Teoremas de Ramsey

Leandro F. Aurichi

Motivando

Motivando

É bem legal.

Motivando mais

Motivando mais

Qual o menor número de casas para se garantir que em alguma delas tenha mais de um pombo?

Motivando mais

Motivando mais

Qual o menor tamanho (em pessoas) para uma festa de forma que seja garantido que existam lá 3 pessoas que se conhecem ou 3 que não se conhecem?

Motivando mais

Qual o menor tamanho (em pessoas) para uma festa de forma que seja garantido que existam lá 3 pessoas que se conhecem ou 3 que não se conhecem?

A resposta é 6.

Tentando formalizar

Tentando formalizar

Represente cada pessoa da festa como um vértice de um grafo.

Tentando formalizar

Represente cada pessoa da festa como um vértice de um grafo.

Faça uma aresta entre cada par de pessoas

Tentando formalizar

Represente cada pessoa da festa como um vértice de um grafo.

Faça uma aresta entre cada par de pessoas (o grafo fica completo!)

Tentando formalizar

Represente cada pessoa da festa como um vértice de um grafo.

Faça uma aresta entre cada par de pessoas (o grafo fica completo!)

Pinte cada aresta com uma de duas cores:

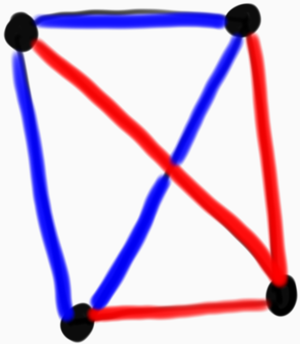
Tentando formalizar

Represente cada pessoa da festa como um vértice de um grafo.

Faça uma aresta entre cada par de pessoas (o grafo fica completo!)

Pinte cada aresta com uma de duas cores: c, n.

Representando



Reformulando a pergunta

Reformulando a pergunta

Nossa pergunta pode ser reformulada da seguinte forma: qual o menor n de forma que qualquer 2-coloração sobre as arestas de K_n apresenta um K_3 (triângulo) monocromático?

Reformulando a pergunta

Nossa pergunta pode ser reformulada da seguinte forma: qual o menor n de forma que qualquer 2-coloração sobre as arestas de K_n apresenta um K_3 (triângulo) monocromático?

Ainda outra forma:

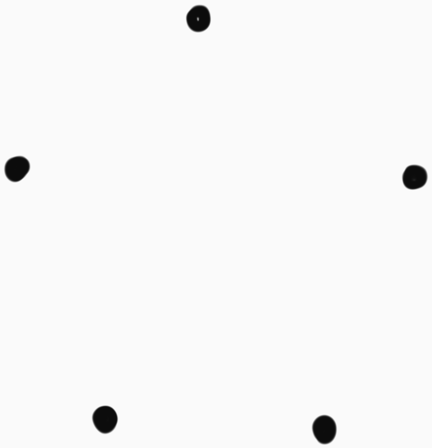
Reformulando a pergunta

Nossa pergunta pode ser reformulada da seguinte forma: qual o menor n de forma que qualquer 2-coloração sobre as arestas de K_n apresenta um K_3 (triângulo) monocromático?

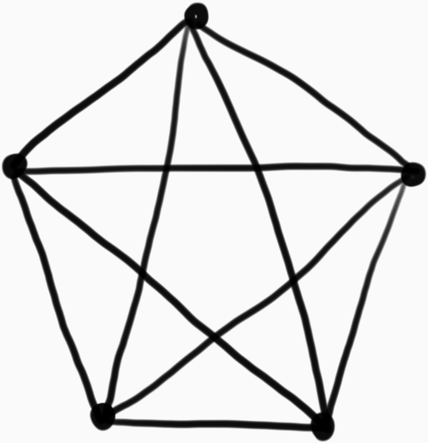
Ainda outra forma:

Qual o menor n de forma que qualquer 2-coloração sobre as arestas de K_n apresenta um subconjunto de tamanho 3 homogêneo?

