivalência de x pela relação acima. Defina

$$x^U \in_U y^U \text{ se, e somente se, } [\![x \in y]\!] \in U.$$

Defina $M_U = \left\langle \{x^U : x \text{ é } M\text{-nome}\}, \in_U \right\rangle$.

Com isso, temos a principal relação entre M e M_U:

Teorema 3.11.1. *Dada $\varphi(v_1, ..., v_n)$ e $x_1, ..., x_n$ M-nomes*

$$M_U \Vdash \varphi(x_1^U, ..., x_n^U) \textit{ se, e somente se, } [\![\varphi(x_1, ..., x_n)]\!] \in U.$$

Demonstração. Por indução sobre φ e pelo princípio do máximo para o caso do quantificador existencial. □

É possível provar o seguinte resultado:

Proposição 3.11.2. *A relação $\in_U$ é bem fundada.*

Isso é interessante, entre outras coisas, pelo seguinte resultado:

Teorema 3.11.3 (Colapso de Mostowski)**.** *Se $\langle M, E\rangle$ é uma estrutura que satisfaz o axioma da extensionalidade e E é bem fundada, então existe um único isomorfismo h em alguma $\in$-estrutura transitiva de forma que $h(x) = \{h(y) : yEx\}$ para $x \in M$.*

Como usamos os resultados anteriores: defina $M[U]$ a estrutura dada pelo colapso de Mostowski e seja $h : M_U \to M[U]$ o isomorfismo. Note que

$$h(x^U) = \{h(y^U) : y^U \in_U x^U\} = \{h(y^U) : [\![y \in x]\!] \in U\}.$$

Supondo U genérico sobre M (i.e, intercepta todos os densos de M), pode-se mostrar que $M \subset M[U]$ - basicamente usa-se os nomes da forma $\check{\cdot}$. Também sob essas condições, prova-se que $U \in M[U]$. Finalmente, se N é uma $\in$-estrutura transitiva tal que $N \supset M$, temos que $M \subset N \subset M[U]$.

Assim, podemos resumir os passos no seguinte roteiro:

- Escolhe-se qual o conjunto F de fórmulas de ZFC vamos trabalhar.
- Encontra-se um $\in$-modelo para isso de forma que seja bem fundado e enumerável.
- Como M é enumerável, existe G genérico sobre M - que podemos supor ultrafiltro.
- Como descrito acima, construímos $M[G]$ "menor modelo standard, enumerável e transitivo contendo M e G".

Com o roteiro acima podemos verificar a seguinte propriedade sobre a relação $\vDash$:

Teorema 3.11.4. *Seja M modelo enumerável transitivo, $\mathbb{P}$ um forcing, φ uma afirmação na linguagem de ZFC e $p \in \mathbb{P}$. Temos:*

$$p \Vdash \varphi \textit{ se, e somente se, } M[G] \vDash \varphi \textit{ para todo } G \textit{ genérico tal que } p \in G.$$

Demonstração. Suponha $p \Vdash \varphi$. Seja G tal que $p \in G$. Como $p \leq [\![\varphi]\!]$, temos que $[\![\varphi]\!] \in G$ e, portanto, $M[G] \vDash \varphi$.

Agora suponha $M[G] \vDash \varphi$ para todo G tal que $p \in G$. Suponha que $p \nVdash \varphi$. Isto é, $p \nleq [\![\varphi]\!]$. Assim, $q = p - [\![\varphi]\!] \neq 0$. Seja G ultrafiltro genérico tal que $q \in G$. Note que, como $q \leq p$, $p \in G$. Mas note que $[\![\varphi]\!] \notin \mathbb{P}$, temos que $[\![\neg\varphi]\!] \in G$ e, portanto, $M[G] \vDash \neg\varphi$. □

Teorema 3.11.5. *Sejam M modelo enumerável transitivo, $\mathbb{P}$ um forcing e φ uma afirmação qualquer na linguagem de ZFC. Seja G M-genérico. Então*

$$M[G] \vDash \varphi \textit{ se, e somente se, existe } p \in G \textit{ tal que } p \Vdash \varphi.$$

Demonstração. Suponha $M[G] \vDash \varphi$. Considere $p = [\![\varphi]\!]$. Então $p \in G$.

