O Teorema do Ponto Fixo

Combinando

Setembro 2021

Introdução

Introdução

Introdução

O Teorema do Ponto Fixo

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

O Teorema do Ponto Fixo

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Um **domínio de ponto fixo** é um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que toda função contínua $f : X \to X$ possui um ponto fixo.

O Teorema do Ponto Fixo

Um **ponto fixo** de uma função $f : X \to X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

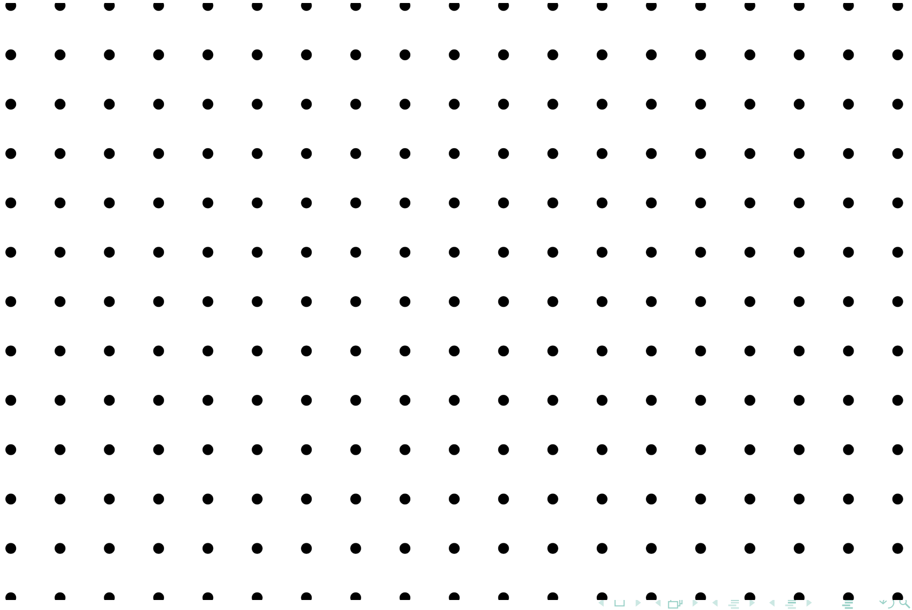
Um **domínio de ponto fixo** é um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que toda função contínua $f : X \to X$ possui um ponto fixo.

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

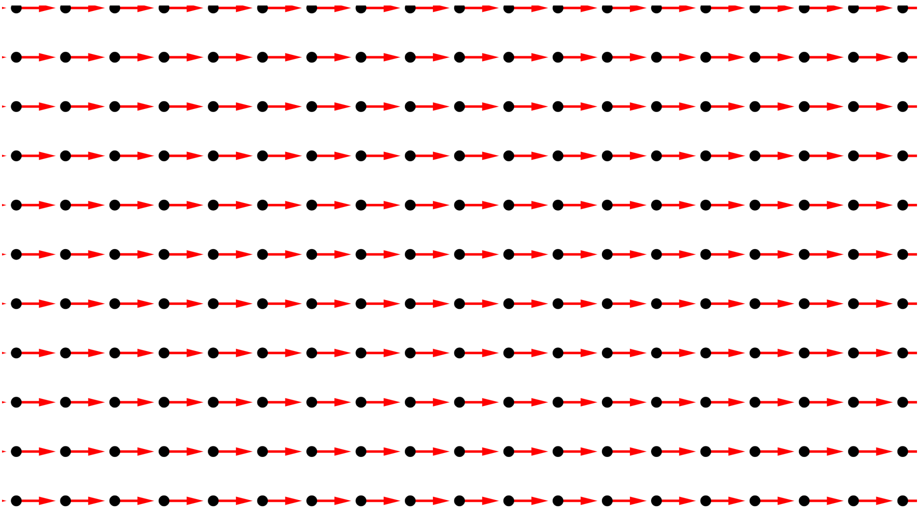
Subconjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ são domínios de ponto fixo.

