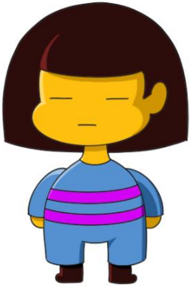
O Teorema do Sanduíche de Presunto

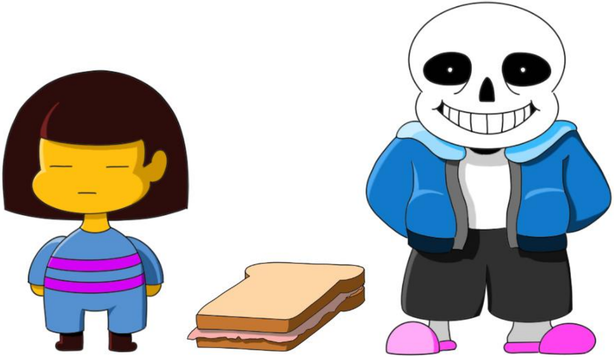
Combinando

Setembro 2021

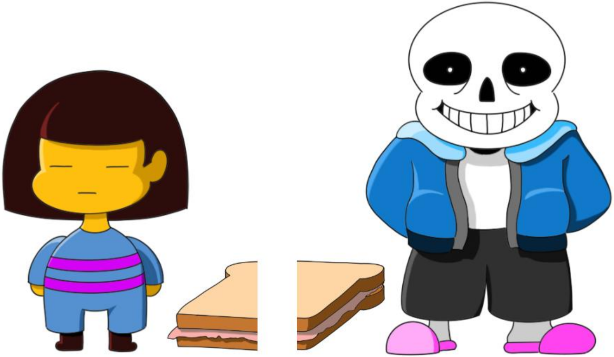
O Sanduíche de Presunto



O Sanduíche de Presunto



O Sanduíche de Presunto

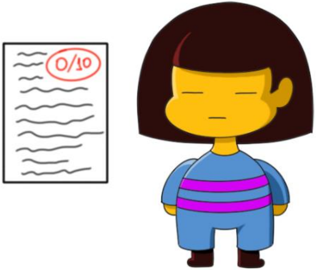


O Sanduíche de Presunto

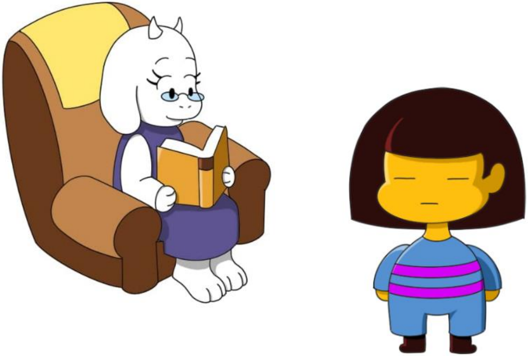
O Sanduíche de Presunto

O Sanduíche de Presunto

O Sanduíche de Presunto



O Sanduíche de Presunto



O Teorema do Sanduíche de Presunto

O Teorema do Sanduíche de Presunto

Teorema do Sanduíche de Presunto

Seu amigo é um sacana.

O Teorema do Sanduíche de Presunto

Teorema do Sanduíche de Presunto

Dado um sanduíche de presunto, é sempre possível, com um único corte reto, dividir em duas partes de mesmo volume cada uma das fatias de pão E TAMBÉM o presunto.

O Teorema do Sanduíche de Presunto

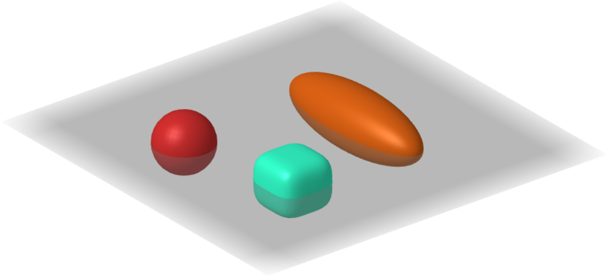
Teorema do Sanduíche de Presunto

Dados três subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo *certas condições*, é sempre possível dividir em duas partes de mesmo volume cada um deles com um único plano.

O Teorema do Sanduíche de Presunto

Teorema do Sanduíche de Presunto

Dados três subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ satisfazendo *certas condições*, é sempre possível dividir em duas partes de mesmo volume cada um deles com um único plano.



Mãos à obra!

O Teorema do Ponto Fixo

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

O Teorema do Ponto Fixo

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Um **domínio de ponto fixo** é um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que toda função contínua $f : X \to X$ possui um ponto fixo.

O Teorema do Ponto Fixo

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

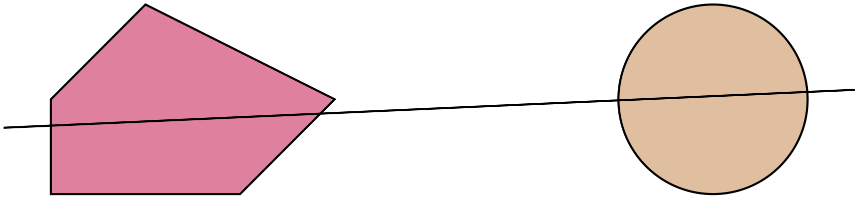
Um **domínio de ponto fixo** é um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que toda função contínua $f : X \to X$ possui um ponto fixo.

