Vértices no Infinito

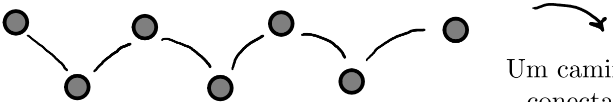
Aluno: Lucas Silva Sinzato Real

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

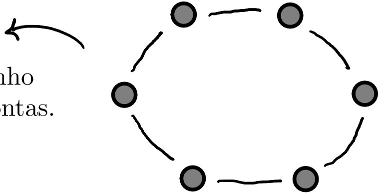
Combinando
1º de Setembro de 2022

Impasses finitos

Muitos objetos relevantes da Teoria dos Grafos
são **finitos** por natureza.



Um caminho é uma coleção finita de vértices
conectados sequencialmente por arestas.



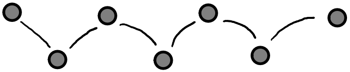
Um ciclo é obtido através de um caminho
pela adição de uma aresta entre suas pontas.

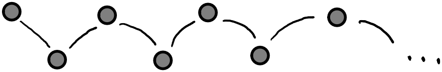
Impasses finitos

Muitos objetos relevantes da Teoria dos Grafos
são **finitos** por natureza.

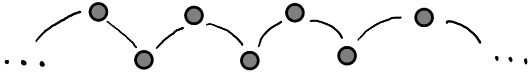
Como definir análogos **infinitos** dessas estruturas?

Versão Finita × Versão Infinita





... bem como um **raio duplo**.

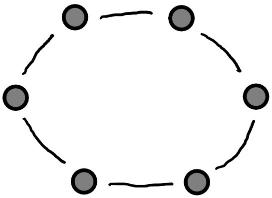


Impasses finitos

Muitos objetos relevantes da Teoria dos Grafos
são **finitos** por natureza.

Como definir análogos **infinitos** dessas estruturas?

`Versão Finita` × `Versão Infinita`



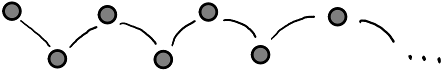
?

Mas o que é um ciclo infinito?

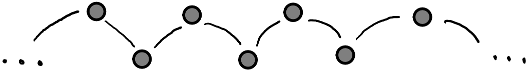
Impasses finitos

Muitos objetos relevantes da Teoria dos Grafos
são **finitos** por natureza.

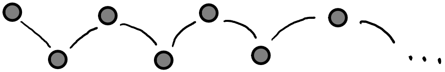
Como definir análogos **infinitos** dessas estruturas?



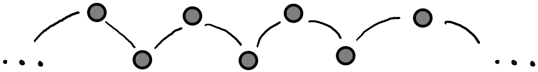
Aliás, o que são as *pontas* de
um raio ou de um raio duplo?



Extremidades



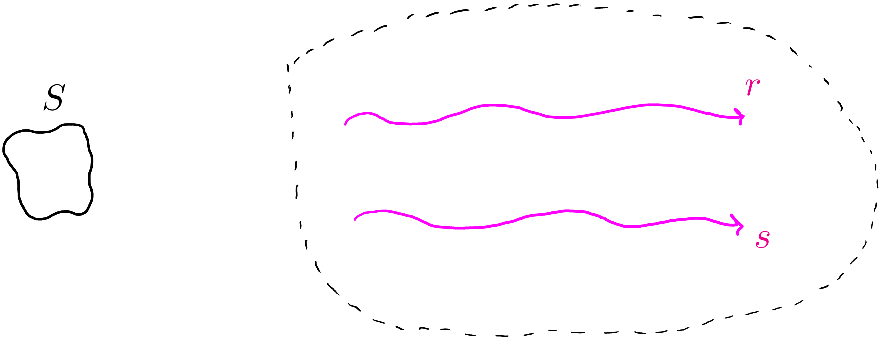
Aliás, o que são as *pontas* de
um raio ou de um raio duplo?



Extremidades de um grafo
são a resposta (artificial) para essa pergunta.

Extremidades

Mais precisamente, fixe $G = (V, E)$ um grafo infinito. Dizemos que dois de seus raios r e s são **equivalentes** se, para todo $S \subset V$ finito, r e s têm suas caudas na mesma componente conexa de $G \setminus S$.