Limitado

Limitado

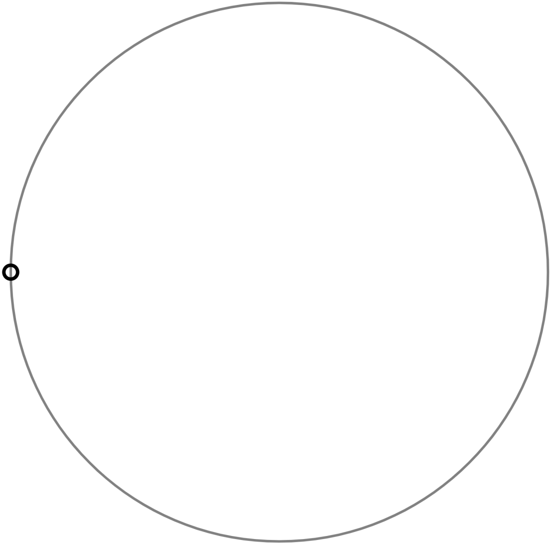


Limitado

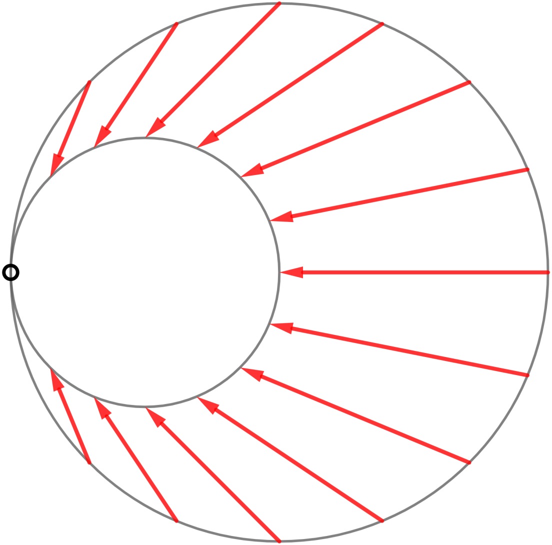


Fechado

Fechado

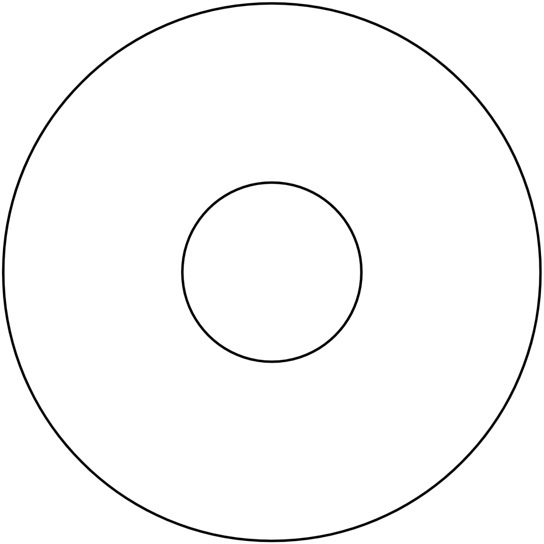


Fechado

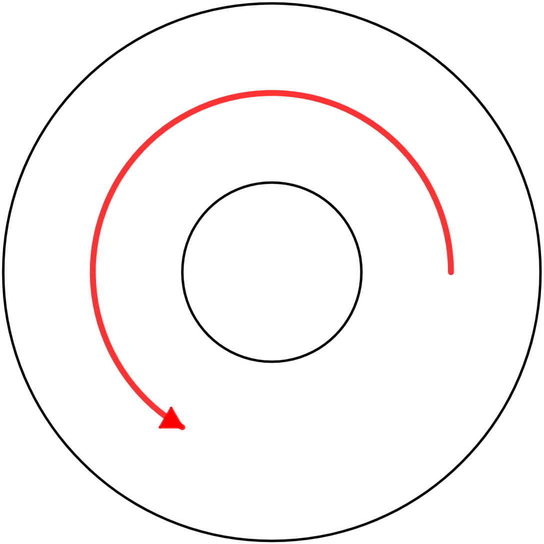


Convexo

Convexo

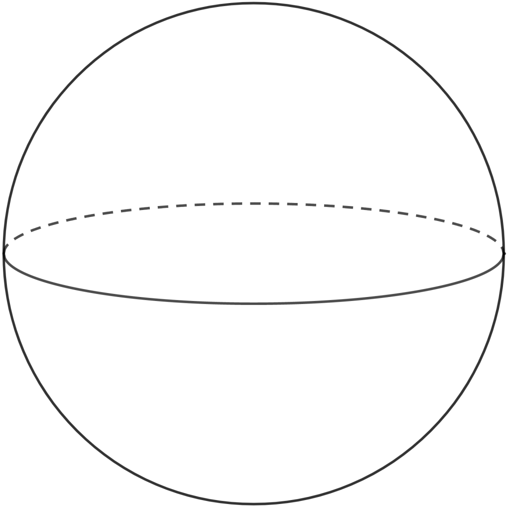


Convexo

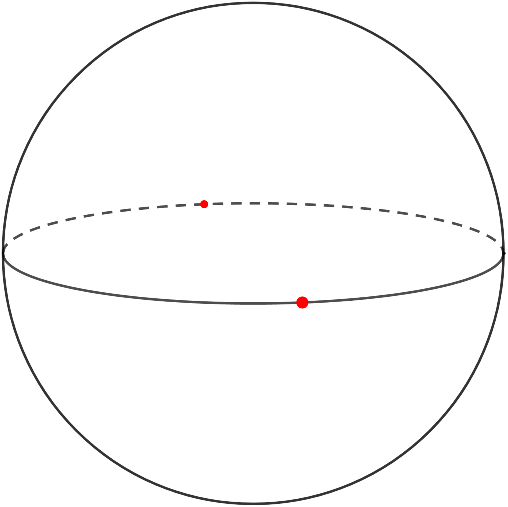


Sem buracos?

Sem buracos?



Sem buracos?



Domínios de Ponto Fixo

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Domínios de Ponto Fixo

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Demonstração.

Domínios de Ponto Fixo

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Demonstração.

Seja X um domínio de ponto fixo e $\phi : X \to Y$ um homeomorfismo.

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Demonstração.

Seja X um domínio de ponto fixo e $\phi : X \to Y$ um homeomorfismo.

Tome $f : Y \to Y$ uma função contínua.

Domínios de Ponto Fixo

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Demonstração.

Seja X um domínio de ponto fixo e $\phi : X \to Y$ um homeomorfismo.

Tome $f : Y \to Y$ uma função contínua.

Então $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : X \to X$ é uma função contínua...

Domínios de Ponto Fixo

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Demonstração.

Seja X um domínio de ponto fixo e $\phi : X \to Y$ um homeomorfismo.

Tome $f : Y \to Y$ uma função contínua.

Então $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : X \to X$ é uma função contínua...

... logo, possui um ponto fixo $x \in X$.

Domínios de Ponto Fixo

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Demonstração.

Seja X um domínio de ponto fixo e $\phi : X \to Y$ um homeomorfismo.

Tome $f : Y \to Y$ uma função contínua.

Então $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : X \to X$ é uma função contínua...

... logo, possui um ponto fixo $x \in X$.

Então $\phi^{-1}(f(\phi(x))) = x$

Domínios de Ponto Fixo

Teorema

Homeomorfismos preservam domínios de ponto fixo.

Demonstração.

Seja X um domínio de ponto fixo e $\phi : X \to Y$ um homeomorfismo.

Tome $f : Y \to Y$ uma função contínua.

Então $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : X \to X$ é uma função contínua...

... logo, possui um ponto fixo $x \in X$.

