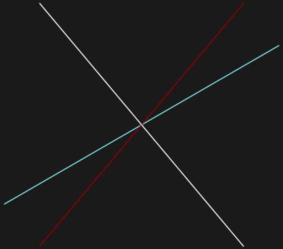
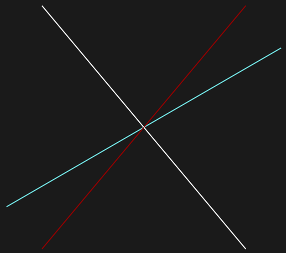
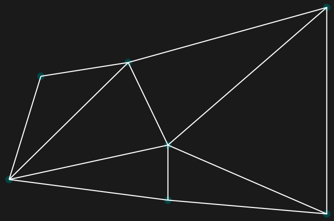
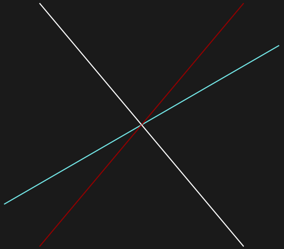
Matroides

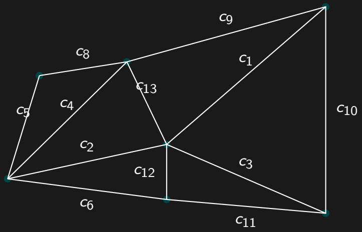
Gustavo Henrique Boska Labegalini



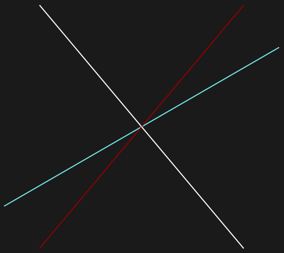


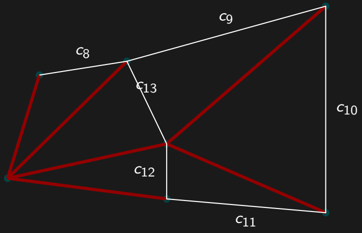






c_9
c_8
c_1
c_{13}
c_5
c_4
c_{10}
c_2
c_3
c_{12}
c_6
c_{11}





É finito, logo compacto e portanto assume mínimo, fim da apresentação!

Aplicações

Dentre outros, a teoria tem aplicações em otimização combinatória (veremos um pouco disso na apresentação).

Dentre outros, a teoria tem aplicações em otimização combinatória (veremos um pouco disso na apresentação).

Teorema de Kuratowski:

Grafo G

Aplicações

Dentre outros, a teoria tem aplicações em otimização combinatória (veremos um pouco disso na apresentação).

Teorema de Kuratowski:

$$\text{Grafo } G \longrightarrow \text{Matróide } M(G)$$

Aplicações

Dentre outros, a teoria tem aplicações em otimização combinatória (veremos um pouco disso na apresentação).

Teorema de Kuratowski:

$$\begin{tikzcd} \text{Grafo } G \arrow[r] & \text{Matróide } M(G) \arrow[d] \\ & \text{Dual } M^*(G) \end{tikzcd}$$

Dentre outros, a teoria tem aplicações em otimização combinatória (veremos um pouco disso na apresentação).

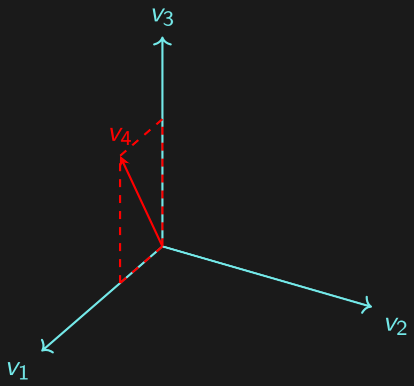
Teorema de Kuratowski:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grafo } G & \longrightarrow & \text{Matróide } M(G) \\ & & \downarrow \\ \tilde{G} & \longrightarrow & \text{Dual } M^*(G) = M(\tilde{G}) \end{array}$$

