Números de Ramsey

Combinando

Outubro 2020

Teorema de Ramsey

Dado $s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $2-$coloração sobre as arestas de K_n existe um $s-$clique monocromático.

Números de Ramsey

Teorema de Ramsey

Dado $s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $2-$coloração sobre as arestas de K_n existe um $s-$clique monocromático.

Teorema de Ramsey

Dados $s, t \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $2-$coloração sobre K_n usando as cores azul e vermelho existe um $s-$clique monocromático azul ou um $t-$clique monocromático vermelho.

Números de Ramsey

Teorema de Ramsey

Dado $s \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $2-$coloração sobre as arestas de K_n existe um $s-$clique monocromático.

Teorema de Ramsey

Dados $s, t \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $2-$coloração sobre K_n usando as cores azul e vermelho existe um $s-$clique monocromático azul ou um $t-$clique monocromático vermelho.

O menor n que satisfaz a condição acima é chamado *Número de Ramsey*, e é denotado por $R(s, t)$.

Números de Ramsey

Em um conjunto de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente.

Em um conjunto de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente.

Considere o grafo completo em que os vértices são as pessoas do conjunto.

Em um conjunto de 6 *pessoas, mostre que existem* 3 *que se conhecem mutuamente ou* 3 *que não se conhecem mutuamente.*

Considere o grafo completo em que os vértices são as pessoas do conjunto. Colorimos de azul as arestas entre pessoas que se conhecem, e de vermelho as arestas entre pessoas que não se conhecem.

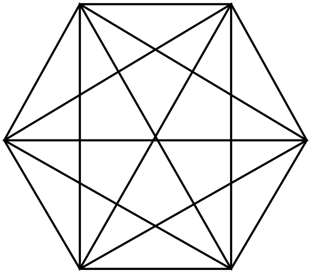
Em um conjunto de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente.

Considere o grafo completo em que os vértices são as pessoas do conjunto. Colorimos de azul as arestas entre pessoas que se conhecem, e de vermelho as arestas entre pessoas que não se conhecem. Queremos mostrar que existe nesse grafo um $3-$clique monocromático azul ou um $3-$clique monocromático vermelho.

Números de Ramsey

Em um conjunto de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente.

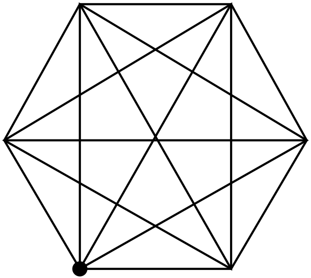
Considere o grafo completo em que os vértices são as pessoas do conjunto. Colorimos de azul as arestas entre pessoas que se conhecem, e de vermelho as arestas entre pessoas que não se conhecem. Queremos mostrar que existe nesse grafo um 3−clique monocromático azul ou um 3−clique monocromático vermelho.



Números de Ramsey

Em um conjunto de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente.

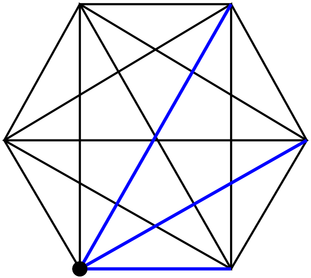
Considere o grafo completo em que os vértices são as pessoas do conjunto. Colorimos de azul as arestas entre pessoas que se conhecem, e de vermelho as arestas entre pessoas que não se conhecem. Queremos mostrar que existe nesse grafo um $3-$clique monocromático azul ou um $3-$clique monocromático vermelho.



Números de Ramsey

Em um conjunto de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente.

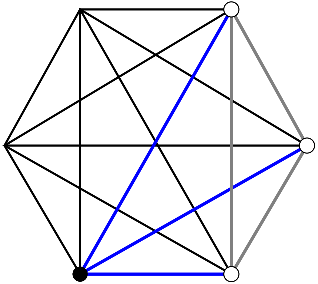
Considere o grafo completo em que os vértices são as pessoas do conjunto. Colorimos de azul as arestas entre pessoas que se conhecem, e de vermelho as arestas entre pessoas que não se conhecem. Queremos mostrar que existe nesse grafo um $3-$clique monocromático azul ou um $3-$clique monocromático vermelho.



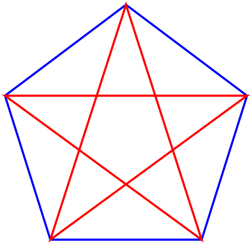
Números de Ramsey

Em um conjunto de 6 pessoas, mostre que existem 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente.