Então $\phi^{-1}(f(\phi(x))) = x$

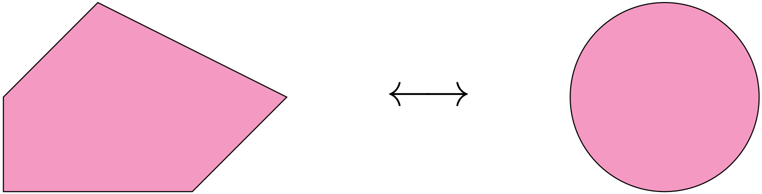
ou seja, $f(\phi(x)) = \phi(x)$. $\square$

Domínios de Ponto Fixo

Subconjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ são todos a mesma coisa.

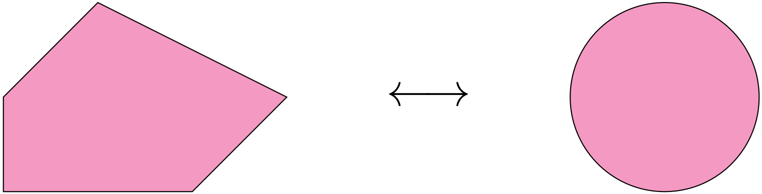
Domínios de Ponto Fixo

Subconjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ são todos a mesma coisa.



Domínios de Ponto Fixo

Subconjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ são todos a mesma coisa.



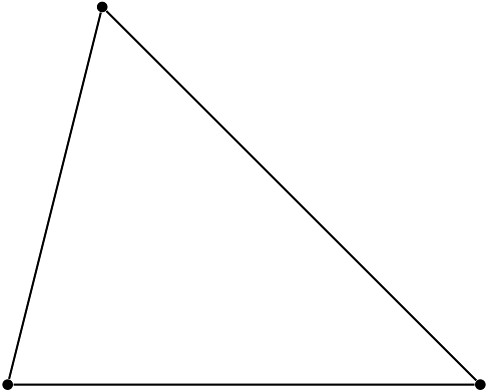
Logo, basta mostrar que *algum* subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$ é um domínio de ponto fixo.

Triângulo

Um **triângulo** é o fecho convexo de um conjunto de três pontos não colineares.

Triângulo

Um **triângulo** é o fecho convexo de um conjunto de três pontos não colineares.

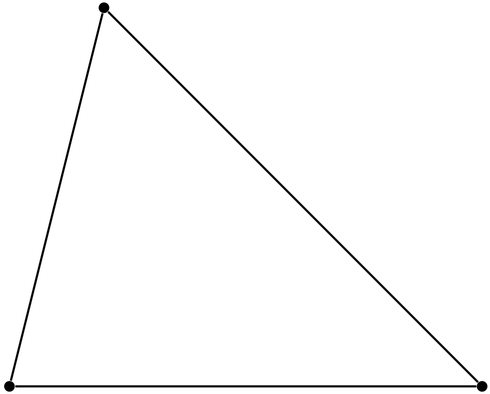


Triangulação

Uma **triangulação** de um triângulo é uma divisão sua em triângulos menores!

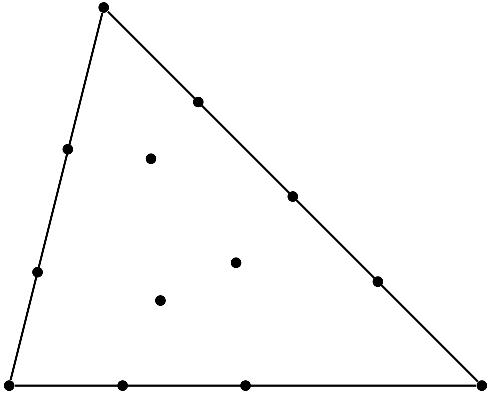
Triangulação

Uma **triangulação** de um triângulo é uma divisão sua em triângulos menores!



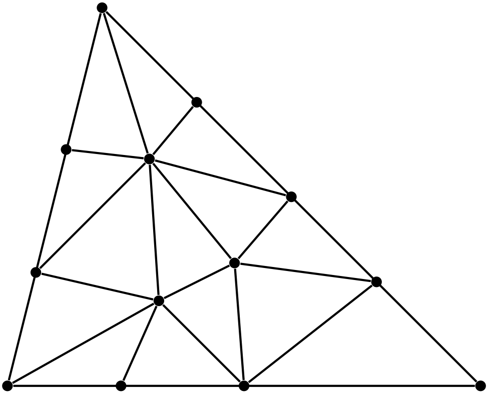
Triangulação

Uma **triangulação** de um triângulo é uma divisão sua em triângulos menores!



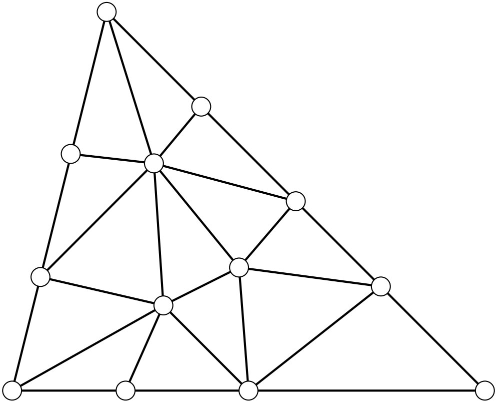
Triangulação

Uma **triangulação** de um triângulo é uma divisão sua em triângulos menores!