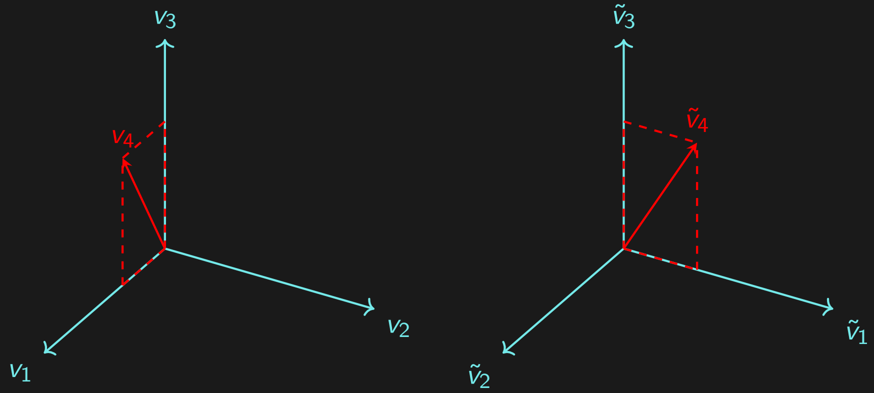
Dentre outros, a teoria tem aplicações em otimização combinatória (veremos um pouco disso na apresentação).

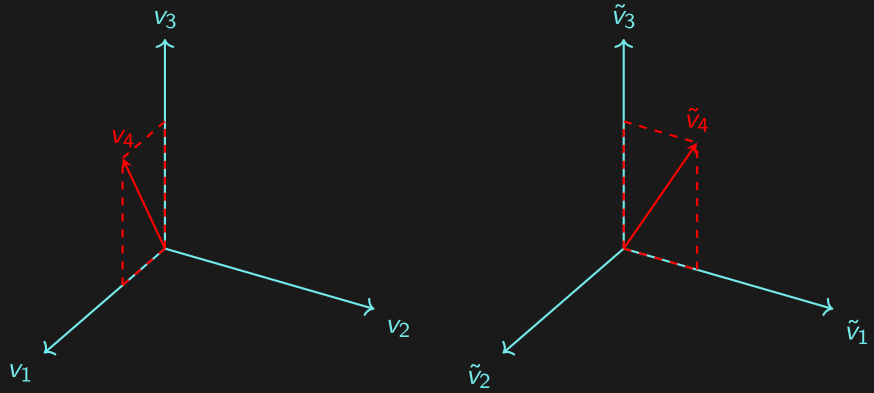
Teorema de Kuratowski:

$$\begin{tikzcd} G \text{ é planar} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Matróide } M(G) \arrow[d] \\ \tilde{G} = G^* \arrow[r] & \text{Dual } M^*(G) = M(\tilde{G}) \end{tikzcd}$$


v_3
v_4
v_2
v_1

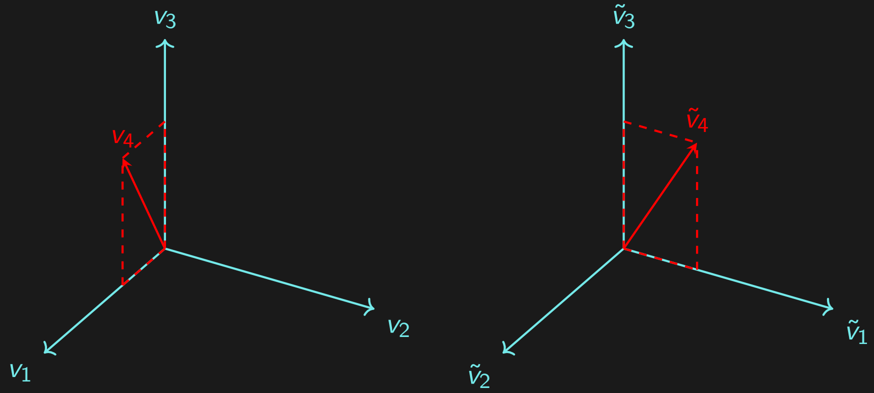
Motivação





Diferentes sob o ponto de vista da álgebra linear.

Motivação



Diferentes sob o ponto de vista da álgebra linear. Mesma teoria de **independência linear**.

Definições Básicas

Definição

Um **Complexo simplicial abstrato** *é um par* $M \doteq (E, \mathcal{I})$*:*

Definições Básicas

Definição

Um **Complexo simplicial abstrato** *é um par* $M \doteq (E, \mathcal{I})$*:*

[I1] Vacuidade: $\emptyset \in \mathcal{I}$.

Definições Básicas

Definição

Um **Complexo simplicial abstrato** *é um par* $M \doteq (E, \mathcal{I})$:

[I1] Vacuidade: $\emptyset \in \mathcal{I}$.

[I2] Fechamento por baixo: $I_1 \subset I_2 \in \mathcal{I} \implies I_1 \in \mathcal{I}$.