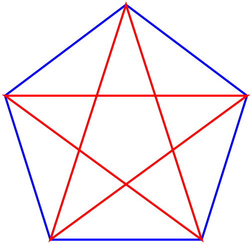
Considere o grafo completo em que os vértices são as pessoas do conjunto. Colorimos de azul as arestas entre pessoas que se conhecem, e de vermelho as arestas entre pessoas que não se conhecem. Queremos mostrar que existe nesse grafo um 3−clique monocromático azul ou um 3−clique monocromático vermelho.



Note que o mesmo não pode ser dito de um conjunto de 5 pessoas:



Note que o mesmo não pode ser dito de um conjunto de 5 pessoas:



Disso concluímos que $R(3,3) = 6$.

Números de Ramsey

s, t	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	2					
3	1	3	6				
4	1	4	9	18			
5	1	5	14	25	43-49		
6	1	6	18	36-41	58-87	102-165	
7	1	7	23	49-61	80-143	112-298	205-540

Números de Ramsey

De onde vem os limitantes?

De onde vem os limitantes?

Teorema

$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$

De onde vem os limitantes?

Teorema

$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

Demonstração: Seja $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ e considere uma 2-coloração sobre K_n usando as cores azul e vermelho. Seja v um vértice de K_n.

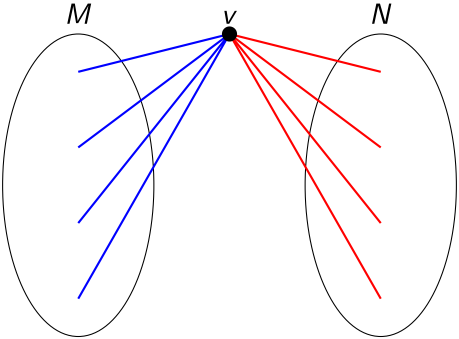
De onde vem os limitantes?

Teorema

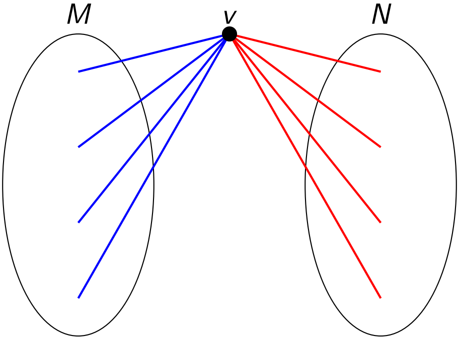
$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$.

Demonstração: Seja $n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$ e considere uma 2-coloração sobre K_n usando as cores azul e vermelho. Seja v um vértice de K_n. Defina os conjuntos $M, N \subset V(K_n) - \{v\}$ tais que

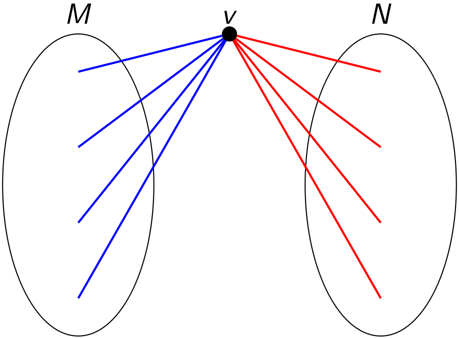
- $u \in M$ se vu é azul.
- $u \in N$ se vu é vermelho.


M
v
N

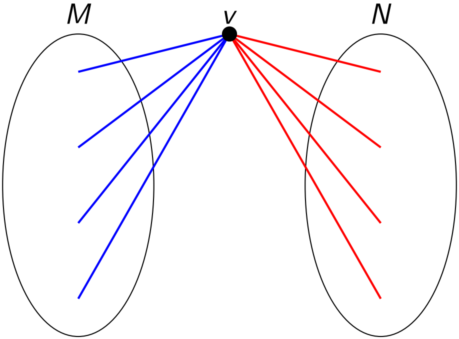
Números de Ramsey



Temos $n = |M| + |N| + 1$, logo $|M| \geq R(s-1,t)$ ou $|N| \geq R(s,t-1)$.



Temos $n = |M| + |N| + 1$, logo $|M| \geq R(s-1, t)$ ou $|N| \geq R(s, t-1)$. Suponha SPG que $|M| \geq R(s-1, t)$. Se existe um $t-$clique monocromático vermelho com vértices em M, terminamos.