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Subconjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ são domínios de ponto fixo.

Geleia e manteiga de amendoim

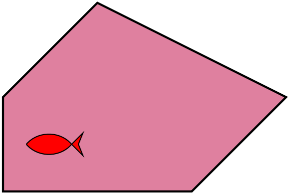
Geleia e manteiga de amendoim



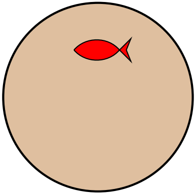
Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:

Geleia e manteiga de amendoim

Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:



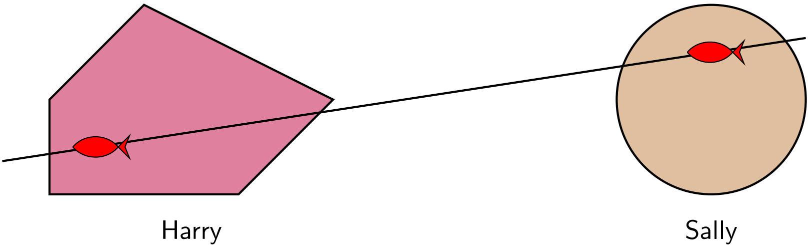
Harry



Sally

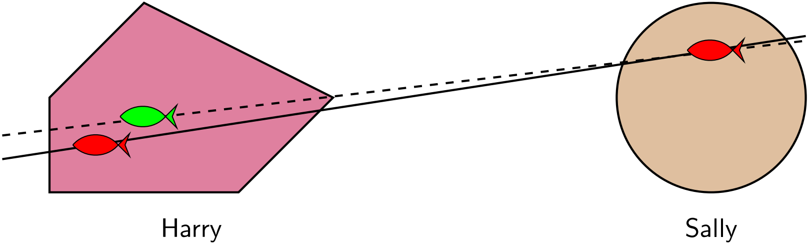
Geleia e manteiga de amendoim

Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:



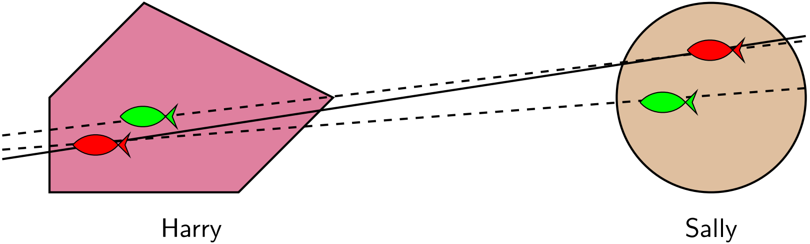
Geleia e manteiga de amendoim

Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:



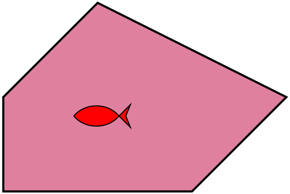
Geleia e manteiga de amendoim

Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:

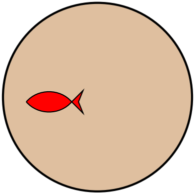


Geleia e manteiga de amendoim

Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:



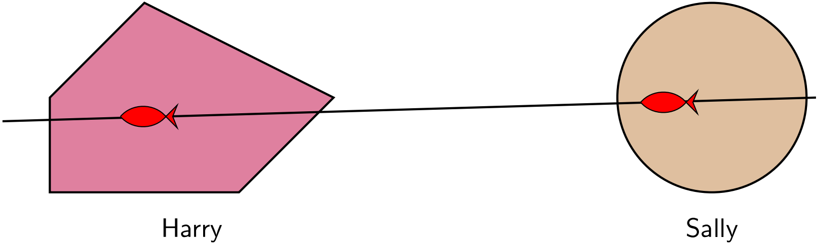
Harry



Sally

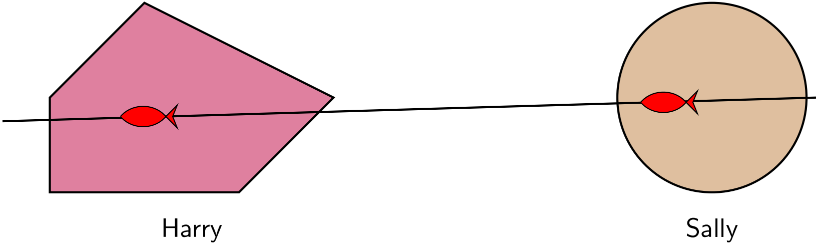
Geleia e manteiga de amendoim

Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:



Geleia e manteiga de amendoim

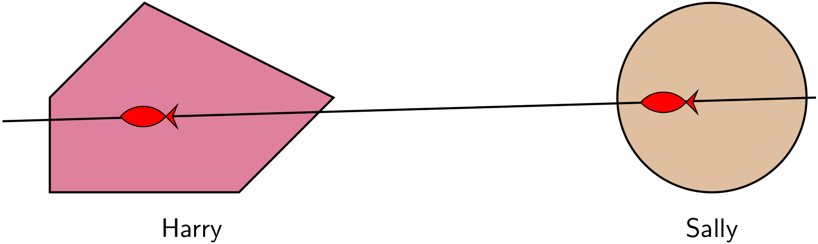
Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:



Assim, temos uma função contínua $f : A \times B \to A \times B$

Geleia e manteiga de amendoim

Considere dois subconjuntos compactos e convexos A, B de $\mathbb{R}^2$:



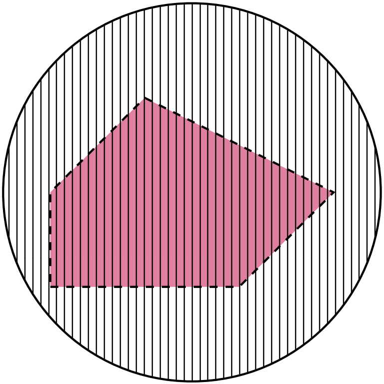
Assim, temos uma função contínua $f : A \times B \to A \times B$, que deve ter um ponto fixo!

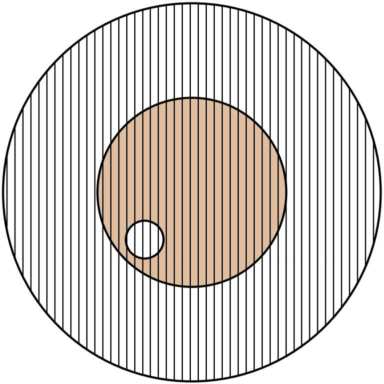
De modo mais geral...

Considere dois subconjuntos <u>limitados</u> A, B de $\mathbb{R}^2$:

De modo mais geral...

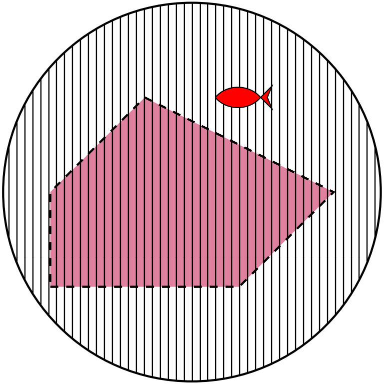
Considere dois subconjuntos <u>limitados</u> A, B de $\mathbb{R}^2$:



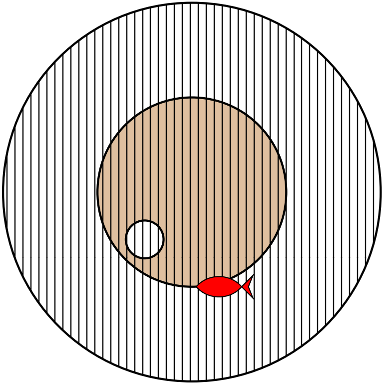


De modo mais geral...

Considere dois subconjuntos limitados A, B de $\mathbb{R}^2$:



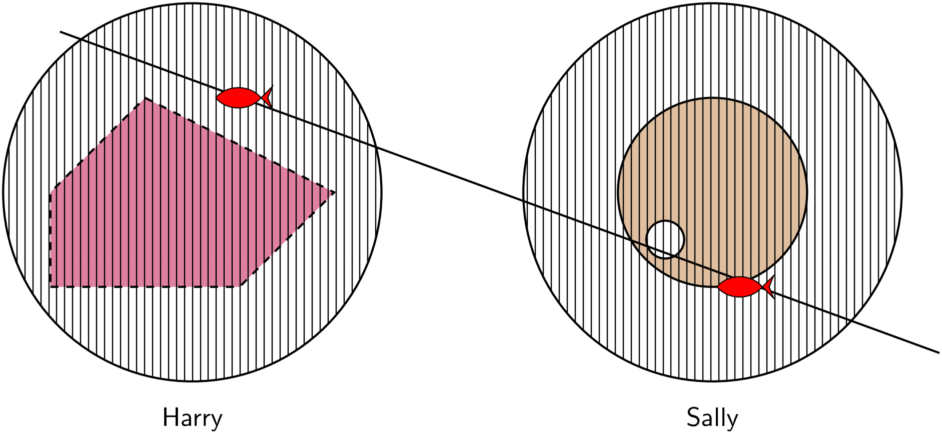
Harry



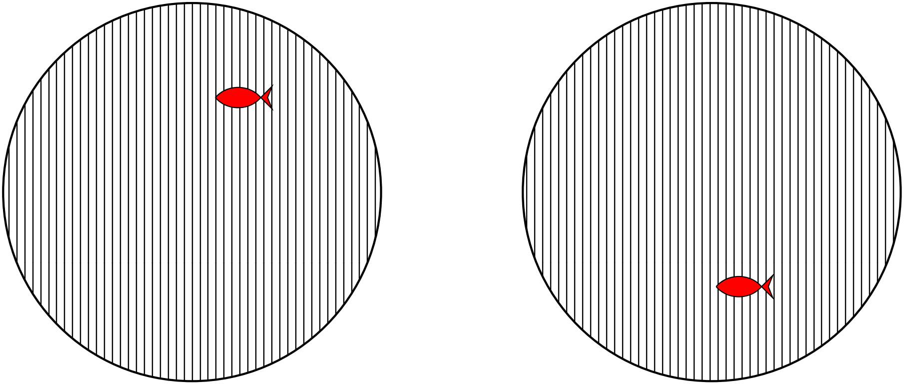
Sally

De modo mais geral...

