

Grafos e Suas Amigas Especias: Árvores

Igor S. Santos

February 27, 2026

Como visualizar as extremidades de um grafo infinito? Embora os espaços de extremidades nos deem muitas informações sobre a estrutura global de um grafo infinito, ver a 'cara' da sua topologia pode não ser uma tarefa fácil. Se o grafo fosse uma árvore — ou, de outra forma, se o seu espaço de extremidades pudesse ser visto como o de uma árvore bem comportada — talvez não tivéssemos tantos problemas. No entanto, o problema é que, no geral, isso não ocorre com tanta frequência. Neste Combinando, mostraremos que, embora nem todo grafo infinito possua uma árvore que preserve as suas extremidades, todos eles podem ser representados por algo muito próximo disso.

1 T -Grafos

Vamos relembrar a definição de árvore para ordens parciais.

Definição 1.1. Um conjunto parcialmente ordenado $(T, \leq)$ é chamado de *árvore* se possui um único elemento minimal (chamado de raiz) e todos os subconjuntos da forma

$$\lceil t \rceil = \lceil t \rceil_T := \{t' \in T : t' \leq t\}$$

para $t \in T$ são bem-ordenados. Denotamos também $\overset{\circ}{\lceil t \rceil} := \lceil t \rceil \setminus \{t\}$ e $\lfloor t \rfloor := \lfloor t \rfloor \setminus \{t\}$. Mais geralmente, para subconjuntos $X \subseteq T$ colocamos

$$\lceil X \rceil := \bigcup_{t \in X} \lceil t \rceil.$$

Uma cadeia maximal em T é chamada de *ramo* de T ; note que cada ramo herda uma boa-ordenação de T . A *altura* de T é o supremo dos tipos de ordem de seus ramos. A altura de um ponto $t \in T$ é o tipo de ordem de $\overset{\circ}{\lceil t \rceil}$.

O conjunto T^i de pontos de altura i é o i -ésimo nível de T , e escrevemos

$$T^{<i} := \bigcup_{j < i} T^j \quad \text{e} \quad T^{\leq i} := \bigcup_{j \leq i} T^j.$$

Se $t < t'$, usamos a notação usual

$$(t, t') := \{s : t < s < t'\}$$

para os nós entre t e t' . Se não há ponto entre t e t' , dizemos que t' é um *sucessor* de t e que t é o *predecessor* de t' ; se t' não é sucessor de nenhum ponto, ele é chamado de *limite*. Um *topo* de uma cadeia fechada inferiormente $\mathcal{C}$ em T é um limite $t \in T \setminus \mathcal{C}$ tal que $\overset{\circ}{[t]} = \mathcal{C}$. Note que uma cadeia $\mathcal{C} \subseteq T$ pode ter múltiplos topos.

Definição 1.2. Dada uma árvore $(T, \leq)$, um grafo $G = (V, E)$ é dito um *T-grafo* se $V = T$, as extremidades de qualquer aresta $e = tt'$ são comparáveis em T , e o conjunto dos vizinhos inferiores (i.e. abaixo de) um elemento $t \in T$ é cofinal em

$$\overset{\circ}{[t]} := \{t' \in T : t' < t\}.$$

Os ramos de um T -grafo possuem uma cara muito parecida com os caminhos tradicionais do grafo. De forma mais direta, eles coincidem com a noção de caminho generalizado introduzido por Rado em 1978 em um artigo sobre decomposição do K_ω e finitos caminhos monocromaticos.

Definição 1.3. Um caminho generalizado é um grafo P com uma boa ordem $\preccurlyeq$ em $V(P)$ tal que os vizinhos de v são cofinais em $\overset{\circ}{[v]} := \{w \in P : w \prec v\}$ para todo $v \in V(P)$.

Em especial, isso implica que para todo $v' < v$, existe um vizinho w de v com $v' \leq w < v$. O nome caminho generalizado é justificado pelo seguinte:

Proposição 1.4. *Uma boa ordem $\preccurlyeq$ em P testemunha que P é um caminho generalizado se, e somente se, entre quaisquer dois vértices $w \preccurlyeq v$ em P existe um caminho finito estritamente crescente de w para v .*

Proof. De fato, começando do maior vértice $v = v_0$ e usando a definição de um caminho generalizado, podemos escolher v_1 como o menor vizinho abaixo de v acima de w . Se $v_1 = w$, terminamos. Caso contrário, repetimos o processo e escolhemos v_2 como o menor vizinho abaixo de v_1 e acima de w . Continuando dessa forma, devemos eventualmente chegar a $v_n = w$, uma vez que não existe uma sequência decrescente infinita $v_0 > v_1 > \dots$ na boa ordem $\preccurlyeq$ em P .