Coloração de Sperner

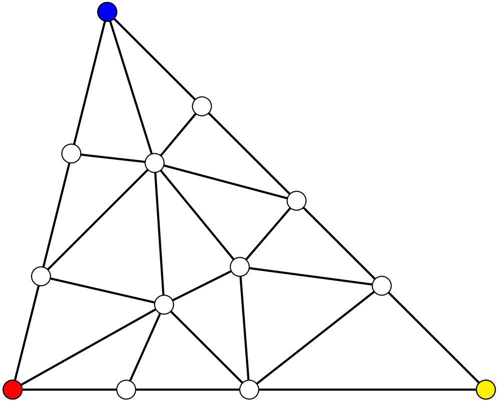
Uma **coloração de Sperner** de uma triangulação de um triângulo é uma coloração com três cores dos pontos da triangulação satisfazendo:



Coloração de Sperner

Uma **coloração de Sperner** de uma triangulação de um triângulo é uma coloração com três cores dos pontos da triangulação satisfazendo:

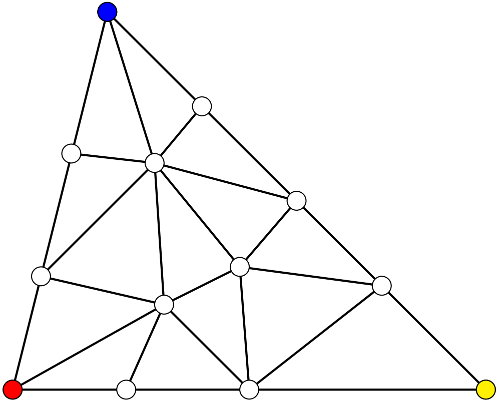
- Os vértices dos triângulos terão cores distintas.



Coloração de Sperner

Uma **coloração de Sperner** de uma triangulação de um triângulo é uma coloração com três cores dos pontos da triangulação satisfazendo:

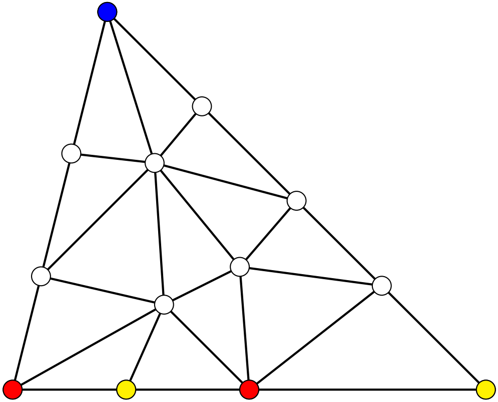
- Os vértices dos triângulos terão cores distintas.
- Os pontos que estiverem em um lado do triângulo maior terá uma das cores dos extremos desse lado.



Coloração de Sperner

Uma **coloração de Sperner** de uma triangulação de um triângulo é uma coloração com três cores dos pontos da triangulação satisfazendo:

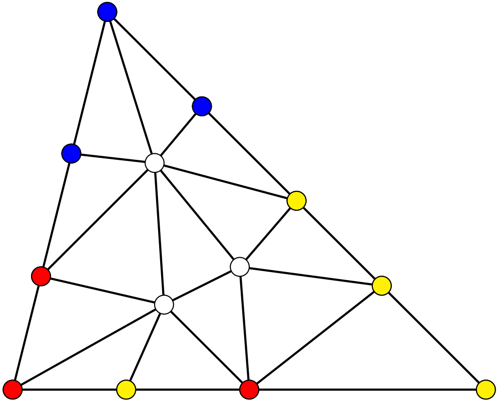
- Os vértices dos triângulos terão cores distintas.
- Os pontos que estiverem em um lado do triângulo maior terá uma das cores dos extremos desse lado.



Coloração de Sperner

Uma **coloração de Sperner** de uma triangulação de um triângulo é uma coloração com três cores dos pontos da triangulação satisfazendo:

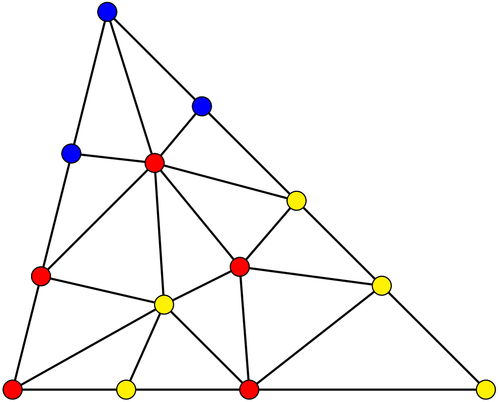
- Os vértices dos triângulos terão cores distintas.
- Os pontos que estiverem em um lado do triângulo maior terá uma das cores dos extremos desse lado.



Coloração de Sperner

Uma **coloração de Sperner** de uma triangulação de um triângulo é uma coloração com três cores dos pontos da triangulação satisfazendo:

- Os vértices dos triângulos terão cores distintas.
- Os pontos que estiverem em um lado do triângulo maior terá uma das cores dos extremos desse lado.



O lema de Sperner

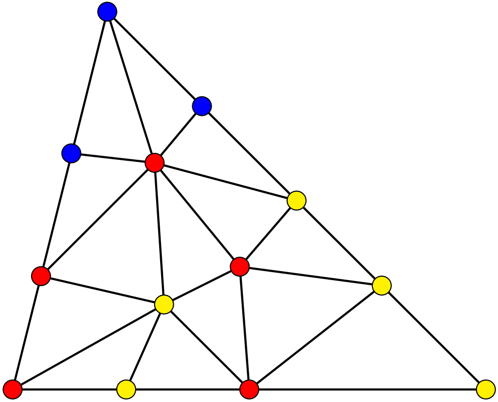
Lema de Sperner

Em toda coloração de Sperner há um triângulo menor com todas as cores!

O lema de Sperner

Lema de Sperner

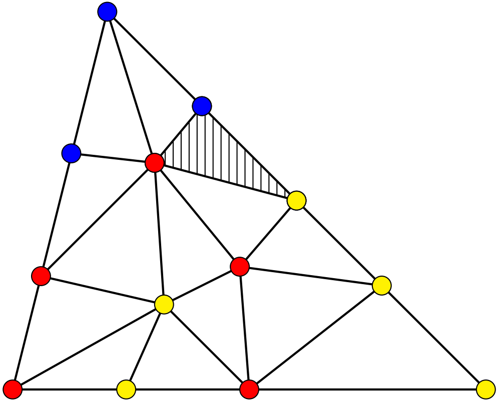
Em toda coloração de Sperner há um triângulo menor com todas as cores!



O lema de Sperner

Lema de Sperner

Em toda coloração de Sperner há um triângulo menor com todas as cores!