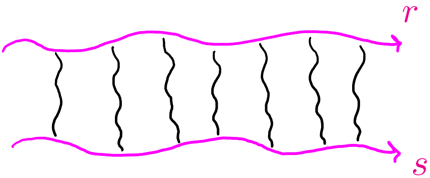


Componente conexa de $G \setminus S$

Extremidades

Mais precisamente, fixe $G = (V, E)$ um grafo infinito. Dizemos que dois de seus raios r e s são **equivalentes** se, para todo $S \subset V$ finito, r e s têm suas caudas na mesma componente conexa de $G \setminus S$.

Lema:
Os raios r e s são equivalentes se, e somente se, estão infinitamente conectados.

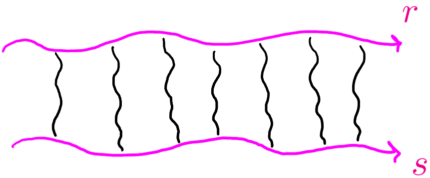


Existem infinitos caminhos disjuntos com uma ponta em r e outra em s.

Extremidades

Mais precisamente, fixe $G = (V, E)$ um grafo infinito.
Dizemos que dois de seus raios r e s são **equivalentes** se, para todo $S \subset V$ finito, r e s têm suas caudas na mesma componente conexa de $G \setminus S$.

Lema:
Os raios r e s são equivalentes se, e somente se, estão infinitamente conectados.

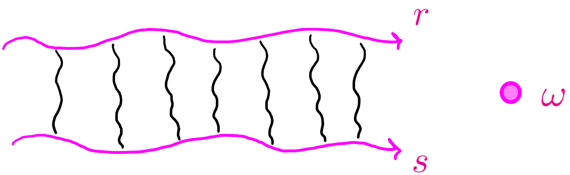


Observação: Essa definição é, de fato, uma relação de equivalência sobre a coleção de raios do grafo G.

Extremidades

Mais precisamente, fixe $G = (V, E)$ um grafo infinito.
Dizemos que dois de seus raios r e s são **equivalentes** se, para todo $S \subset V$ finito, r e s têm suas caudas na mesma componente conexa de $G \setminus S$.

Observação: Essa definição é, de fato, uma relação de equivalência sobre a coleção de raios do grafo G.

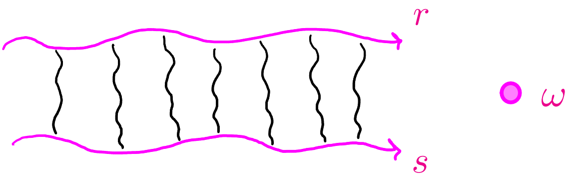


As classes de equivalência derivadas dessa relação são ditas serem as **extremidades** do grafo G.

Extremidades

Mais precisamente, fixe $G = (V, E)$ um grafo infinito.
Dizemos que dois de seus raios r e s são **equivalentes** se, para todo $S \subset V$ finito, r e s têm suas caudas na mesma componente conexa de $G \setminus S$.

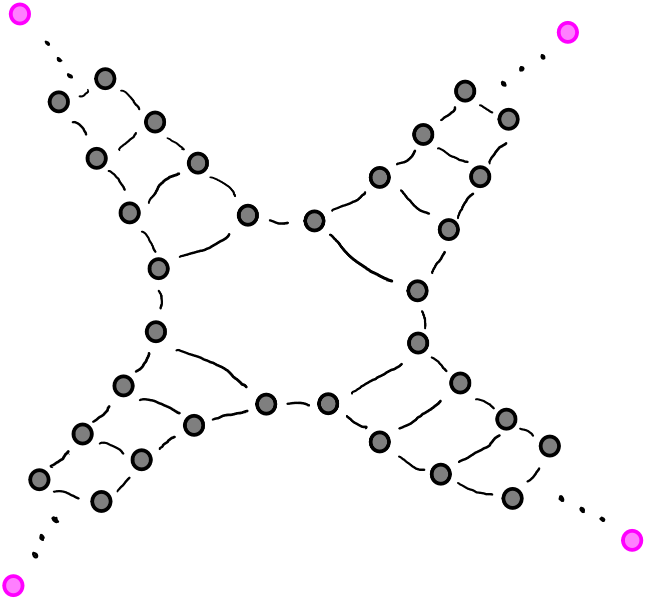
`Observação:` Essa definição é, de fato, uma relação de equivalência sobre a coleção de raios do grafo G.