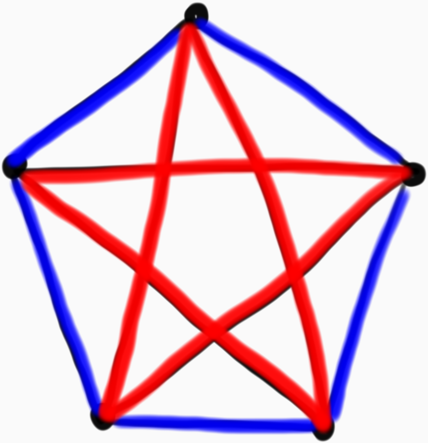
Com 5 não dá



Com 5 não dá



Com 5 não dá



Com 5 não dá

Com 6 dá

Com 6 dá

Com 6 dá

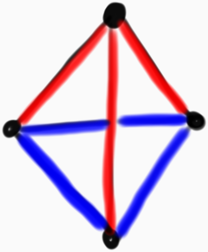
Com 6 dá

Com 6 dá

Com 6 dá

Com 6 dá

Com 6 dá



Mudando a festa

Resolvido este problema, podemos mudar um pouco: se quisermos garantir que existam 4 pessoas que não se conheçam/conheçam?

Mudando a festa

Resolvido este problema, podemos mudar um pouco: se quisermos garantir que existam 4 pessoas que não se conheçam/conheçam?

E depois 5, 6 etc.

Mudando a festa

Resolvido este problema, podemos mudar um pouco: se quisermos garantir que existam 4 pessoas que não se conheçam/conheçam?

E depois 5, 6 etc.

Podemos mudar ainda mais: pense que as relações entre as pessoas podem ser "amigas", "inimigas" ou "neutras".

Mudando a festa

Resolvido este problema, podemos mudar um pouco: se quisermos garantir que existam 4 pessoas que não se conheçam/conheçam?

E depois 5, 6 etc.

Podemos mudar ainda mais: pense que as relações entre as pessoas podem ser "amigas", "inimigas" ou "neutras".

Qual o tamanho mínimo para que a festa tenha 3 com o mesmo tipo de relacionamento entre elas?

Mudando a festa

Resolvido este problema, podemos mudar um pouco: se quisermos garantir que existam 4 pessoas que não se conheçam/conheçam?

E depois 5, 6 etc.

Podemos mudar ainda mais: pense que as relações entre as pessoas podem ser "amigas", "inimigas" ou "neutras".

Qual o tamanho mínimo para que a festa tenha 3 com o mesmo tipo de relacionamento entre elas?

A gente poderia mudar até o tipo de relação - até agora trabalhamos com relações binárias, poderiam ser k-árias.

Primeira pergunta

Primeira pergunta

Existem tais números?

Primeira pergunta

Existem tais números?

A resposta é sim.

Para o infinito e além

Teorema (Ramsey, versão infinita)
Dada uma função $f : [\omega]^2 \to \{1, ..., k\}$*, existe* $H \subset \omega$ *infinito homogêneo - isto é, todos os pares de elementos de* H *têm a mesma cor (imagem por* f*).*

Teorema (Ramsey, versão infinita)
Dada uma função $f : [\omega]^2 \to \{1, ..., k\}$, existe $H \subset \omega$ infinito homogêneo - isto é, todos os pares de elementos de H têm a mesma cor (imagem por f).

A versão casa dos pombos seria:

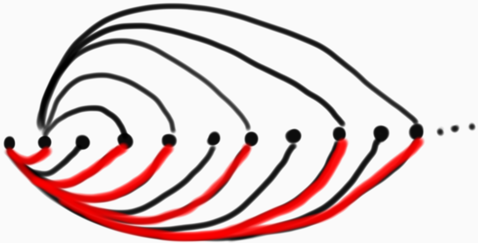
Teorema (Versão bem pior)
Dada uma função $f : [\omega]^2 \to \{1, ..., k\}$ existe um conjunto infinito de pares com uma mesma cor.