Temos $n = |M| + |N| + 1$, logo $|M| \geq R(s-1,t)$ ou $|N| \geq R(s,t-1)$. Suponha SPG que $|M| \geq R(s-1,t)$. Se existe um $t-$clique monocromático vermelho com vértices em M, terminamos. Se não, então existe um $s-1-$clique monocromático azul com vértices em M, portanto existe um $s-$clique monocromático azul com vértices em $M \cup \{v\}$, e terminamos. $\square$

Números de Ramsey

Lembre-se da identidade de Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Números de Ramsey

Lembre-se da identidade de Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Utilizando a identidade anterior, pode-se facilmente provar por indução que

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

Números de Ramsey

Lembre-se da identidade de Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Utilizando a identidade anterior, pode-se facilmente provar por indução que

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

De fato, note que $R(s,1) = 1 = \binom{s-1}{s-1}$ e $R(1,t) = 1 = \binom{t-1}{0}$

Números de Ramsey

Lembre-se da identidade de Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Utilizando a identidade anterior, pode-se facilmente provar por indução que

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

De fato, note que $R(s,1) = 1 = \binom{s-1}{s-1}$ e $R(1,t) = 1 = \binom{t-1}{0}$ e se

$$R(s-1,t) \leq \binom{s+t-3}{s-2} \text{ e } R(s,t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-1}$$

Números de Ramsey

Lembre-se da identidade de Pascal: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Utilizando a identidade anterior, pode-se facilmente provar por indução que

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

De fato, note que $R(s,1) = 1 = \binom{s-1}{s-1}$ e $R(1,t) = 1 = \binom{t-1}{0}$ e se

$$R(s-1,t) \leq \binom{s+t-3}{s-2} \text{ e } R(s,t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-1}$$

então

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \\ &\leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1} \end{aligned}$$

Números de Ramsey

Em particular, temos $R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1}$.

Números de Ramsey

Em particular, temos $R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1}$.

Mas e quanto a limitantes inferiores?

Em particular, temos $R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1}$.

Mas e quanto a limitantes inferiores?

Para encontrá-los, faremos uso do método probabilístico.

Axiomas da Probabilidade

Um **espaço de probabilidade finito** é um par ordenado $(\Omega, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ é uma função satisfazendo

Axiomas da Probabilidade

Um **espaço de probabilidade finito** é um par ordenado $(\Omega, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ é uma função satisfazendo

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Axiomas da Probabilidade

Um **espaço de probabilidade finito** é um par ordenado $(\Omega, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ é uma função satisfazendo

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Se $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $X \cap Y = \varnothing$, então $\mathbb{P}(X \cup Y) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)$.

Axiomas da Probabilidade

Um **espaço de probabilidade finito** é um par ordenado $(\Omega, \mathbb{P})$, onde Ω é um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ é uma função satisfazendo

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Se $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $X \cap Y = \varnothing$, então $\mathbb{P}(X \cup Y) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y)$.

Ω é dito *espaço amostral*.
Os elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$ são ditos *eventos*.

Um Exemplo

Seja Ω um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$.

Um Exemplo

Seja Ω um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$.

Então $(\Omega, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, pois

Um Exemplo

Seja Ω um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$.

Então $(\Omega, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, pois

- $\mathbb{P}(\Omega) = \dfrac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1.$

Um Exemplo

Seja Ω um conjunto finito e $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$.

Então $(\Omega, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, pois

- $\mathbb{P}(\Omega) = \dfrac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$.
- Se $X, Y \in \mathcal{P}(\Omega)$ e $X \cap Y = \varnothing$, então

$$\mathbb{P}(X \cup Y) = \frac{|X \cup Y|}{|\Omega|} = \frac{|X| + |Y|}{|\Omega|} = \frac{|X|}{|\Omega|} + \frac{|Y|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y).$$

Axiomas da Probabilidade

Teorema Supremo da Probabilidade

Axiomas da Probabilidade

Teorema Supremo da Probabilidade

Se a probabilidade de um evento é diferente de 0, então o evento é não vazio.

Axiomas da Probabilidade

Teorema Supremo da Probabilidade

Se a probabilidade de um evento é diferente de 0, então o evento é não vazio.

Demonstração: $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$, portanto $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing)$, logo $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

Axiomas da Probabilidade

Teorema Supremo da Probabilidade

Se a probabilidade de um evento é diferente de 0, então o evento é não vazio.

Demonstração: $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$, portanto $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \varnothing) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\varnothing)$, logo $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$. A contrapositiva desse fato é o teorema que queremos provar.