Definições Básicas

Definição

Um **Complexo simplicial abstrato** *é um par* $M \doteq (E, \mathcal{I})$*:*

[I1] Vacuidade: $\emptyset \in \mathcal{I}$.

[I2] Fechamento por baixo: $I_1 \subset I_2 \in \mathcal{I} \implies I_1 \in \mathcal{I}$.

Definição

Um **matroide** *é um complexo simplicial* $M \doteq (E, \mathcal{I})$ *que satisfaz o axioma:*

Definições Básicas

Definição

Um **Complexo simplicial abstrato** *é um par* $M \doteq (E, \mathcal{I})$*:*

[I1] Vacuidade: $\emptyset \in \mathcal{I}$.

[I2] Fechamento por baixo: $I_1 \subset I_2 \in \mathcal{I} \implies I_1 \in \mathcal{I}$.

Definição

Um **matroide** *é um complexo simplicial* $M \doteq (E, \mathcal{I})$ *que satisfaz o axioma:*

[I3] Propriedade do Incremento ou Aumento: *Se* I_2 *tem mais elementos que* I_1 *deve haver* $x \in I_2$ *tal que* $I_1 \sqcup \{x\} \in \mathcal{I}$ *ainda é independente.*

Exemplo

Tomando F uma matriz e seus vetores coluna $E = \{v_1, ..., v_n\}$ como conjunto finito, considerando **independência** como **independência linear** temos matroide.

Exemplo

Tomando F uma matriz e seus vetores coluna $E = \{v_1, ..., v_n\}$ como conjunto finito, considerando **independência** como **independência linear** temos matroide.

Definição (Representabilidade de Matroides)

Um matroide é k-representável se ele é o matroide de vetores coluna de uma matriz $F \in \mathcal{M}_{n,m}(k)$.

Representabilidade

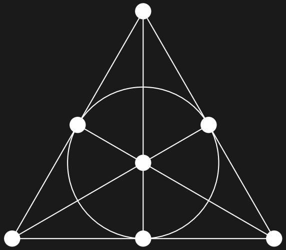
Nem todo matróide é representável.

Representabilidade

Ser k_1-representável não significa ser k_2-representável.

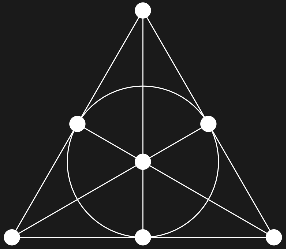
Representabilidade

Ser k_1-representável não significa ser k_2-representável.



Representabilidade

Ser k_1-representável não significa ser k_2-representável.

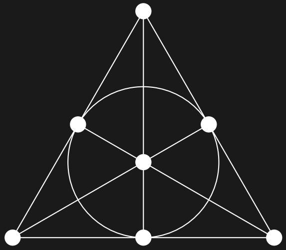


Esta configuração de incidência é realizada pela $\mathbb{F}_2$-matriz:

$$F \doteq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representabilidade

Ser k_1-representável não significa ser k_2-representável.



Esta configuração de incidência é realizada pela $\mathbb{F}_2$-matriz:

$$F \doteq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entretanto ela não é $\mathbb{R}$-representável.

Bases

Definição (Bases)

Bases são independentes maximais.

Bases

Definição (Bases)

Bases são independentes maximais.

Note que podemos recuperar um matroide a partir de suas bases.

Bases

Definição (Bases)

Bases são independentes maximais.

Proposição ()

Todas as bases tem mesmo tamanho

Bases

Definição (Bases)

Bases são independentes maximais.

Proposição ('Dimensão')

Todas as bases tem mesmo tamanho

Bases

Definição (Bases)

Bases são independentes maximais.

Proposição ('Dimensão')

Todas as bases tem mesmo tamanho

Demonstração.

Suponha $|B_1| < |B_2|$,

$\square$

Definição (Bases)

Bases são independentes maximais.

Proposição ('Dimensão')

Todas as bases tem mesmo tamanho

Demonstração.

Suponha $|B_1| < |B_2|$, de **[I3]** teríamos $b_2 \in B_2 \backslash B_1$ com $B_1 \cup \{b_2\}$ independente, $\square$

Bases

Definição (Bases)

Bases são independentes maximais.

Proposição ('Dimensão')

Todas as bases tem mesmo tamanho

Demonstração.

Suponha $|B_1| < |B_2|$, de **[I3]** teríamos $b_2 \in B_2 \backslash B_1$ com $B_1 \cup \{b_2\}$ independente, contrariando maximalidade de B_1. $\square$

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$,

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$.