O conjunto de todas as extremidades de G é denotado por $\Omega = \Omega(G)$.

Extremidades

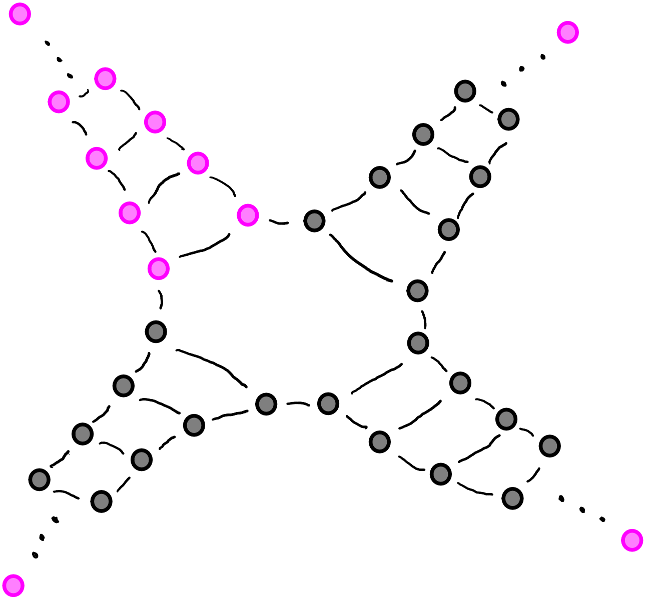
Por exemplo, este grafo tem quatro extremidades:



Extremidades

Porém, ● ao “final” de uma família de raios equivalentes é apenas uma notação para indentificá-la.

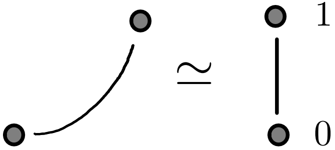
Como dizer que os raios dessa classe de equivalência *convergem* para ●?



Espaço de Extremidades

Dado $G = (V, E)$ um grafo (infinito), definimos seu **espaço de extremidades** como o espaço topológico $|G|$ descrito a seguir:

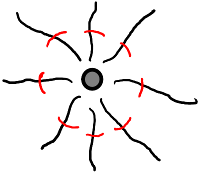
- Arestas são cópias do intervalo $[0, 1]$, com 0 e 1 sendo identificados com suas pontas.



- Um aberto básico em torno de um vértice $v \in V$ é da forma

$$\bigcup_{vu \in E} \left[v, \frac{1}{n} u\right)$$

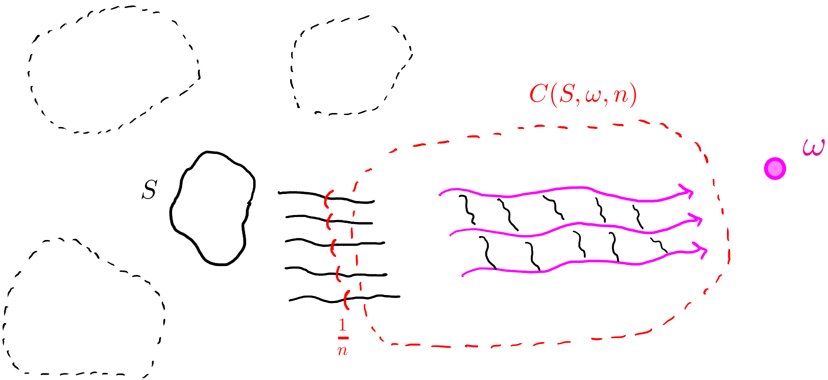
para algum $n \in \mathbb{N}$.