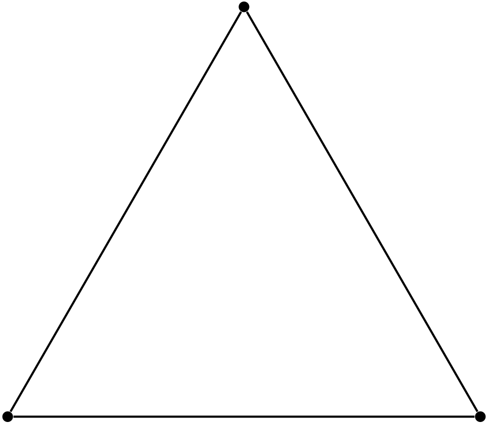


Coordenadas triangulares

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1.

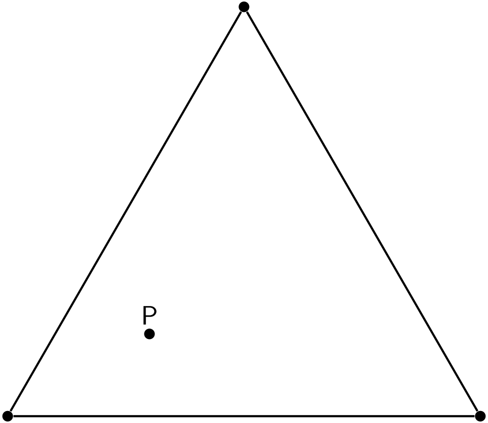
Coordenadas triangulares

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1.



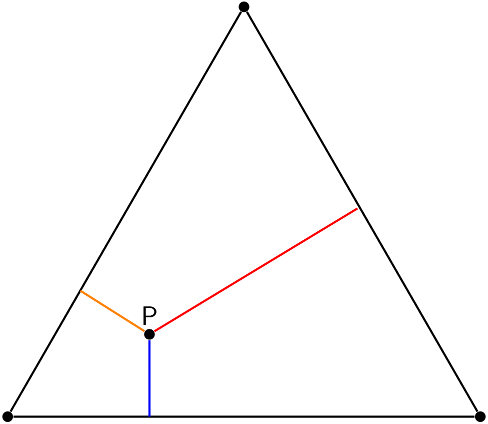
Coordenadas triangulares

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1.



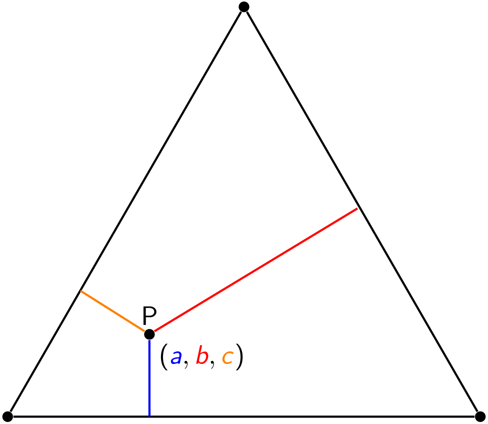
Coordenadas triangulares

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1.



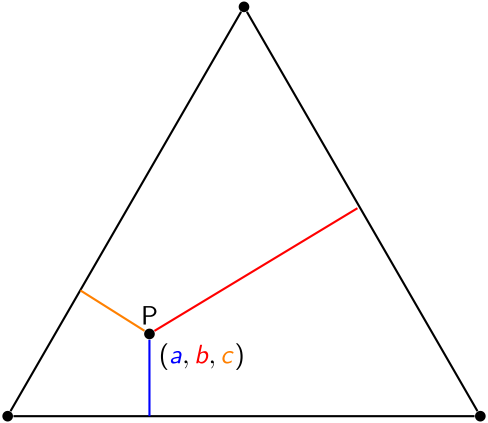
Coordenadas triangulares

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1.



Coordenadas triangulares

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1.



Teorema de Viviani

A soma das distâncias de um ponto interior aos lados de um triângulo equilátero é constante igual à altura do triângulo.

Colorindo nosso triângulo

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1 e $f : \Delta \to \Delta$ uma função contínua. Suponha que f **não** possui pontos fixos.

Colorindo nosso triângulo

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1 e $f : \Delta \to \Delta$ uma função contínua. Suponha que f **não** possui pontos fixos.

Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto de Δ e $P' = (a', b', c') = f(P)$, tomados em notação de coordenadas triangulares.

Colorindo nosso triângulo

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1 e $f : \Delta \to \Delta$ uma função contínua. Suponha que f **não** possui pontos fixos.

Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto de Δ e $P' = (a', b', c') = f(P)$, tomados em notação de coordenadas triangulares.

Nós iremos colorir P de acordo com a seguinte regra:

Colorindo nosso triângulo

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1 e $f : \Delta \to \Delta$ uma função contínua. Suponha que f **não** possui pontos fixos.

Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto de Δ e $P' = (a', b', c') = f(P)$, tomados em notação de coordenadas triangulares.

Nós iremos colorir P de acordo com a seguinte regra:

- P pode ser azul se $a > a'$.

Colorindo nosso triângulo

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1 e $f : \Delta \to \Delta$ uma função contínua. Suponha que f **não** possui pontos fixos.

Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto de Δ e $P' = (a', b', c') = f(P)$, tomados em notação de coordenadas triangulares.

Nós iremos colorir P de acordo com a seguinte regra:

- P pode ser azul se $a > a'$.
- P pode ser vermelho se $b > b'$.

Colorindo nosso triângulo

Seja Δ um triângulo equilátero de altura 1 e $f : \Delta \to \Delta$ uma função contínua. Suponha que f **não** possui pontos fixos.

Sejam $P = (a, b, c)$ um ponto de Δ e $P' = (a', b', c') = f(P)$, tomados em notação de coordenadas triangulares.