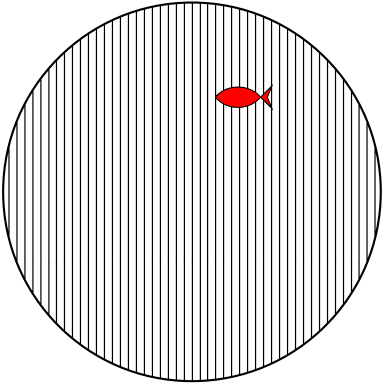
Considere dois subconjuntos limitados A, B de $\mathbb{R}^2$:

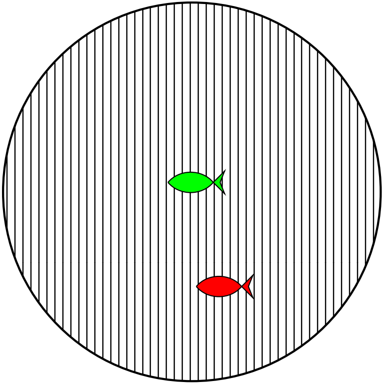


O erro

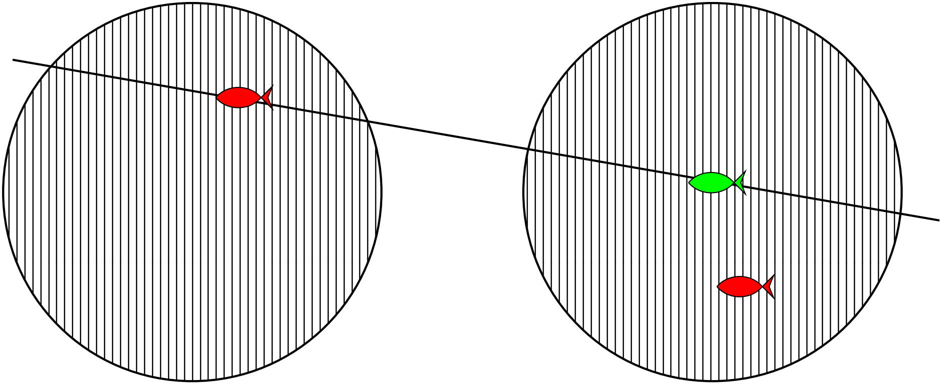


O erro

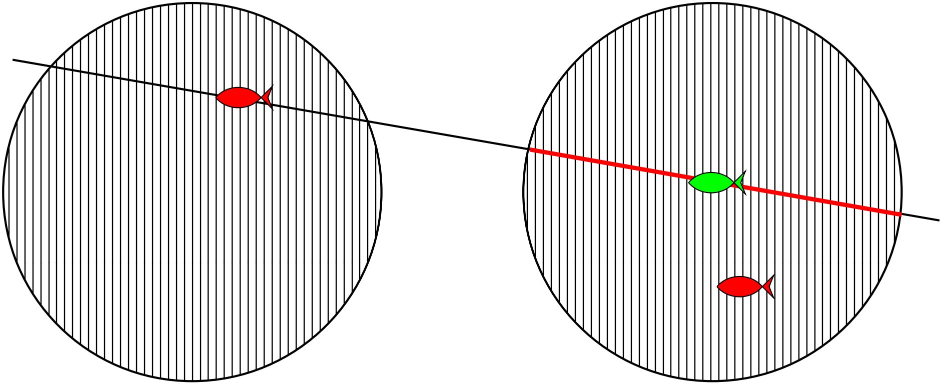




O erro



O erro



Mais pontos fixos

Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

Mais pontos fixos

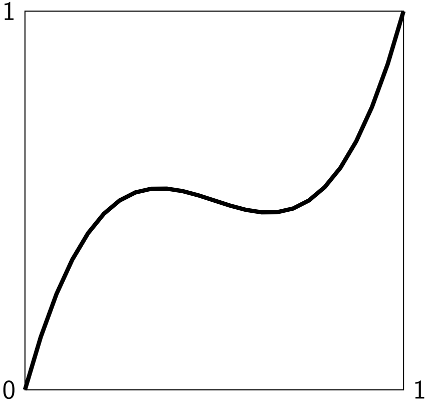
Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é um ponto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.