Espaço de Extremidades

Dado $G = (V, E)$ um grafo (infinito), definimos seu **espaço de extremidades** como o espaço topológico $|G|$ descrito a seguir:

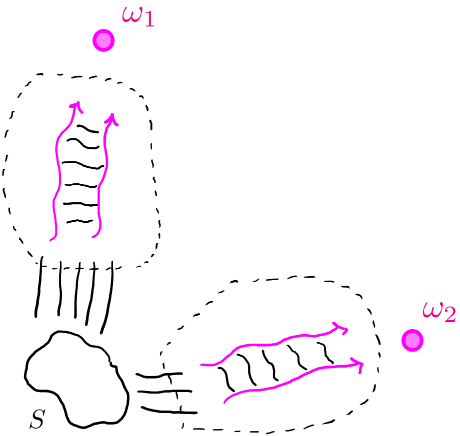
• Dada uma extremidade ω de G, um aberto básico em torno de ω é da forma $C(S, \omega, n)$ para algum $S \subset V$ finito.



Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

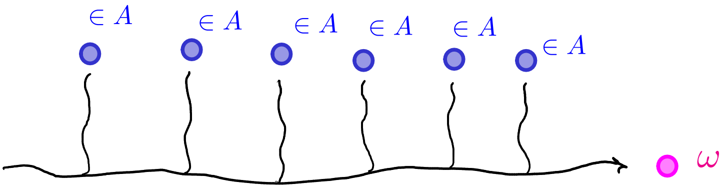
- Pela definição de raios equivalentes, $|G|$ é um espaço de Hausdorff.



Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

- Dados $A \subset V(G)$ e ω uma extremidade de G, tem-se que $\omega \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um pente com espinha em ω e dentes em A.

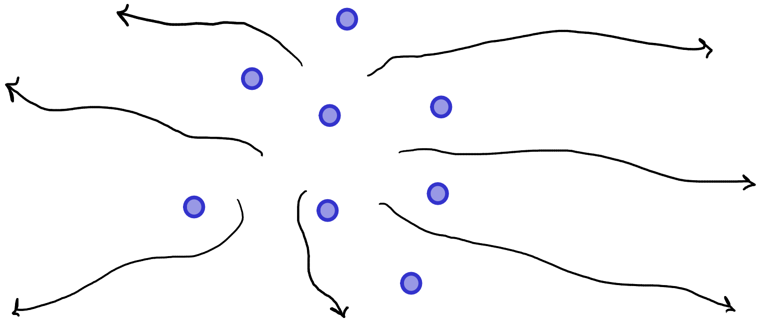


Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

- Dados $A \subset V(G)$ e ω uma extremidade de G, tem-se que $\omega \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um pente com espinha em ω e dentes em A.

Então, $A \subset V(G)$ é fechado se, e somente se, é **disperso**, ou seja, todo raio pode ser separado dele por finitos vértices.



Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

- Dados $A \subset V(G)$ e ω uma extremidade de G, tem-se que $\omega \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um pente com espinha em ω e dentes em A.

Então, $A \subset V(G)$ é fechado se, e somente se, é **disperso**, ou seja, todo raio pode ser separado dele por finitos vértices.

`Teorema:` São equivalentes as seguintes afirmações sobre um grafo conexo G:

- G tem árvore geradora normal.
- $|G|$ é metrizável.
- $V(G)$ é uma união enumerável de conjuntos dispersos.

Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

- Dados $A \subset V(G)$ e ω uma extremidade de G, tem-se que $\omega \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um pente com espinha em ω e dentes em A.

Então, $A \subset V(G)$ é fechado se, e somente se, é **disperso**, ou seja, todo raio pode ser separado dele por finitos vértices.

Teorema: São equivalentes as seguintes afirmações sobre um grafo conexo G:

- G tem árvore geradora normal. Propriedade estrutural do grafo
- $|G|$ é metrizável. Propriedade topológica
- $V(G)$ é uma união enumerável de conjuntos dispersos.

Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

- Dados $A \subset V(G)$ e ω uma extremidade de G, tem-se que $\omega \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um pente com espinha em ω e dentes em A.

Então, $A \subset V(G)$ é fechado se, e somente se, é **disperso**, ou seja, todo raio pode ser separado dele por finitos vértices.

Teorema: São equivalentes as seguintes afirmações sobre um grafo conexo G:

- G tem árvore geradora normal.
- $|G|$ é metrizável. Uso de progressões geométricas sobre a árvore geradora.
- $V(G)$ é uma união enumerável de conjuntos dispersos.

Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

- Dados $A \subset V(G)$ e ω uma extremidade de G, tem-se que $\omega \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um pente com espinha em ω e dentes em A.