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso.

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso. O algoritmo guloso é uma boa primeira tentativa:

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso. O algoritmo guloso é uma boa primeira tentativa:

- Comece com $I = \emptyset \in \mathcal{I}$.

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso. O algoritmo guloso é uma boa primeira tentativa:

- Comece com $I = \emptyset \in \mathcal{I}$.
- [$\flat$] Tome I independente:

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso. O algoritmo guloso é uma boa primeira tentativa:

- Comece com $I = \emptyset \in \mathcal{I}$.
- [$\flat$] Tome I independente:
  - Se ele tem o tamanho correto, é base, devolva I.

Matroides e Otimização

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso. O algoritmo guloso é uma boa primeira tentativa:

- Comece com $I = \emptyset \in \mathcal{I}$.
- [$\flat$] Tome I independente:
    - Se não devem haver e's com $I \sqcup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso. O algoritmo guloso é uma boa primeira tentativa:

- Comece com $I = \emptyset \in \mathcal{I}$.
- [$\flat$] Tome I independente:
    - Se não devem haver e's com $I \sqcup \{e\} \in \mathcal{I}$. Tome dentre estes e's o de menor peso $\overline{e}$.

Considere $w : E \to \mathbb{R}^+$, $w(I) = \sum_{e \in I} w(e)$. Suponha que você queira encontrar a base de menor peso. O algoritmo guloso é uma boa primeira tentativa:

- Comece com $I = \emptyset \in \mathcal{I}$.
- [$\flat$] Tome I independente:
  - Se não devem haver e's com $I \sqcup \{e\} \in \mathcal{I}$. Tome dentre estes e's o de menor peso $\overline{e}$. Faça $I \leftarrow I \sqcup \{\overline{e}\}$ e volte a [$\flat$].

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Teorema

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ *um matroide,*

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Teorema

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ um matroide, seja G_w a base retornada pelo algoritmo guloso

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Teorema

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ um matroide, seja G_w a base retornada pelo algoritmo guloso então G_w é de fato a base de menor peso.

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Prova de correção do algoritmo.

.

□

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$.

.

$\square$

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$. Organize em ordem w-ascendente essas bases: $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $G_w = \{g_1, ..., g_n\}$.

$\square$

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$. Organize em ordem w-ascendente essas bases: $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $G_w = \{g_1, ..., g_n\}$. Fossem todos $w(g_k) \leq w(b_k)$ não teríamos a hipótese,

$\square$

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$. Organize em ordem w-ascendente essas bases: $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $G_w = \{g_1, ..., g_n\}$. Fossem todos $w(g_k) \leq w(b_k)$ não teríamos a hipótese, então deve haver k com $w(b_k) < w(g_k)$.

$\square$

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$. Organize em ordem w-ascendente essas bases: $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $G_w = \{g_1, ..., g_n\}$. Fossem todos $w(g_k) \leq w(b_k)$ não teríamos a hipótese, então deve haver k com $w(b_k) < w(g_k)$.

$I_{k-1} = \{g_1, ..., g_{k-1}\}$ e $B_k = \{b_1, ..., b_k\}$ são independentes

□

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$. Organize em ordem w-ascendente essas bases: $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $G_w = \{g_1, ..., g_n\}$. Fossem todos $w(g_k) \leq w(b_k)$ não teríamos a hipótese, então deve haver k com $w(b_k) < w(g_k)$.

$I_{k-1} = \{g_1, ..., g_{k-1}\}$ e $B_k = \{b_1, ..., b_k\}$ são independentes $\implies$ deve haver $b_i \in B_k$ com $I_{k-1} \sqcup \{b_i\} \in \mathcal{I}$.

$\square$

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$. Organize em ordem w-ascendente essas bases: $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $G_w = \{g_1, ..., g_n\}$. Fossem todos $w(g_k) \leq w(b_k)$ não teríamos a hipótese, então deve haver k com $w(b_k) < w(g_k)$.

$I_{k-1} = \{g_1, ..., g_{k-1}\}$ e $B_k = \{b_1, ..., b_k\}$ são independentes $\implies$ deve haver $b_i \in B_k$ com $I_{k-1} \sqcup \{b_i\} \in \mathcal{I}$.

Mas $w(b_i) \leq w(b_k) < w(g_k)$,

$\square$

Matroides são lugares onde ser guloso dá certo

Teorema

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ um matroide, seja G_w a base retornada pelo algoritmo guloso então G_w é de fato a base de menor peso.