Demonstrando

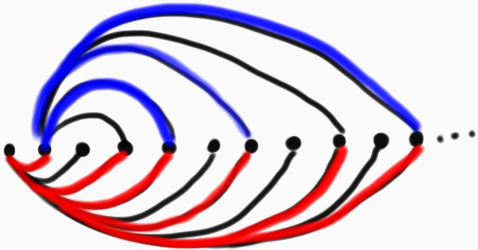
Demonstrando

Demonstrando

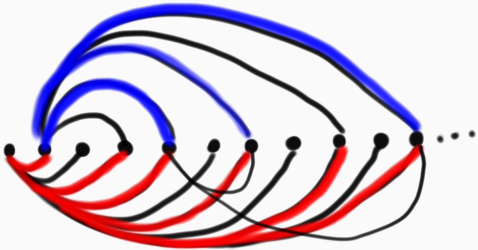
Demonstrando



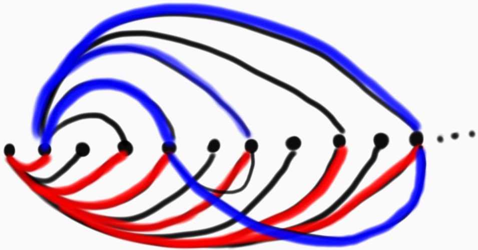
Demonstrando



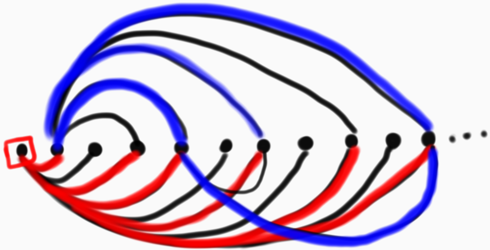
Demonstrando



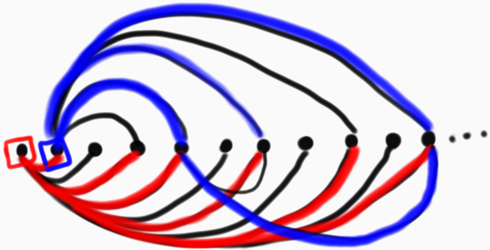
Demonstrando



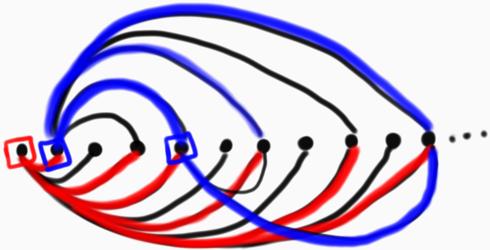
Demonstrando



Demonstrando



Demonstrando



König

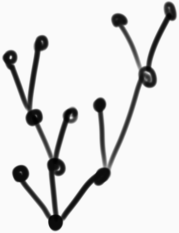
Antes de passar à demonstração da versão finita, seria melhor fazer o seguinte resultado:

König

Antes de passar à demonstração da versão finita, seria melhor fazer o seguinte resultado:

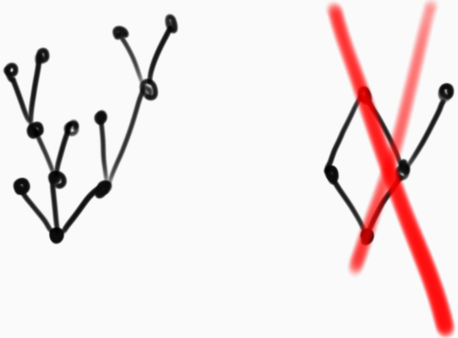
Lema (de König)
Dada uma árvore que bifurca finitamente, se ela é infinita, então ela possui um ramo infinito.

Explicando árvore



Explicando árvore

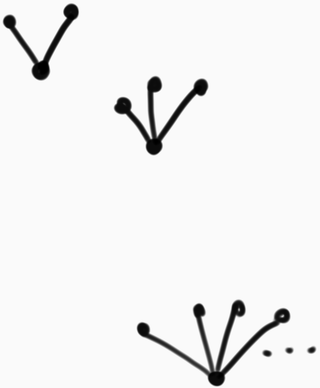
Explicando árvore



Explicando bifurcar finitamente

Explicando bifurcar finitamente

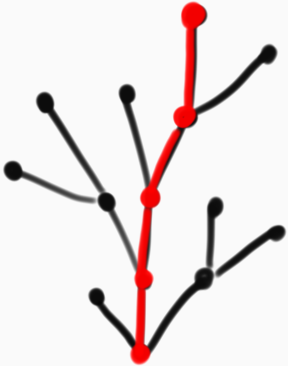
Explicando bifurcar finitamente



Explicando bifurcar finitamente

Explicando ramo

Explicando ramo



Repetindo o enunciado

Lema (de König)
Dada uma árvore que bifurca finitamente, se ela é infinita, então ela possui um ramo infinito.

Vendo que a hipótese é importante

Provando

Provando

Provando

Provando

Teorema (de Ramsey (versão finita))
Sejam $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$. Então existe r tal que, dada qualquer $f : [\{1, ..., r\}]^2 \to \{1, ..., k\}$, existe $H \subset \{1, ..., r\}$ tal que $|H| = n$ e H é homogêneo com relação a f.

Demonstrando

Demonstrando

A chave é supor que não

Demonstrando

A chave é supor que não - e entender o que isso significa.