O Método Probabilístico

O método probabilístico é um método não-construtivo de provar a existência de um objeto matemático com determinada característica.

O Método Probabilístico

O método probabilístico é um método não-construtivo de provar a existência de um objeto matemático com determinada característica.

Ele consiste em mostrar que, ao escolher aleatoriamente esses objetos, a probabilidade de que o resultado tenha a característica desejada não é zero.

O Método Probabilístico

O método probabilístico é um método não-construtivo de provar a existência de um objeto matemático com determinada característica.

Ele consiste em mostrar que, ao escolher aleatoriamente esses objetos, a probabilidade de que o resultado tenha a característica desejada não é zero.

Apesar de a prova usar probabilidade, a conclusão final é determinada com certeza, sem qualquer possibilidade de erro.

Mais um Teorema

Teorema

Se $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ é um evento, então $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Mais um Teorema

Teorema

Se $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ é um evento, então $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Demonstração: Note que A e A^c são disjuntos

Mais um Teorema

Teorema

Se $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ é um evento, então $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Demonstração: Note que A e A^c são disjuntos, logo
$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. $\square$

Mais um Teorema

Teorema

Se $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ são eventos, então $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Mais um Teorema

Teorema

Se $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ são eventos, então $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Demonstração: Note que

- $A = (A - B) \cup (A \cap B)$
- $B = (B - A) \cup (A \cap B)$
- $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

e que $A - B$, $A \cap B$ e $B - A$ são, dois a dois, disjuntos

Mais um Teorema

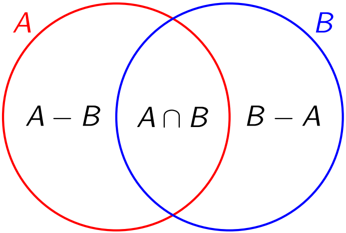
Teorema

Se $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ são eventos, então $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Demonstração: Note que

- $A = (A - B) \cup (A \cap B)$
- $B = (B - A) \cup (A \cap B)$
- $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

e que $A - B$, $A \cap B$ e $B - A$ são, dois a dois, disjuntos



Mais um Teorema

Logo
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A)$

Mais um Teorema

Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A) \\ &= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

Mais um Teorema

Logo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A)\\ &= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

Mais um Teorema

Logo

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A) \\
&= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&\leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)
\end{aligned}
$$

Mais um Teorema

Logo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A) \\
&= \mathbb{P}(A - B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B - A) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&\leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

Por indução, concluímos que, dado $X \subset \mathcal{P}(\Omega)$, temos

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{A \in X} A\right) \leq \sum_{A \in X} \mathbb{P}(A)$$

Demonstração

Agora temos as ferramentas necessárias para buscar uma cota inferior para $R(s, s)$.

Demonstração

Agora temos as ferramentas necessárias para buscar uma cota inferior para $R(s, s)$.

Seja $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Agora temos as ferramentas necessárias para buscar uma cota inferior para $R(s, s)$.

Seja $n \in \mathbb{N}$. Queremos determinar que relação n deve satisfazer para que possamos *garantir* a existência de uma coloração sobre as arestas de K_n em que não haja um $s-$clique monocromático.

Demonstração

Seja Ω o conjunto de todas as possíveis colorações de K_n, e seja $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$.

Demonstração

Seja Ω o conjunto de todas as possíveis colorações de K_n, e seja $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$. Note que $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$, pois o grafo em questão possui $\dbinom{n}{2}$ arestas, e cada aresta pode ter uma dentre 2 cores.

Demonstração

Seja Ω o conjunto de todas as possíveis colorações de K_n, e seja $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$. Note que $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$, pois o grafo em questão possui $\dbinom{n}{2}$ arestas, e cada aresta pode ter uma dentre 2 cores.

Seja S um conjunto de s vértices de K_n.

Demonstração

Seja Ω o conjunto de todas as possíveis colorações de K_n, e seja $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$. Note que $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$, pois o grafo em questão possui $\dbinom{n}{2}$ arestas, e cada aresta pode ter uma dentre 2 cores.

Seja S um conjunto de s vértices de K_n. Seja A_S o evento dado por $A_S := \{c \text{ coloração } : G[S] \text{ é monocromático}\}$.

Demonstração

Seja Ω o conjunto de todas as possíveis colorações de K_n, e seja $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$. Note que $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$, pois o grafo em questão possui $\dbinom{n}{2}$ arestas, e cada aresta pode ter uma dentre 2 cores.