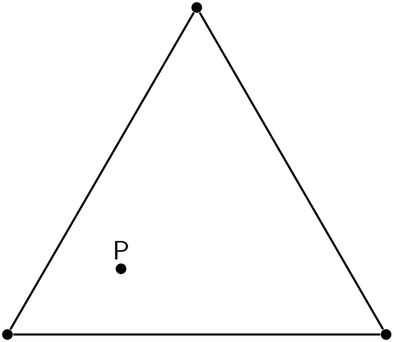
Nós iremos colorir P de acordo com a seguinte regra:

- P pode ser azul se $a > a'$.
- P pode ser vermelho se $b > b'$.
- P pode ser amarelo se $c > c'$.

Colorindo nosso triângulo

Coloração

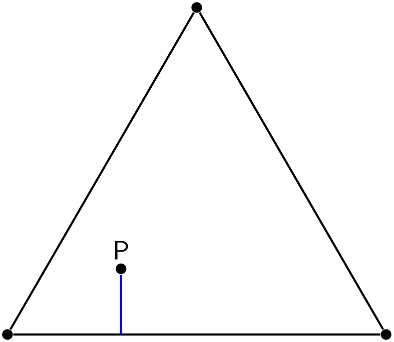
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

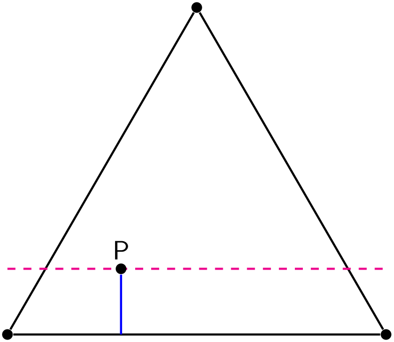
Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Coloração

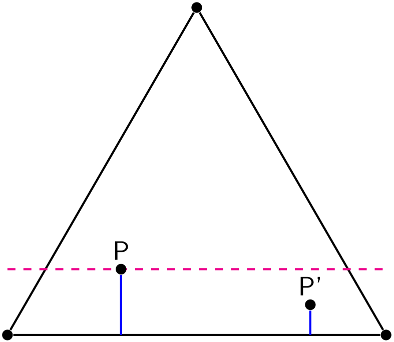
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

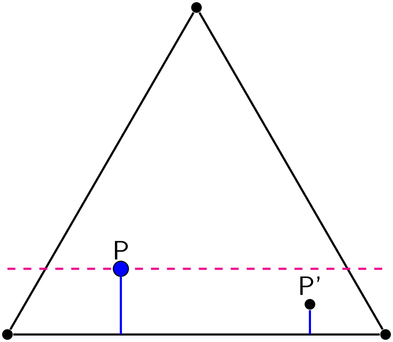
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

Todos os pontos podem ser coloridos?

Colorindo nosso triângulo

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

Todos os pontos podem ser coloridos?

Se (a, b, c) não pode ser colorido com cor alguma, então $a \leq a'$, $b \leq b'$ e $c \leq c'$.

Colorindo nosso triângulo

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

Todos os pontos podem ser coloridos?

Se (a, b, c) não pode ser colorido com cor alguma, então $a \leq a'$, $b \leq b'$ e $c \leq c'$. Porém, sabemos que $a + b + c = a' + b' + c' = 1$, de modo que deve ser verdade que $a' = a$, $b' = b$ e $c' = c$

Colorindo nosso triângulo

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

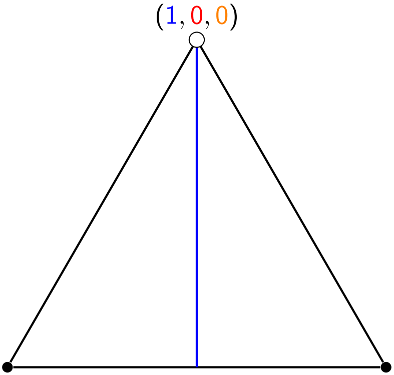
Todos os pontos podem ser coloridos?

Se (a, b, c) não pode ser colorido com cor alguma, então $a \leq a'$, $b \leq b'$ e $c \leq c'$. Porém, sabemos que $a + b + c = a' + b' + c' = 1$, de modo que deve ser verdade que $a' = a$, $b' = b$ e $c' = c$, i.e., (a, b, c) é um ponto fixo.

Colorindo nosso triângulo

Coloração

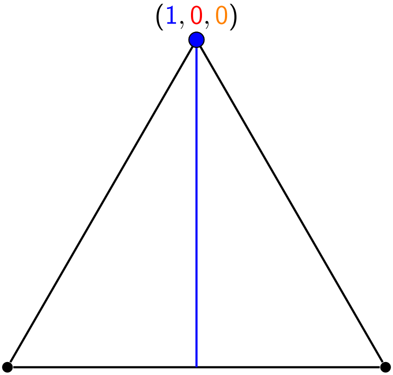
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

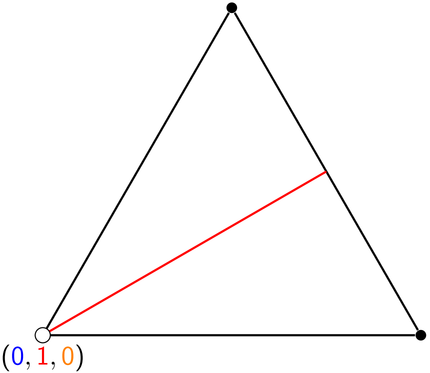
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

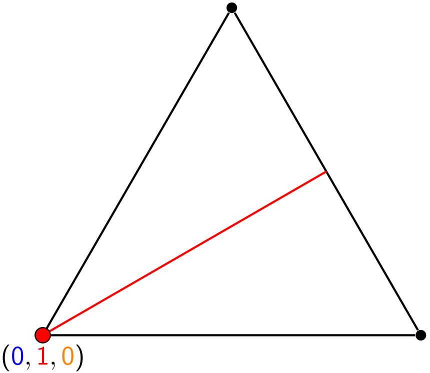
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