Mais pontos fixos

Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

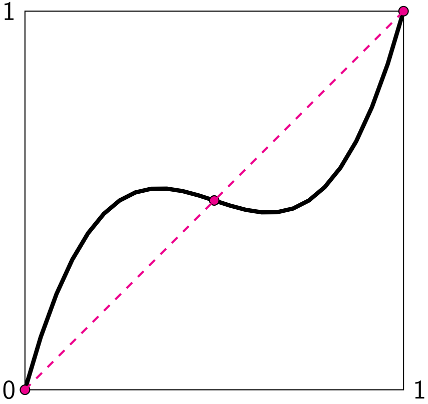
Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é um ponto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.



Mais pontos fixos

Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

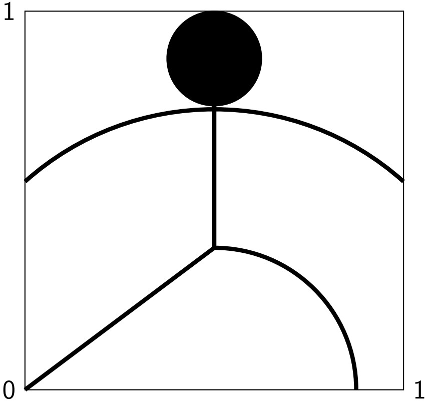
Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é um ponto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.



Mais pontos fixos

Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

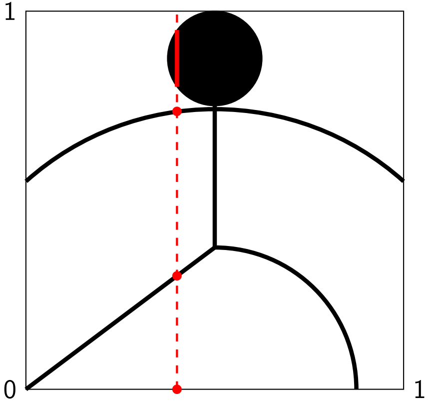
Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é um ponto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.



Mais pontos fixos

Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

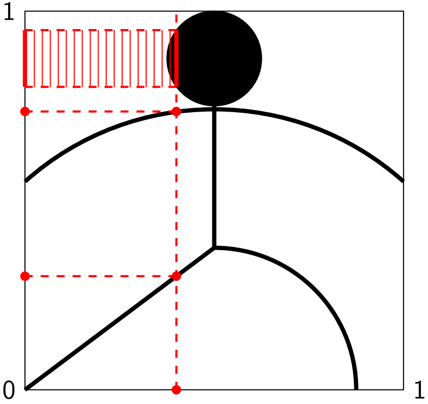
Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é um ponto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.



Mais pontos fixos

Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

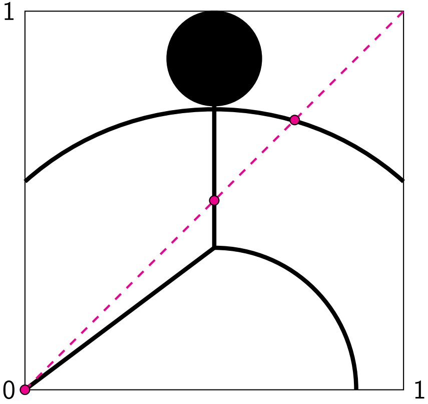
Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é um ponto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.



Mais pontos fixos

Seja $\mathcal{P}(X)$ o *conjunto dos subconjuntos* de X.

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é um ponto $x \in X$ tal que $x \in f(x)$.



Funções mais ou menos contínuas

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to X$ é dita **contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n = f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y = f(x)$.

Funções mais ou menos contínuas

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to X$ é dita **contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n = f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y = f(x)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é dita **semi-contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n \in f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y \in f(x)$.

Funções mais ou menos contínuas

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to X$ é dita **contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n = f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y = f(x)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é dita **semi-contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n \in f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y \in f(x)$.

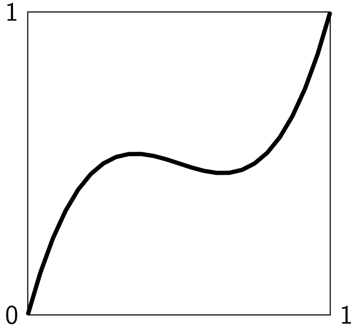
Note que isso é equivalente a dizer que o gráfico de f é fechado.

Funções mais ou menos contínuas

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to X$ é dita **contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n = f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y = f(x)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é dita **semi-contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n \in f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y \in f(x)$.

Note que isso é equivalente a dizer que o gráfico de f é fechado.

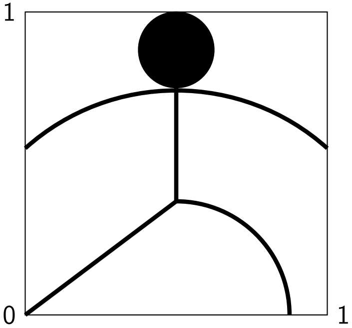


Funções mais ou menos contínuas

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to X$ é dita **contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n = f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y = f(x)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é dita **semi-contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n \in f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y \in f(x)$.