Seja S um conjunto de s vértices de K_n. Seja A_S o evento dado por $A_S := \{c \text{ coloração } : G[S] \text{ é monocromático}\}$. A probabilidade de A_S será

$$\frac{|A_S|}{2^{\binom{n}{2}}}$$

Demonstração

Seja Ω o conjunto de todas as possíveis colorações de K_n, e seja $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$. Note que $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$, pois o grafo em questão possui $\dbinom{n}{2}$ arestas, e cada aresta pode ter uma dentre 2 cores.

Seja S um conjunto de s vértices de K_n. Seja A_S o evento dado por $A_S := \{c \text{ coloração } : G[S] \text{ é monocromático}\}$. A probabilidade de A_S será

$$\frac{|A_S|}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{s}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}}$$

Demonstração

Seja Ω o conjunto de todas as possíveis colorações de K_n, e seja $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ dada por $X \mapsto \dfrac{|X|}{|\Omega|}$. Note que $|\Omega| = 2^{\binom{n}{2}}$, pois o grafo em questão possui $\dbinom{n}{2}$ arestas, e cada aresta pode ter uma dentre 2 cores.

Seja S um conjunto de s vértices de K_n. Seja A_S o evento dado por $A_S := \{c \text{ coloração } : G[S] \text{ é monocromático}\}$. A probabilidade de A_S será

$$\frac{|A_S|}{2^{\binom{n}{2}}} = \frac{2 \cdot 2^{\binom{n}{2} - \binom{s}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = 2^{1 - \binom{s}{2}}$$

Dessa forma, temos que a probabilidade que haja **pelo menos um** $s-$clique monocromático será

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} A_S\right)$$

Demonstração

Dessa forma, temos que a probabilidade que haja **pelo menos um** $s-$clique monocromático será

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} A_S\right) \leq \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} \mathbb{P}(A_S)$$

Dessa forma, temos que a probabilidade que haja **pelo menos um** $s-$clique monocromático será

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} A_S\right) \leq \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} \mathbb{P}(A_S) = \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} 2^{1-\binom{s}{2}}$$

Demonstração

Dessa forma, temos que a probabilidade que haja **pelo menos um** $s-$clique monocromático será

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} A_S\right) \leq \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} \mathbb{P}(A_S) = \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} 2^{1-\binom{s}{2}} = \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}}$$

Dessa forma, temos que a probabilidade que haja **pelo menos um** $s-$clique monocromático será

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} A_S\right) \leq \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} \mathbb{P}(A_S) = \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} 2^{1-\binom{s}{2}} = \binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}}$$

Portanto a probabilidade de que não haja **nenhum** $s-$clique monocromático será maior do que ou igual a $1-\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}}$.

Demonstração

Dessa forma, temos que a probabilidade que haja **pelo menos um** $s-$clique monocromático será

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} A_S\right) \leq \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} \mathbb{P}(A_S) = \sum_{\substack{S\subset V(K_n)\\|S|=s}} 2^{1-\binom{s}{2}} = \binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}}$$

Portanto a probabilidade de que não haja **nenhum** $s-$clique monocromático será maior do que ou igual a $1-\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}}$. Dessa forma, basta encontrar o valor de n para o qual $1-\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} > 0$.

Demonstração

Resta resolver em n a desigualdade

$$1 - \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} > 0$$

Demonstração

Resta resolver em n a desigualdade

$$\begin{aligned} 1 - \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} > 0 \qquad & \iff \\ \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1 \end{aligned}$$

Demonstração

Resta resolver em n a desigualdade

$$\begin{aligned} 1 - \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} > 0 && \iff \\ \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1 && \iff \\ \binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1} && \end{aligned}$$

Resta resolver em n a desigualdade

$$
\begin{aligned}
1-\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} > 0 &\iff \\
\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} < 1 &\iff \\
\binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1} &\iff \\
\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} < 2^{\binom{s}{2}-1}
\end{aligned}
$$

Demonstração

Resta resolver em n a desigualdade

$$\begin{aligned}
1 - \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} > 0 \quad &\iff \\
\binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1 \quad &\iff \\
\binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1} \quad &\iff \\
\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} < 2^{\binom{s}{2}-1} \quad &\iff \\
n(n-1)\dots(n-s+1) < 2^{\binom{s}{2}-1} s! &
\end{aligned}$$

Demonstração

Resta resolver em n a desigualdade

$$\begin{aligned} 1 - \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} > 0 &\qquad \iff \\ \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1 &\qquad \iff \\ \binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1} &\qquad \iff \\ \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} < 2^{\binom{s}{2}-1} &\qquad \iff \\ n(n-1)\dots(n-s+1) < 2^{\binom{s}{2}-1} s! & \end{aligned}$$

Essa é uma desigualdade difícil de se resolver...