Por outro lado, suponha $p \in G$ tal que $p \Vdash \varphi$. Pelo resultado anterior, $M[G] \vDash \varphi$. □

Lema 3.11.6. *Sejam $\mathbb{P}$ um forcing e M um modelo enumerável transitivo tal que $\mathbb{P} \in M$. Sejam $p \in \mathbb{P}$ e $D \in M$ tais que D é denso abaixo de p. Seja G M-genérico tal que $p \in G$, então $G \cap D \neq \emptyset$.*

Demonstração. Se $p = 1$ o resultado é trivial. Defina

$$E = D \cup \{q \in \mathbb{P} : q \perp p\}.$$

Note que $E \in M$ e E é denso. Seja $q \in E \cap G$. Note que q não é incompatível com p e, portanto, $q \in D$. □

3.12 Produto de forcings

Definição 3.12.1. Sejam $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ dois forcings. Definimos o forcing $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ com a ordem

$$\langle p_1, p_2\rangle \leq \langle q_1, q_2\rangle \text{ se } p_1 \leq q_1 \text{ e } p_2 \leq q_2$$

Note que isso é de fato um forcing.

Proposição 3.12.2. *Sejam $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ forcings e seja $G \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$. Então G é filtro se, e somente se, $G = G_1 \times G_2$ onde G_i é filtro sobre $\mathbb{P}_i$ para $i = 1, 2$.*

Demonstração. Seja $F \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ filtro. Para $i = 1, 2$, considere $G_i = \pi_i[F]$. Note que cada G_i é filtro sobre $\mathbb{P}_i$. Vamos mostrar que $F = G_1 \times G_2$. É claro que $F \subset G_1 \times G_2$, então seja $\langle p_1, p_2\rangle \in G_1 \times G_2$. Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ tais que $\langle p_1, q_2\rangle, \langle q_1, p_2\rangle \in F$. Seja $\langle a_1, a_2\rangle \in F$ tal que

$$\langle a_1, a_2\rangle \leq \langle p_1, q_2\rangle, \langle q_1, p_2\rangle.$$

Note que $\langle a_1, a_2\rangle \leq \langle p_1, p_2\rangle$ e, portanto, $\langle p_1, p_2\rangle \in F$, □

Proposição 3.12.3 (Lema do produto). *Seja M modelo enumerável transitivo. Sejam $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ dois forcings com $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in M$. Sejam $F \subset \mathbb{P}$ e $H \subset \mathbb{Q}$ (não necessariamente em M). São equivalentes:*

(a) $F \times H$ é M-genérico sobre $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$;

(b) F é M-genérico sobre $\mathbb{P}$ e H é $M[F]$-genérico sobre $\mathbb{Q}$;

(c) H é M-genérico sobre $\mathbb{Q}$ e F é $M[H]$-genérico sobre $\mathbb{P}$.

Além disso, se as condições acima são satisfeitas, temos que $M[F \times H] = (M[F])[H] = (M[H])[F]$.

Demonstração. ($a \Rightarrow b$): Pela proposição anterior, já temos que F e H são filtros. De maneira análoga, podemos provar que cada um deles é M-genérico. Resta mostrar que H é $M[F]$-genérico sobre $\mathbb{Q}$. Seja D denso em $M[F]$. Então existe $p \in F$ tal que $p \Vdash \dot{D}$ é denso em $\check{\mathbb{Q}}$. Considere

$$E = \{\langle a, b\rangle \in \mathbb{P} \times \mathbb{Q} : a \leq p \text{ e } a \Vdash \check{b} \in \dot{D}\}.$$

Note que $E \in M$. Note também que E é denso abaixo de $\langle p, 1\rangle$. Como $\langle p, 1\rangle \in F \times H$, temos pelo Lema 3.11.6 que existe $\langle a, b\rangle \in (F \times H) \cap E$. Assim, $a \in F$ e $a \Vdash \check{b} \in \dot{D}$. Ou seja, $b \in D$.

$(b \Rightarrow a)$: A proposição anterior nos dá que $F \times H$ é filtro. Vamos mostrar que é M-genérico. Seja $D \in M$ tal que D é denso em $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$. Considere

$$E = \{q \in \mathbb{Q} : \exists p \in F \ \langle p, q \rangle \in D\}.$$

Note que $E \in M[F]$. Note que E é denso em $\mathbb{Q}$. Assim, podemos usar a hipótese.

As outras implicações seguem de maneira análoga.

Resta ver a parte do "além disso". Note que $F \times H \in (M[F])[H]$. Assim, $M[F \times H] \subset (M[F])[H]$. Note que $F \in M[F \times H]$. Assim, $M[F] \subset M[F \times H]$. Mas $G \in M[F \times H]$, assim $(M[F])[H] \subset M[F \times H]$. $\square$

Dicas de alguns exercícios

2.2.9 Lembre que compactos de Hausdorff são regulares e que intersecção de cadeia decrescente de compactos é não vazia.

3.4.12 Escreva a definição de $[\![\tau \in \check{x}]\!]$ e lembre os elementos de $\mathrm{dom}(\check{x})$ são todos da forma $\check{t}$ para algum t.

Soluções de alguns exercícios

Notação

Índice Remissivo