Então, $A \subset V(G)$ é fechado se, e somente se, é **disperso**, ou seja, todo raio pode ser separado dele por finitos vértices.

Teorema: São equivalentes as seguintes afirmações sobre um grafo conexo G:

- G tem árvore geradora normal.
- $|G|$ é metrizável.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\bigcap_{\omega \in \Omega} (V \setminus B_{\frac{1}{n}}(\omega))$ é fechado.

- $V(G)$ é uma união enumerável de conjuntos dispersos.

Espaço de Extremidades

Dentre as propriedades de $|G|$, destacamos:

- Dados $A \subset V(G)$ e ω uma extremidade de G, tem-se que $\omega \in \overline{A}$ se, e somente se, existe um pente com espinha em ω e dentes em A.

Então, $A \subset V(G)$ é fechado se, e somente se, é **disperso**, ou seja, todo raio pode ser separado dele por finitos vértices.

Teorema: São equivalentes as seguintes afirmações sobre um grafo conexo G:

- G tem árvore geradora normal.
- $|G|$ é metrizável.
- $V(G)$ é uma união enumerável de conjuntos dispersos.

Busca em profundidade utilizando a enumeração da família de dispersos.

Espaço de Extremidades

Corolário: Seja G um grafo conexo. Então, $|G|$ é compacto se, e somente se, G é localmente finito.

Espaço de Extremidades

Corolário: Seja G um grafo conexo. Então,
$|G|$ é compacto se, e somente se, G é localmente finito.

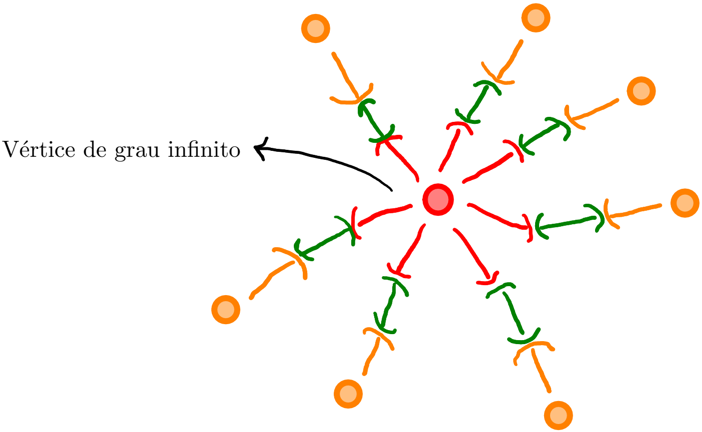
Propriedade topológica

Propriedade estrutural do grafo

Espaço de Extremidades

Corolário: Seja G um grafo conexo. Então, $|G|$ é compacto se, e somente se, G é localmente finito.

Demonstração: Se $|G|$ é compacto, G não deve ter um vértice de grau infinito. Afinal, a cobertura aberta da figura abaixo não tem subcobertura finita:



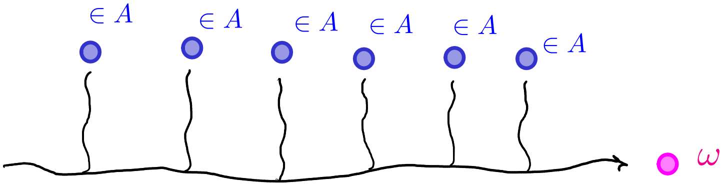
Espaço de Extremidades

Corolário: Seja G um grafo conexo. Então, $|G|$ é compacto se, e somente se, G é localmente finito.

Demonstração: Se G é conexo e localmente finito, $|G|$ é metrizável pelo Teorema anterior.

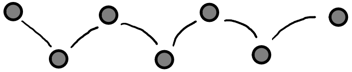
Se $A \subset V(G)$ é infinito, pelo Lema Estrela-Pente existe um pente com dentes em A, pois G é localmente finito.

Nesse caso, A acumula na extremidade da espinha do pente.