Para ver o outro lado, se para um v fixo qualquer intervalo $[w, v]$ para $w < v$ é conexo, então os vizinhos de v devem ser cofinais em $\overset{\circ}{[t]}$. $\square$

Vejamos agora que um T -Grafo se aproxima muito do que é uma árvore normal.

Lema 1.5. *Seja $(T, \leq)$ uma árvore ordenada e G um T -grafo. Então:*

- (1) *Para vértices incomparáveis $t, t' \in T$, o conjunto $[t] \cap [t']$ separa t de t' em G .*
- (2) *Todo subgrafo conexo de G possui um único elemento T -minimal.*
- (3) *Se $T' \subseteq T$ é fechado para baixo, então as componentes de $G - T'$ são geradas por $[t]$ para cada t minimal em $T \setminus T'$.*
- (4) *Para quaisquer vértices $t \leq t'$ em T , o intervalo $[t, t']$ é conexo em G .*

Proof.

- (1) Seja $P = t_1, \dots, t_n$, com $t_1 = t$ e $t_n = t'$, um caminho de t a t' em G . Note que, para qualquer k , t_k e t_{k+1} são comparáveis na ordem de T . Assim, podemos tomar $s_1, \dots, s_m$ sequência de vértices de P , de forma que s_k e s_{k+1} sejam comparáveis na ordem de T , $s_1 = v$, $s_m = w$ e $s_1, \dots, s_m$ seja minimal com tais propriedades. Note que então não pode existir k de forma que

$$s_{k-1} < s_k > s_{k+1},$$

pois, neste caso, s_{k-1} e s_{k+1} seriam comparáveis e, portanto, s_k poderia ser omitido da sequência, contrariando a minimalidade. Assim, a sequência é da forma

$$v = s_1 > s_2 > \dots s_k < \dots < s_{m-1} < s_m = w$$

e, portanto, $s_k \in [v] \cap [w]$.

- (2) Se H é um subgrafo conexo de G é fácil ver que, de fato, existe um elemento T -minimal. Quanto a unicidade, basta ver que se $t, t' \in T$, são minimais distintos em H , eles não podem ser comparáveis. Logo, pelo item 1, $[t] \cap [t']$ separa t de t' em G . Da conexidade de H , poderíamos encontrar um elemento menor que t e t' , contrariando o fato de eles serem minimais.
- (3) Segue diretamente do item 2.
- (4) É imediato.

□

2 Conjuntos de Adesão

Definição 2.1. Dizemos que um T -grafo G possui **adesão uniformemente finita** ou, abreviadamente, é **uniforme** se, para cada elemento limite $t \in T$, existe um conjunto finito $S_t \subset \overset{\circ}{[t]}$ tal que todo $t' > t$ possui todos os seus vizinhos menores que t em S_t .

Analogamente, temos um resultado parecido para o caso da adesão uniforme.

Lema 2.2. *As seguintes afirmações são equivalentes para um T -grafo G :*

- (i) G tem adesão uniformemente finita.
- (ii) Todo conjunto de vértices da forma $\underset{\circ}{[t]}$ para um limite $t \in T$ tem vizinhança finita em G .
- (iii) Todo conjunto de vértices da forma $\underset{\circ}{[t]}$ tem vizinhança finita em G .

Proof.

1. (i $\Rightarrow$ ii) Da definição, se G tem adesão uniformemente finita, então todo conjunto de vértices da forma $\lfloor t \rfloor_{\circ}$ para um limite $t \in T$ tem todos os seus vizinhos no conjunto finito $S_t \cup \{t\}$.
2. (ii $\Rightarrow$ iii) Suponha, pelo contrário, que para algum $t \in T$, $\lfloor t \rfloor_{\circ}$ tenha infinitos vizinhos. Então, encontramos uma ω -cadeia de infinitos vizinhos $t_0 < t_1 < \dots$ de $\lfloor t \rfloor_{\circ}$ e um elemento limite $\ell \leq t$ tal que $t_n < \ell$ para todo $n < \omega$. Mas então $\lfloor \ell \rfloor_{\circ} \supseteq \lfloor t \rfloor_{\circ}$ também tem vizinhança infinita, uma contradição.
3. (iii $\Rightarrow$ i) Seja t um elemento limite de T . Então $S_t = N(\lfloor t \rfloor_{\circ}) \setminus \{t\}$ é como desejado.