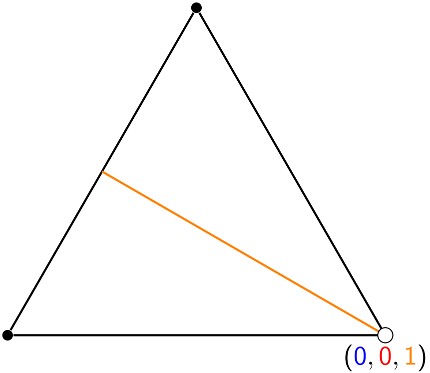
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

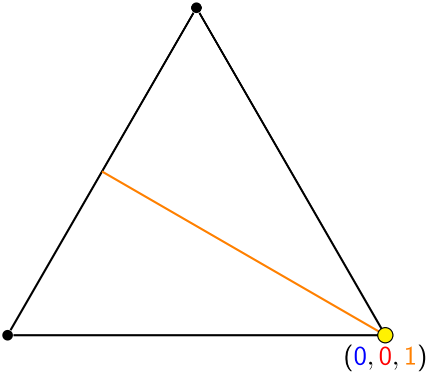
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

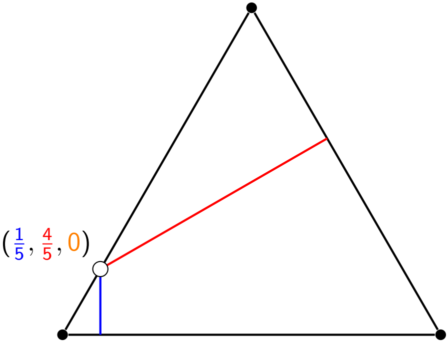
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



Colorindo nosso triângulo

Coloração

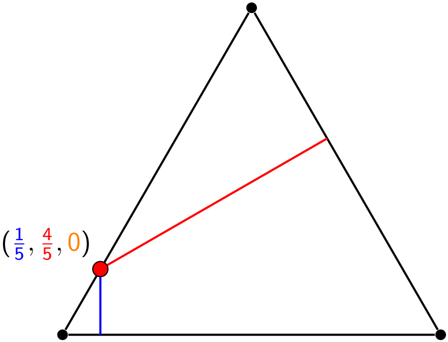
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



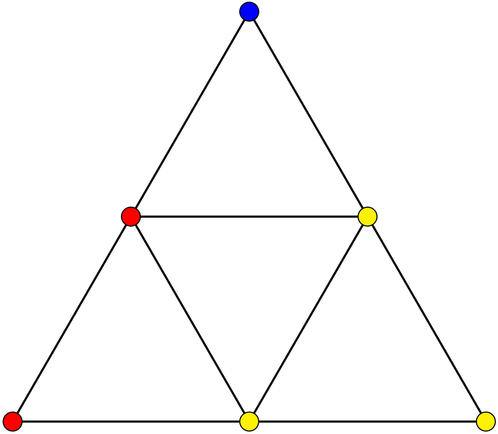
Colorindo nosso triângulo

Coloração

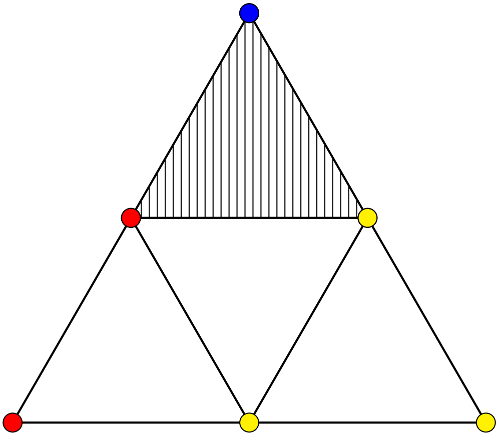
- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.



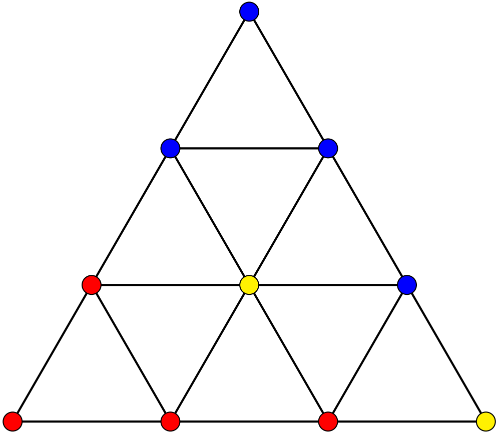
Refinando triangulações



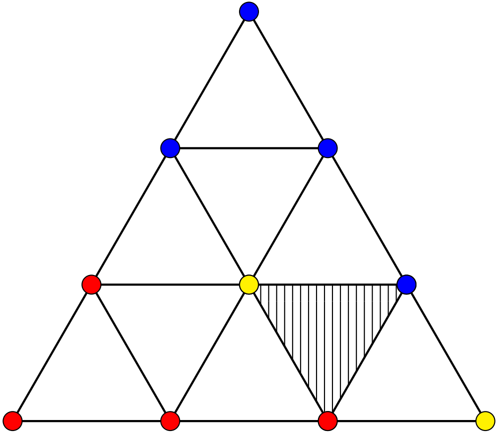
Refinando triangulações



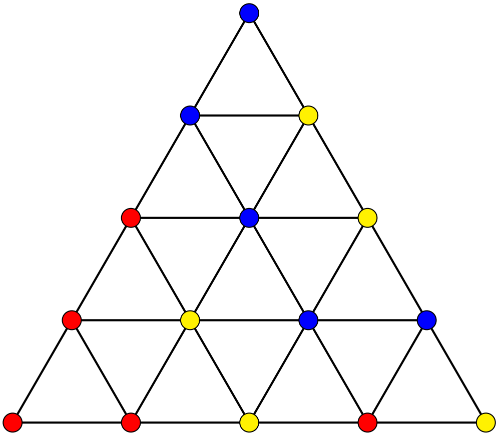
Refinando triangulações



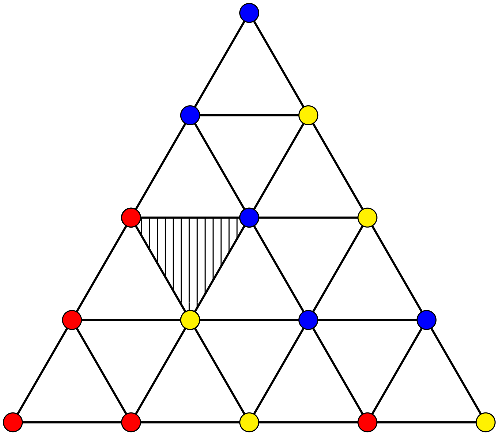
Refinando triangulações



Refinando triangulações



Refinando triangulações



Triângulos convergentes

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Triângulos convergentes

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$.