Note que isso é equivalente a dizer que o gráfico de f é fechado.

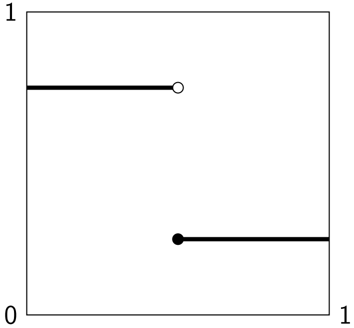


Funções mais ou menos contínuas

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to X$ é dita **contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n = f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y = f(x)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é dita **semi-contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n \in f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y \in f(x)$.

Note que isso é equivalente a dizer que o gráfico de f é fechado.

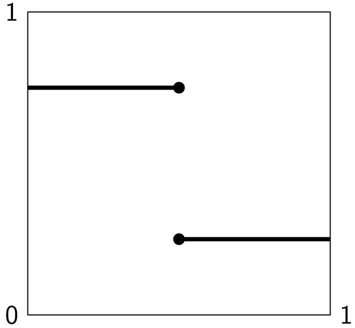


Funções mais ou menos contínuas

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to X$ é dita **contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n = f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y = f(x)$.

Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é dita **semi-contínua** se, dadas $(x_n), (y_n)$ sequências em X com $y_n \in f(x_n)$, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $y \in f(x)$.

Note que isso é equivalente a dizer que o gráfico de f é fechado.

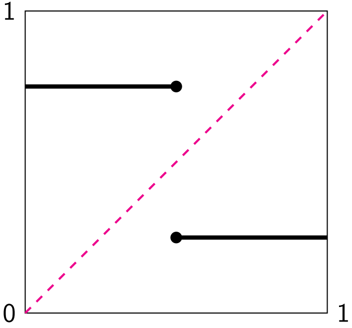


O Teorema do Ponto Fixo - Uma Nova Esperança

Semi-continuidade **não** é suficiente para garantir que haja um ponto fixo.

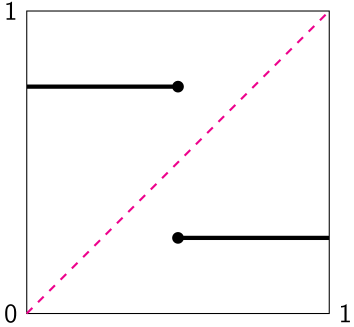
O Teorema do Ponto Fixo - Uma Nova Esperança

Semi-continuidade **não** é suficiente para garantir que haja um ponto fixo.



O Teorema do Ponto Fixo - Uma Nova Esperança

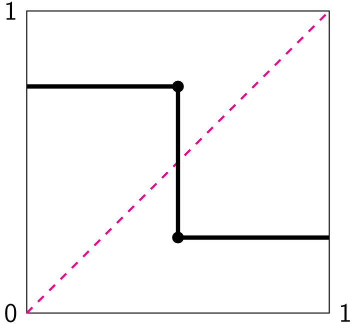
Semi-continuidade **não** é suficiente para garantir que haja um ponto fixo.



Mas isso é verdade se exigirmos que $f(x)$ seja *convexo* para todo $x \in X$.

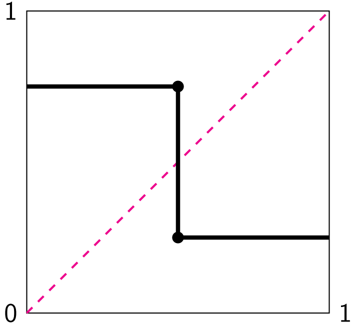
O Teorema do Ponto Fixo - Uma Nova Esperança

Semi-continuidade **não** é suficiente para garantir que haja um ponto fixo.



Mas isso é verdade se exigirmos que $f(x)$ seja *convexo* para todo $x \in X$.

Semi-continuidade **não** é suficiente para garantir que haja um ponto fixo.

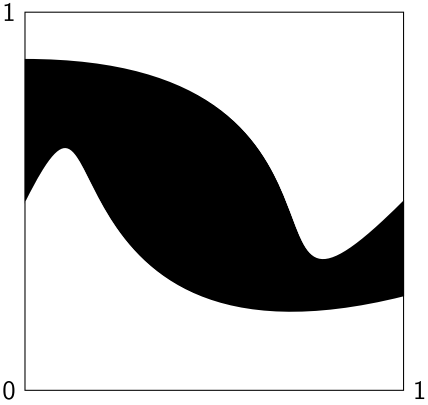


Mas isso é verdade se exigirmos que $f(x)$ seja *convexo* para todo $x \in X$.