□

Lema 2.3. *Se G é um T -grafo uniforme e $t \in T$ é um limite, então os vizinhos inferiores de t formam uma ω -cadeia cofinal em $\lceil t \rceil$.*

Proof. Pela definição de T -grafo e pelo fato de t ser limite, é claro que o conjunto dos vizinhos inferiores de t forma uma cadeia infinita $\mathcal{C} \subseteq \lceil t \rceil$. Para afirmação de que $\mathcal{C}$ é ω -cadeia, basta mostrarmos que todos seus segmentos iniciais são finitos. De fato, para um segmento inicial da forma $C_s := \{v \in \mathcal{C} : v < s\}$, com $s \in \mathcal{C}$, temos que todo $v \in C_s$ é vizinho de t . Mas note que isso implica que $C_s \subset N(\lfloor s \rfloor_{\circ})$, que é finito pelo Lema anterior. □

Nosso próximo resultado caracteriza para quais árvores existem T -grafos uniforme. Para isso, dizemos que uma ordem parcial P pode ser *mergulhada* em uma ordem parcial Q se existe uma aplicação $f : P \rightarrow Q$ tal que $p < p'$ implica $f(p) < f(p')$ (em particular, tais aplicações não precisam ser injetivas)

Definição 2.4. Uma árvore ordenada $(T, \leq)$ é chamada *especial* se pode ser particionada em uma quantidade enumerável de anticadeias.

Teorema 2.5 (Baumgartner e Galvin). *Seja $(T, \leq)$ uma árvore de ordem. $(T, \leq)$ é especial se, e somente se, $(T, \leq)$ pode ser mergulhada $(\mathbb{Q}, \leq)$.*

Teorema 2.6. *Seja $(T, \leq)$ uma árvore de ordem. Então existe um T -grafo uniforme se, e somente se, $(T, \leq)$ é especial.*

Proof. vamos mostrar que, se T é especial com partição em anticadeias $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ então podemos construir uma T -grafo uniforme. Vamos construir nosso T -grafo da seguinte forma:

- (i) Conectamos os elementos sucessores aos seus antecessores;
- (ii) Dado um elemento limite $t \in T$, escolhemos seus vizinhos inferiores $t_0 <_T t_1 <_T t_2 <_T \dots <_T t$ com $t_i \in U_{n_i}$ recursivamente de forma que $t_{i-1} < t_i < t$ e cada n_i é escolhido como o menor possível.

É claro que qualquer aresta criada conecta dois elementos comparáveis em T . Além disso, se t é um elemento limite e $s < t$, considere o índice m tal que $s \in U_m$. Pela nossa construção, deve existir i tal que $n_i > m$. Vamos mostrar que $t_i > s$, o que prova a cofinalidade (para t sucessor, o resultado é óbvio). Suponha, por absurdo, que $s > t_i$. Então s também está acima de t_{i-1} . Como $s \in U_m$ com $m < n_i$, existe um elemento acima de t_{i-1} cujo índice é menor que n_i . Mas note que isso contradiz escolha de n_i como o menor índice possível entre os elementos acima de t_{i-1} . Isso mostra que, de fato, a construção nos deu um T -grafo G .

Afirmamos G tem adesão uniformemente finita. De fato, se $t \in U_n$ é um elemento limite, podemos escolher $S_t = \{t' \in \overset{\circ}{[t]} : t' \in U_m, \text{ para algum } m < n\}$. Assim, para $s > t$, não pode haver um vizinho de s abaixo de t que pertence a uma anticadeia de índice maior que t ; caso contrário, o nosso algoritmo teria escolhido t como vizinho de s nesse passo. $\square$

Corolário 2.7. *Se G é um T -grafo uniforme, então todos os ramos de T são enumeráveis.*

Proof. Basta notar que uma cadeia não enumerável não pode ser mergulhada nos racionais. $\square$

3 O Espaço de Extremidade de Um T -Grafo de Adesão Finita

Definição 3.1. Uma cadeia fechada para baixo $\mathcal{C}$ em uma árvore (no sentido de ordem) T é chamada de *high-ray* de T se o seu tipo de ordem for um ordinal limite (equivalentemente: se $\mathcal{C}$ não possui elemento maximal). Denotamos o conjunto de todos os *high-rays* de T por $\mathcal{R}(T)$.

Note que, no contexto de T -grafos uniformes, todos os *high-rays* em T têm cofinalidade ω (ver Lema 2.7).