Demonstrando

A chave é supor que não - e entender o que isso significa.

Dados $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$, para qualquer r existe uma $f : [\{1, ..., r\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ tal que não existe H homogêneo de tamanho n.

Demonstrando

A chave é supor que não - e entender o que isso significa.

Dados $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$, para qualquer r existe uma $f : [\{1, ..., r\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ tal que não existe H homogêneo de tamanho n.

Depois disso, construa uma árvore cujo primeiro andar são todas as colorações $f : [\{1, 2\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ como acima.

Demonstrando

A chave é supor que não - e entender o que isso significa.

Dados $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$, para qualquer r existe uma $f : [\{1, ..., r\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ tal que não existe H homogêneo de tamanho n.

Depois disso, construa uma árvore cujo primeiro andar são todas as colorações $f : [\{1, 2\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ como acima.

Já no segundo nível, coloque todas as $f : [\{1, 2, 3\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ e assim por diante.

Demonstrando

A chave é supor que não - e entender o que isso significa.

Dados $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$, para qualquer r existe uma $f : [\{1, ..., r\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ tal que não existe H homogêneo de tamanho n.

Depois disso, construa uma árvore cujo primeiro andar são todas as colorações $f : [\{1, 2\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ como acima.

Já no segundo nível, coloque todas as $f : [\{1, 2, 3\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ e assim por diante.

Coloque arestas entre funções de níveis adjacentes se a de nível superior estende a do inferior.

Demonstrando

A chave é supor que não - e entender o que isso significa.

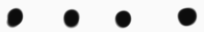
Dados $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$, para qualquer r existe uma $f : [\{1, ..., r\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ tal que não existe H homogêneo de tamanho n.

Depois disso, construa uma árvore cujo primeiro andar são todas as colorações $f : [\{1, 2\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ como acima.

Já no segundo nível, coloque todas as $f : [\{1, 2, 3\}]^2 \to \{1, ..., k\}$ e assim por diante.

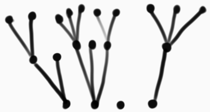
Coloque arestas entre funções de níveis adjacentes se a de nível superior estende a do inferior. (crie cópias se duas são extensões de uma mesma)

Desenhando



Desenhando

Desenhando



Desenhando

Ramos

Ramos

Note que só fizemos arestas entre funções compatíveis, então se juntarmos funções ao longo de um ramo, elas dão origem a uma função.

Ramos

Note que só fizemos arestas entre funções compatíveis, então se juntarmos funções ao longo de um ramo, elas dão origem a uma função.

Note que essa função não admite homogêneo de tamanho n por construção.

Voltando ao König

Mas a árvore é infinita (tem infinitos níveis) e bifurca finitamente (só existem finitas possbilidades de extensão de um nível para o outro).

Voltando ao König

Mas a árvore é infinita (tem infinitos níveis) e bifurca finitamente (só existem finitas possbilidades de extensão de um nível para o outro).

Assim, König contraria o Ramsey infinito.

Enquanto uns estão satisfeitos

Enquanto uns estão satisfeitos

Enquanto o pessoal da pura vai descansar satisfeito com a existência, pessoal da aplicada se pergunta "tudo bem, dado n, existe r - mas quem é o r?".

Enquanto uns estão satisfeitos

Enquanto o pessoal da pura vai descansar satisfeito com a existência, pessoal da aplicada se pergunta "tudo bem, dado n, existe r - mas quem é o r?".

Vimos no começo que $R(3) = 6$.

Enquanto uns estão satisfeitos

Enquanto o pessoal da pura vai descansar satisfeito com a existência, pessoal da aplicada se pergunta "tudo bem, dado n, existe r - mas quem é o r?".

Vimos no começo que $R(3) = 6$.

$R(4) = 18$

Enquanto uns estão satisfeitos

Enquanto o pessoal da pura vai descansar satisfeito com a existência, pessoal da aplicada se pergunta "tudo bem, dado n, existe r - mas quem é o r?".

Vimos no começo que $R(3) = 6$.

$R(4) = 18$

$43 \leq R(5) \leq 48$

Enquanto uns estão satisfeitos

Enquanto o pessoal da pura vai descansar satisfeito com a existência, pessoal da aplicada se pergunta "tudo bem, dado n, existe r - mas quem é o r?".

Vimos no começo que $R(3) = 6$.

$R(4) = 18$

$43 \leq R(5) \leq 48$

$102 \leq R(6) \leq 165$