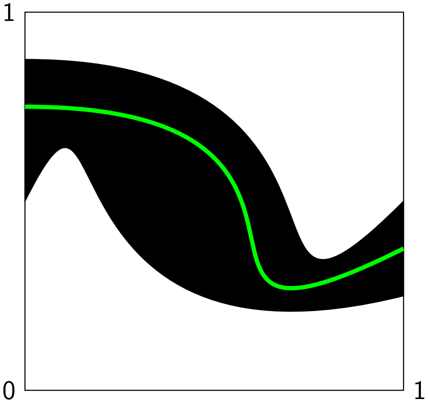
Teorema do Ponto Fixo de Kakutani

Se X é um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathcal{P}(X)$ é uma função semi-contínua cujos elementos da imagem são convexos, então f possui um ponto fixo.

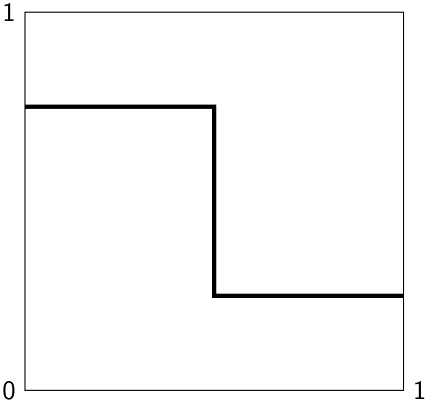
Conversão de funções



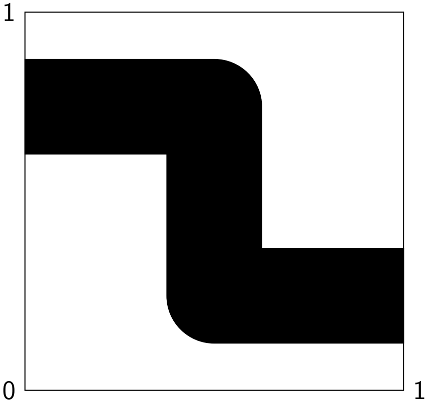
Conversão de funções



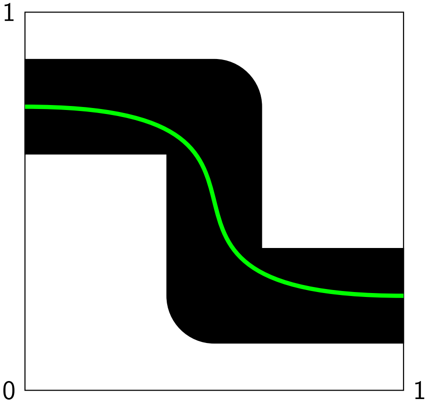
Conversão de funções...?



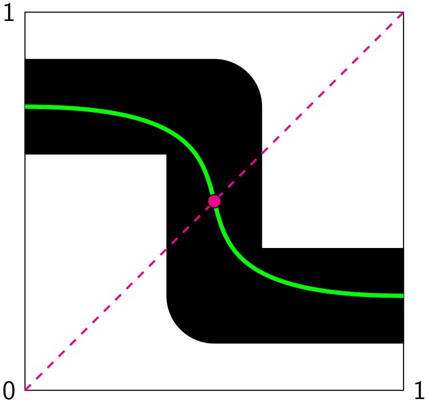
Conversão de funções...?



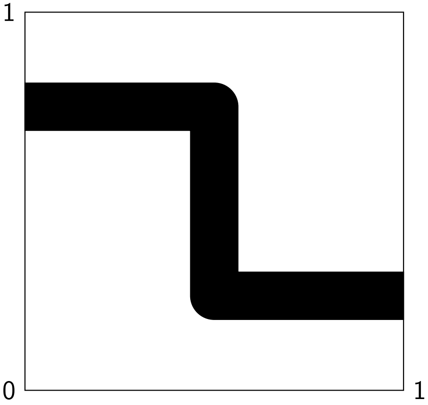
Conversão de funções...?



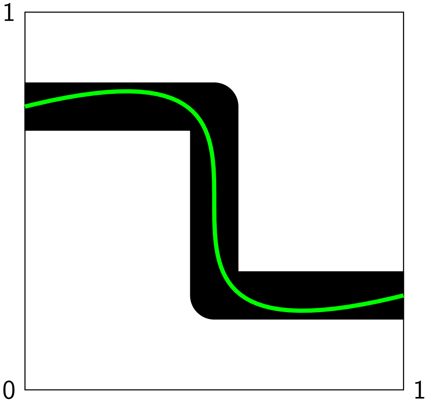
Conversão de funções...?



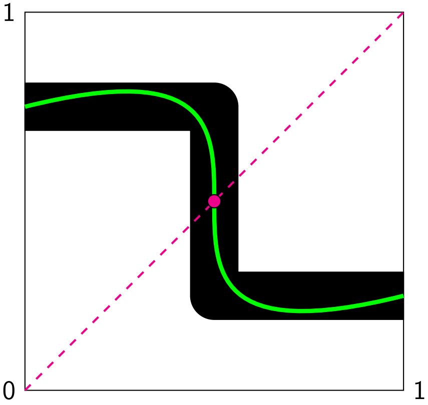
Refinando conversões!



Refinando conversões!



Refinando conversões!



Et cetera

Assim, obtemos uma sequência de pontos fixos de uma sequência de funções contínuas que se aproximam da nossa função original!