Seja G um T -grafo de adesão finita. Todo $t \in T$ induz uma bipartição $\{[t], T \setminus [t]\}$ de T . Visto que T é o conjunto de vértices de G , segue-se que $\Omega(G) = \partial_\Omega[t] \cup \partial_\Omega(T \setminus [t])$. Para cada extremidade ε de G , definimos

$$\sigma(\varepsilon) := \{t \in T : \varepsilon \in \partial_\Omega[t] \setminus \partial_\Omega(T \setminus [t])\}.$$

Vamos mostrar que $\sigma(\varepsilon)$ é uma cadeia fechada para baixo em T . Seja $t \in \sigma(\varepsilon)$ e $s < t$. Como s está abaixo de t , tem-se $[t] \subseteq [s]$, o que implica $T \setminus [s] \subseteq T \setminus [t]$. Pela definição de $\sigma(\varepsilon)$:

- $\varepsilon \in \partial_\Omega[t] \subseteq \partial_\Omega[s] \implies \varepsilon \in \partial_\Omega[s]$.
- $\varepsilon \notin \partial_\Omega(T \setminus [t]) \supseteq \partial_\Omega(T \setminus [s]) \implies \varepsilon \notin \partial_\Omega(T \setminus [s])$.

Logo, $s \in \sigma(\varepsilon)$.

Por fim, suponha que $t_1, t_2 \in \sigma(\varepsilon)$ sejam incomparáveis. Então $[t_1] \cap [t_2] = \emptyset$, logo $[t_1] \subseteq T \setminus [t_2]$. Disso, segue que $\varepsilon \in \partial_\Omega[t_1] \subseteq \partial_\Omega(T \setminus [t_2])$. Isto contradiz o fato de que $t_2 \in \sigma(\varepsilon)$.

Lema 3.2. *Se G é um T -grafo uniforme, então existe uma bijeção entre o espaço de extremidade $\Omega(G)$ e o conjunto $\mathcal{R}(T)$ de todos os high-rays de T .*

Um caminho em uma árvore T é uma cadeia fechada para baixo, onde denotamos por $\mathcal{P}(T)$ o conjunto de todos os caminhos em T e o chamaremos de *espaço de caminhos de T* . Podemos ver o conjunto $\mathcal{P}(T)$ através de suas funções características como um subespaço fechado - e, portanto, compacto - de 2^T . Em especial, podemos identificar $T \subset \mathcal{P}$ tomando, para cada $t \in T$ o seu recíproco $[t]$. Dessa forma, podemos encher $\mathcal{P}(T)$ como uma compactificação de T . Dessa forma, a fronteira dessa compactificação é o espaço dos raios $\mathcal{R}(T)$.

É claro que o espaço dos raios altos $\mathcal{R}(T)$ é um subespaço de $\mathcal{P}(T)$; mais do que isso, vamos mostrar que a topologia de um espaço de extremidades de um T grafo uniforme é a mesma topologia do seu espaço de raios altos $\mathcal{R}(T)$. Em especial, note que a definição de $\mathcal{R}(T)$ como um subespaço de 2^T é equivalente à afirmação de que a topologia de $\mathcal{R}(T)$ é a menor topologia na qual todos os conjuntos da forma $[t] = \{x \in \mathcal{P}(T) : t \in x\}$ e seus complementares $[t]^c = \{x \in \mathcal{P}(T) : t \notin x\}$ são abertos.

Lema 3.3. *Para o espaços de raios, uma base local $\mathcal{C}(x)$ para um high-ray $x \in \mathcal{R}(T)$ é dada por conjuntos da forma*

$$[t, F] := [t] \setminus \bigcup_{s \in F} [s] = [t] \setminus [F]$$

onde $t \in x$ e F é um conjunto finito de topos de x .

Teorema 3.4. *O espaço de extremidades de um T -grafo uniforme é homeomorfo ao seu espaço de raios $\mathcal{R}(T)$. De outra forma, se T é uma árvore especial, então qualquer T -grafo define o mesmo espaço de extremidades.*

Teorema 3.5.

Teorema 3.6 (Kurkofka e Pitz, 2021). *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço topológico X :*

1. X é homeomorfo ao espaço de extremidades de um grafo;
2. X é homeomorfo ao espaço de extremidade de um T -grafo uniforme sobre uma árvore (especial) T ;
3. X é homeomorfo ao espaço de raios de uma árvore especial T .

References

- [1] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th edition, Springer, 2017.
- [2] M. Pitz, *Characterising Path-, Ray- and Branch Spaces of Order Trees, and End Spaces of Infinite Graphs*. <https://arxiv.org/abs/2303.00547>. 2023
- [3] J. Kurkofka and M. Pitz. *A Representation Theorem for End Spaces of Infinite Graphs*. <https://arxiv.org/abs/2111.12670>. 2021 .