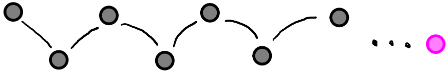
Verifica-se também que A tem ponto de acumulação se for um conjunto infinito de extremidades ou de elementos de arestas. $\square$

Generalizações

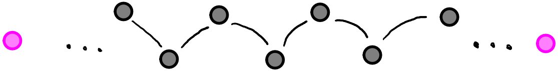


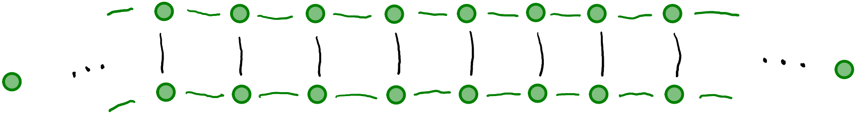
Finalmente, podemos convencionar os análogos infinitos de caminhos e ciclos:

- Um **arco** (gráfico) é um raio, um raio duplo ou um caminho finito, mas cujas extremidades são diferentes.



- Um **ciclo** é uma cópia homeomorfa do círculo $\mathbb{S}^1$ em $|G|$.





Generalizações

Na literatura, encontramos indícios de que essas definições são apropriadas para generalizações de resultados a respeito de grafos finitos:

`Versão Finita` × `Versão Infinita`

`Teorema:` Todo grafo finito 2-conexo sem K_4 ou $K_{2,3}$ como menor tem um circuito Hamiltoniano.

`Teorema:` Todo grafo localmente finito 2-conexo sem K_4 ou $K_{2,3}$ como menor tem um circuito Hamiltoniano.

Generalizações

Na literatura, encontramos indícios de que essas definições são apropriadas para generalizações de resultados a respeito de grafos finitos:

Versão Finita $\times$ **Versão Infinita**

Teorema: Todo grafo finito 2-conexo sem K_4 ou $K_{2,3}$ como menor tem um circuito Hamiltoniano.

Teorema: Todo grafo localmente finito 2-conexo sem K_4 ou $K_{2,3}$ como menor tem um circuito Hamiltoniano.

Ciclo que passa por cada vértice e *extremidade* exatamente uma vez.

Generalizações

Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

`Teorema(`Lovász-Cherkassky`):` Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\dfrac{1}{2}\sum_{t \in T} \lambda(t, T \setminus \{t\})$.

Generalizações

Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

Todo vértice de $V \setminus T$ tem grau par

Teorema(Lovász-Cherkassky): Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\dfrac{1}{2}\sum_{t\in T}\lambda(t, T \setminus \{t\})$.

Generalizações

Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

`Teorema(`Lovász-Cherkassky`):` Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\dfrac{1}{2}\sum_{t\in T}\lambda(t, T\setminus\{t\})$.

Caminhos cujos únicos vértices em T são as pontas

Generalizações

Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

Teorema(Lovász-Cherkassky**):** Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\frac{1}{2}\sum_{t\in T}\lambda(t, T\setminus\{t\})$.

Maior tamanho de uma família de $t-(T\setminus\{t\})$ caminhos disjuntos nas arestas.

Generalizações

Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

Teorema(Lovász-Cherkassky): Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\frac{1}{2}\sum_{t\in T} \lambda(t, T \setminus \{t\})$.

Maior tamanho de uma família de $t - (T \setminus \{t\})$ caminhos disjuntos nas arestas.

ou

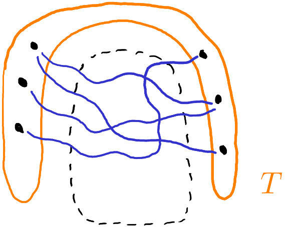
Menor tamanho de um corte que separa t de $T \setminus \{t\}$.

Generalizações

Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

Teorema(Lovász-Cherkassky): Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\frac{1}{2}\sum_{t \in T} \lambda(t, T \setminus \{t\})$.

Ilustração do Teorema:



Generalizações

Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

O Teorema de Lovász-Cherkassky nos diz que esse limitante é junto se G é interiormente Euleriano com respeito a T.

Teorema(Lovász-Cherkassky): Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\frac{1}{2}\sum_{t \in T} \lambda(t, T \setminus \{t\})$.

Esse número limita o tamanho de uma coleção $\mathcal{P}$ de $T-$caminhos disjuntos nas arestas. Afinal, cada vértice de t é ponta de no máximo $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ elementos de $\mathcal{P}$.