Resta resolver em n a desigualdade

$$
\begin{aligned}
1 - \binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} > 0 \quad & \iff \\
\binom{n}{s} 2^{1-\binom{s}{2}} < 1 \quad & \iff \\
\binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1} \quad & \iff \\
\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} < 2^{\binom{s}{2}-1} \quad & \iff \\
n(n-1)\dots(n-s+1) < 2^{\binom{s}{2}-1} s! &
\end{aligned}
$$

Essa é uma desigualdade difícil de se resolver... Mas note que $n^s > n(n-1)\dots(n-s+1)$

Demonstração

Resta resolver em n a desigualdade

$$\begin{aligned}
1-\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} > 0 &\qquad\iff \\
\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} < 1 &\qquad\iff \\
\binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1} &\qquad\iff \\
\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{s!} < 2^{\binom{s}{2}-1} &\qquad\iff \\
n(n-1)\dots(n-s+1) < 2^{\binom{s}{2}-1}s! &
\end{aligned}$$

Essa é uma desigualdade difícil de se resolver... Mas note que $n^s > n(n-1)\dots(n-s+1)$, portanto basta tomar n tal que $n^s \leq 2^{\binom{s}{2}-1}s!$

Demonstração

Resta resolver em n a desigualdade

$$
\begin{aligned}
1-\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} > 0 & \quad \iff \\
\binom{n}{s}2^{1-\binom{s}{2}} < 1 & \quad \iff \\
\binom{n}{s} < 2^{\binom{s}{2}-1} & \quad \iff \\
\frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{s!} < 2^{\binom{s}{2}-1} & \quad \iff \\
n(n-1)\ldots(n-s+1) < 2^{\binom{s}{2}-1}s! &
\end{aligned}
$$

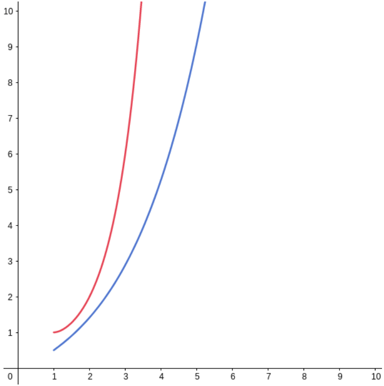
Essa é uma desigualdade difícil de se resolver... Mas note que $n^s > n(n-1)\ldots(n-s+1)$, portanto basta tomar n tal que $n^s \leq 2^{\binom{s}{2}-1}s!$ i.e., $n \leq \sqrt[s]{2^{\binom{s}{2}-1}s!}$.

Conclusão

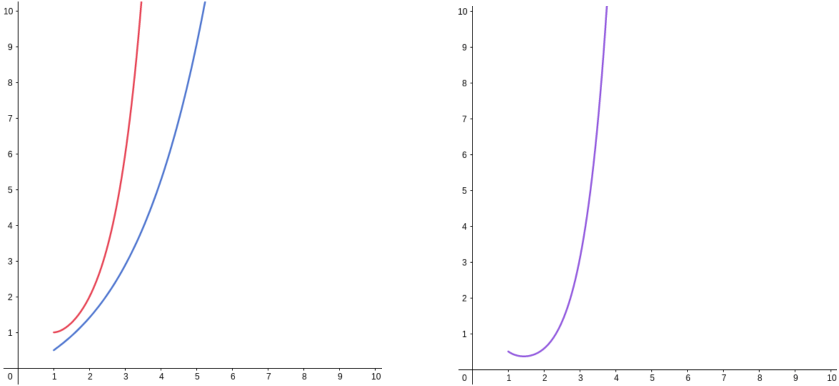
Concluímos então que $\sqrt[s]{2^{\binom{s}{2}-1}s!} < R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1}$

Conclusão

Concluímos então que $\sqrt[s]{2^{\binom{s}{2}-1}s!} < R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1}$



Concluímos então que $\sqrt[s]{2^{\binom{s}{2}-1}s!} < R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1}$



Referências

Niranjan Balachandran. *THE PROBABILISTIC METHOD IN COMBINATORICS*. Disponível em: http://www.math.iitb.ac.in/~niranj/The_Probabilistic_method_Combinatorics.pdf.

https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey%27s_theorem.