Et cetera

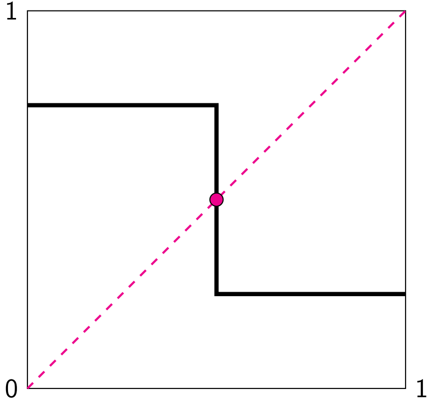
Assim, obtemos uma sequência de pontos fixos de uma sequência de funções contínuas que se aproximam da nossa função original!

Como estamos em um conjunto compacto, essa sequência de pontos fixos terá uma subsequência convergente. O limite de tal subsequência será um ponto fixo da nossa função original.

Et cetera

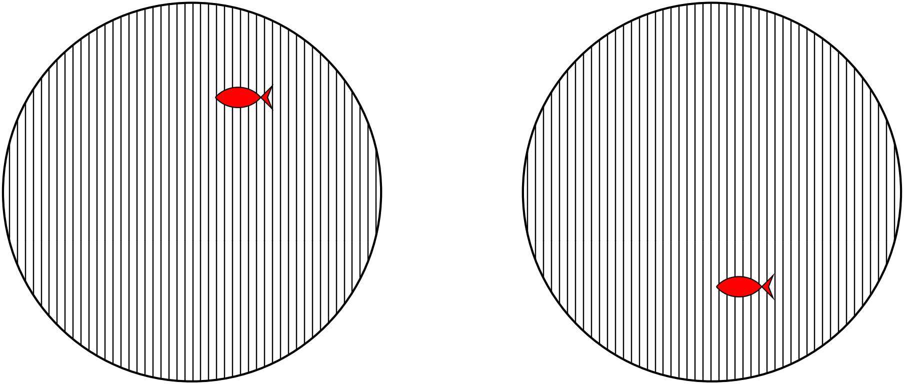
Assim, obtemos uma sequência de pontos fixos de uma sequência de funções contínuas que se aproximam da nossa função original!

Como estamos em um conjunto compacto, essa sequência de pontos fixos terá uma subsequência convergente. O limite de tal subsequência será um ponto fixo da nossa função original.



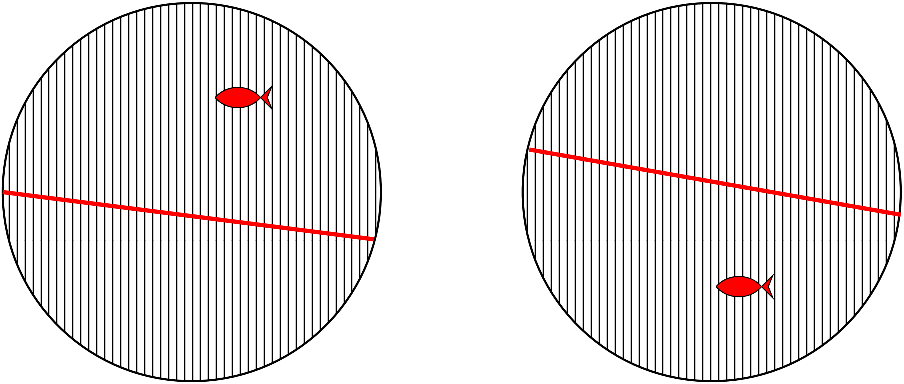
Tudo certo agora!

Assim, temos uma função semi-contínua $f : A \times B \to \mathcal{P}(A \times B)$ com imagens compactas e convexas!

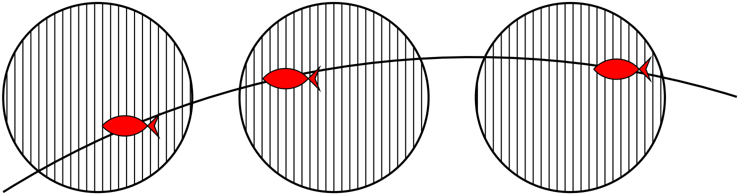


Tudo certo agora!

Assim, temos uma função semi-contínua $f : A \times B \to \mathcal{P}(A \times B)$ com imagens compactas e convexas!



Bônus



Referências

Ricardo Marino. *O teorema do sanduíche de presunto*. Todas as configurações possíveis. 2012. URL: http://www.todasasconfiguracoes.com/2012/08/31/o-teorema-do-sanduiche-de-presunto/ (acesso em 24/08/2021).

Math-S400: Lecture XIX - Kakutani's fixed point theorem. YouTube. 2020. URL: https://www.youtube.com/watch?v=Ge1u0EuyRMQ (acesso em 24/08/2021).

Allen Yuan. *FIXED POINT THEOREMS AND APPLICATIONS TO GAME THEORY*. URL: https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Yuan.pdf (acesso em 24/08/2021).

Dúvidas?