Prova de correção do algoritmo.

Suponha que exista B com $w(B) < w(G_w)$. Organize em ordem w-ascendente essas bases: $B = \{b_1, ..., b_n\}$ e $G_w = \{g_1, ..., g_n\}$. Fossem todos $w(g_k) \leq w(b_k)$ não teríamos a hipótese, então deve haver k com $w(b_k) < w(g_k)$.

$I_{k-1} = \{g_1, ..., g_{k-1}\}$ e $B_k = \{b_1, ..., b_k\}$ são independentes

Mas $w(b_i) \leq w(b_k) < w(g_k)$, mas então o algoritmo guloso não foi seguido na produção de G_w. □

Teorema (Edmonds)

Se algoritmo guloso funciona para qualquer w num complexo simplicial abstrato $(E, \mathcal{I})$, então $(E, \mathcal{I})$ é um matroide.

Lema

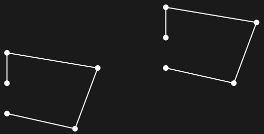
Lema

Seja $S \leq G$ *um subgrafo sem ciclos, então* S *tem* $|V(S)| - |E(S)|$ *componentes conexas.*

Lema

Lema

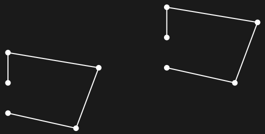
S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



Lema

Lema

S *sem ciclos* $\implies$ $\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



Indução sobre grafos :

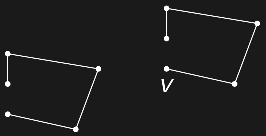
Se acrescentarmos aresta(+vértices dela)/vértice e a equação continua válida, acabamos.

□

Lema

Lema

S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



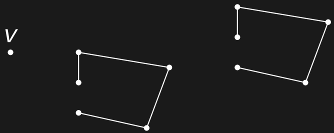
$S' = S \cup \{v\}$ sem ciclos .

Se $v \in V(S)$, nada foi modificado e o teorema continua válido.

Lema

Lema

S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



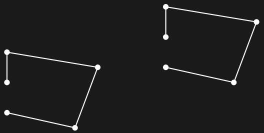
$S' = S \cup \{v\}$ sem ciclos .

Se $v \notin V(S)$, então $V(S)++$ e $\Pi_0(S)++$.

$\square$

Lema

S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



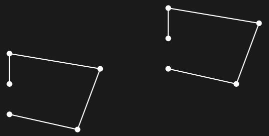
$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

$\square$

Lema

S *sem ciclos* $\implies$ $\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

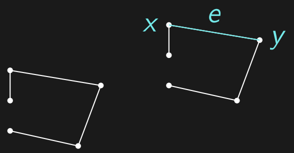
Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

- Se $x, y \in V(S)$:

$\square$

Lema

S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

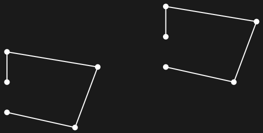
Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

- Se $x, y \in V(S)$:
  - Se e já está em $E(S)$, nada a fazer.

$\square$

Lema

S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

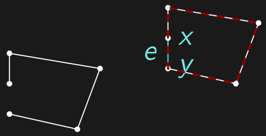
Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

- Se $x, y \in V(S)$:
  -
  - Se e não está em $E(S)$:
    -
    -
-
-

$\square$

Lema

S *sem ciclos* $\implies$ $\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



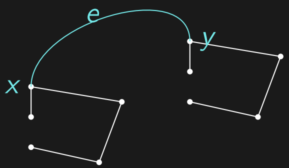
$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

- Se $x, y \in V(S)$:
  -
  - Se e não está em $E(S)$:
    - Se x e y já estavam na mesma componente forma-se ciclo, um absurdo.
    -
-
-

Lema

S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

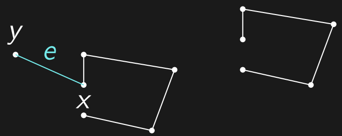
Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

- Se $x, y \in V(S)$:
  -
  - Se e não está em $E(S)$:
    -
    - Se eles não estão na mesma componente, $E(S)++$ e $\Pi_0(S)--$.
-
-

□

Lema

S *sem ciclos* $\implies$ $\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

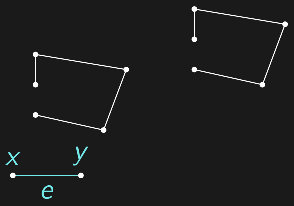
Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

-
    -
    -
        -
        -
- Se $x \in V(S)$ e $y \notin V(S)$, $V(S)++$ $E(S)++$ e $\Pi_0(S)$ permanece.
-

$\square$

Lema

S *sem ciclos* $\Longrightarrow$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



$S' = S \cup \{e\}$ sem ciclos.

Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

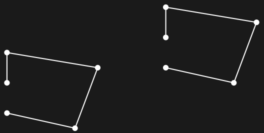
-
  -
  -
    -
    -
-
- Se nenhum dos vértices está em $V(S)$, $(V(S)++)++$, $E(S)++$ e $\Pi_0(S)++$.

$\square$

Lema

Lema

S *sem ciclos* $\implies$
$\Pi_0 S = |V(S)| - |E(S)|$.



Seja e incidindo nos vértices $x, y \in V(G)$:

$\square$

Acabamos!

Teorema

Seja G um grafo, então considere $E \doteq E(G)$ e $\mathcal{I}$ a coleção de conjuntos de arestas de subgrafos sem ciclo, de fato isto é um matroide.

Demonstração.

Estão claros **[I1]** e **[I2]**.

$\square$

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

□

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

Tome $V \doteq V(S_1) \cup V(S_2)$ e $S = (V, S_1)$, note que que este grafo deve ter $C_1 \doteq |V| - |S_1|$ componentes conexas.

□

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

Supondo $\neg$**[I3]**, para todo $e \in S_2 \backslash S_1$, acrescentar e a S forma ciclo.

$\square$

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

Note que como cada adição de e formou ciclo, $S_1 \sqcup \{e\}$ mantém o mesmo número de componentes conexas. $\square$

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

Por indução $(V, S_1 \cup S_2)$ com C_1 componentes.

$\square$

Matroides Gráficos

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

Por outro lado, $S' = (V, S_2)$ é obtido de $V \doteq V(S_1) \cup V(S_2)$ removendo-se arestas $S_1 \backslash S_2$,

□

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

Por outro lado, $S' = (V, S_2)$ é obtido de $V \doteq V(S_1) \cup V(S_2)$ removendo-se arestas $S_1 \backslash S_2$, logo deve ter número maior de componentes conexas C_2:

$\square$

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

$$C_1 \leq C_2$$

$\square$

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

$$C_1 \leq C_2 \implies |V| - |S_1| \leq |V| - |S_2|$$

$\square$

Demonstração.

Sejam S_1, S_2 sem ciclos com S_2 tendo mais arestas que S_1, ou seja, $|S_1| < |S_2|$.

Supondo $\neg$**[I3]**,

$$C_1 \leq C_2 \implies |V| - |S_1| \leq |V| - |S_2| \implies |S_2| \leq |S_1|$$

$\square$

Demonstração.

Um absurdo. Logo devemos ter **[I3]**. □

Matroides Gráficos

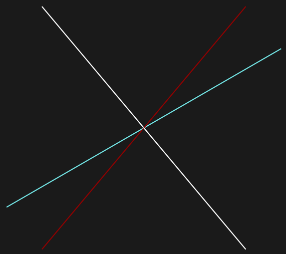
Teorema

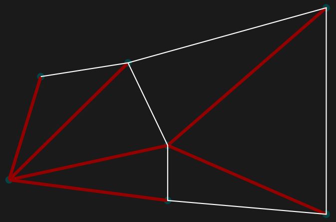
Seja G um grafo, então considere $E \doteq E(G)$ e $\mathcal{I}$ a coleção de conjuntos de arestas de subgrafos sem ciclo, de fato isto é um matroide.

Denotaremos esse matroide por $M(G)$.

Acabamos!

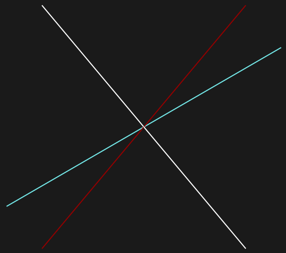
De fato, se G é conexo, as **bases** de $M(G)$ serão árvores de extensão conectando todo o grafo!

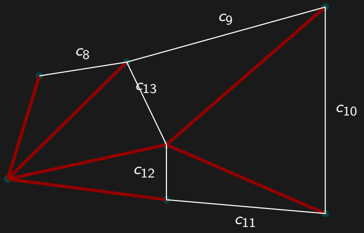




Acabamos!

De fato, se G é conexo, as **bases** de $M(G)$ serão árvores de extensão conectando todo o grafo!





Algoritmo de Kruskal.