Triângulos convergentes

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$. Digamos que $\Delta_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ e $\Delta_n \to P$.

Sejam $P = (a, b, c)$, $f(P) = (a', b', c')$, $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, $f(X_n) = (a'_n, b'_n, c'_n)$.

Triângulos convergentes

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$. Digamos que $\Delta_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ e $\Delta_n \to P$.

Sejam $P = (a, b, c)$, $f(P) = (a', b', c')$, $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, $f(X_n) = (a'_n, b'_n, c'_n)$. Temos $X_n \to P$, logo, como f é contínua, $f(X_n) \to f(P)$.

Triângulos convergentes

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$. Digamos que $\Delta_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ e $\Delta_n \to P$.

Sejam $P = (a, b, c)$, $f(P) = (a', b', c')$, $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, $f(X_n) = (a'_n, b'_n, c'_n)$. Temos $X_n \to P$, logo, como f é contínua, $f(X_n) \to f(P)$. Em particular, $a_n \to a$ e $a'_n \to a'$.

Triângulos convergentes

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$. Digamos que $\Delta_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ e $\Delta_n \to P$.

Sejam $P = (a, b, c)$, $f(P) = (a', b', c')$, $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, $f(X_n) = (a'_n, b'_n, c'_n)$. Temos $X_n \to P$, logo, como f é contínua, $f(X_n) \to f(P)$. Em particular, $a_n \to a$ e $a'_n \to a'$.

Triângulos convergentes

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$. Digamos que $\Delta_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ e $\Delta_n \to P$.

Sejam $P = (a, b, c)$, $f(P) = (a', b', c')$, $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, $f(X_n) = (a'_n, b'_n, c'_n)$. Temos $X_n \to P$, logo, como f é contínua, $f(X_n) \to f(P)$. Em particular, $a_n \to a$ e $a'_n \to a'$. Como X_n é azul, temos $a_n > a'_n$, logo, $\lim a_n \geq \lim a'_n$, i.e., $a \geq a'$.

Triângulos convergentes

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$. Digamos que $\Delta_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ e $\Delta_n \to P$.

Sejam $P = (a, b, c)$, $f(P) = (a', b', c')$, $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, $f(X_n) = (a'_n, b'_n, c'_n)$. Temos $X_n \to P$, logo, como f é contínua, $f(X_n) \to f(P)$. Em particular, $a_n \to a$ e $a'_n \to a'$. Como X_n é azul, temos $a_n > a'_n$, logo, $\lim a_n \geq \lim a'_n$, i.e., $a \geq a'$.

Analogamente, mostramos que $b \geq b'$ e $c \geq c'$.

Triângulos convergentes

Coloração

- (a, b, c) pode ser azul se $a > a'$.
- (a, b, c) pode ser vermelho se $b > b'$.
- (a, b, c) pode ser amarelo se $c > c'$.

Assim, obtemos uma sequência de triângulos com vértices de todas as cores e tamanho tendendo a zero.

Como Δ é compacto, a nossa sequência possui uma subsequência convergente $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots)$. Digamos que $\Delta_n = (X_n, Y_n, Z_n)$ e $\Delta_n \to P$.

Sejam $P = (a, b, c)$, $f(P) = (a', b', c')$, $X_n = (a_n, b_n, c_n)$, $f(X_n) = (a'_n, b'_n, c'_n)$. Temos $X_n \to P$, logo, como f é contínua, $f(X_n) \to f(P)$. Em particular, $a_n \to a$ e $a'_n \to a'$. Como X_n é azul, temos $a_n > a'_n$, logo, $\lim a_n \geq \lim a'_n$, i.e., $a \geq a'$.

Analogamente, mostramos que $b \geq b'$ e $c \geq c'$. No entanto, como já vimos, isso implica que P é um ponto fixo de f.

Nos próximos capítulos...

Nos próximos capítulos...

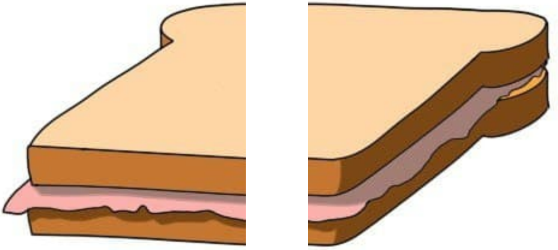
Teorema do Sanduíche de Presunto

Dado um sanduíche de presunto, é sempre possível, com um único corte reto, dividir em duas partes de mesmo volume cada uma das fatias de pão E TAMBÉM o presunto.

Nos próximos capítulos...

Teorema do Sanduíche de Presunto

Dado um sanduíche de presunto, é sempre possível, com um único corte reto, dividir em duas partes de mesmo volume cada uma das fatias de pão E TAMBÉM o presunto.



Referências

Brouwer's fixed point theorem. YouTube. 2019. URL: https://www.youtube.com/watch?v=PwIDFSC1KzI (acesso em 24/08/2021).

Allen Yuan. *FIXED POINT THEOREMS AND APPLICATIONS TO GAME THEORY*. URL: https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Yuan.pdf (acesso em 24/08/2021).

Dúvidas?