Generalizações

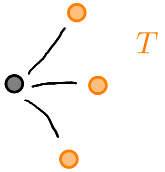
Vamos, por exemplo, analisar uma generalização do seguinte resultado de Lovász e Cherkassky:

O Teorema de Lovász-Cherkassky nos diz que esse limitante é junto
se G é interiormente Euleriano com respeito a T.

`Teorema(Lovász-Cherkassky):` Seja G um grafo finito e $T \subset V(G)$ tal que G é interiormente Euleriano com respeito a T. Então, a quantidade máxima de $T-$caminhos disjuntos nas arestas é $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{t \in T} \lambda(t, T \setminus \{t\})$.

`Observação:` A hipótese de que G é interiormente Euleriano com respeito a T não pode ser simplesmente removida:

No grafo ao lado, quaisquer dois $T-$caminhos possuem intersecção de arestas. Apesar disso, $\frac{1}{2}\displaystyle\sum_{t \in T} \lambda(t, T \setminus \{t\}) = \dfrac{3}{2}$.



Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

Por Jacobs, Joó, Knappe, Kurkofka e Melcher em 2021

Teorema (Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

G pode ser infinito, mas todos os seus vértices têm grau finito.

Teorema(Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

T pode conter tanto vértices quanto extremidades.

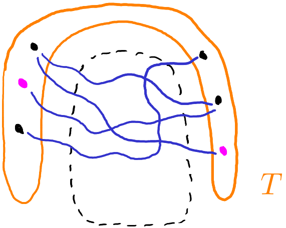
Teorema (Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

Teorema(Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Ilustração do Teorema:



Existe uma coleção de arcos disjuntos nas arestas em que cada vértice e extremidade é "saturado".

Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

Teorema(Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Se $t \in T$ é um vértice,
$\lambda(t, T \setminus \{t\})$ é limitado
pelo seu grau.

Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

Teorema (Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

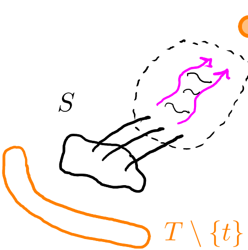
Se $t \in T$ é uma extremidade, $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ está bem definido ao supormos que T é discreto.

Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

Teorema (Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Se $t \in T$ é uma extremidade, $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ está bem definido ao supormos que T é discreto.



Generalizações

A generalização que estamos interessados é a seguinte:

Todo vértice e *extremidade* de $V \setminus T$ tem grau par.

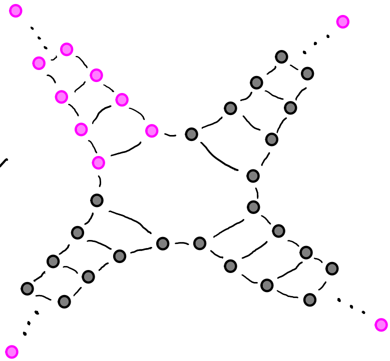
Teorema(Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Parênteses: grau de extremidade

Pergunta: Mas o que exatamente é o grau de uma extremidade?

Definição 1: O **grau** de ω é o tamanho da maior família de raios disjuntos nas arestas que têm ω como extremidade.

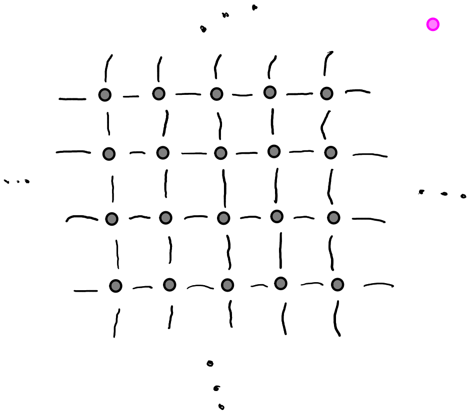
As extremidades desse grafo têm grau 2



Parênteses: grau de extremidade

Pergunta: Mas o que exatamente é o grau de uma extremidade?

Definição 1: O **grau** de ω é o tamanho da maior família de raios disjuntos nas arestas que têm ω como extremidade.



A extremidade desse grafo tem grau infinito. Esse grau é par?

Parênteses: grau de extremidade

Pergunta: Mas o que exatamente é o grau de uma extremidade?

Definição 1: O **grau** de ω é o tamanho da maior família de raios disjuntos nas arestas que têm ω como extremidade.

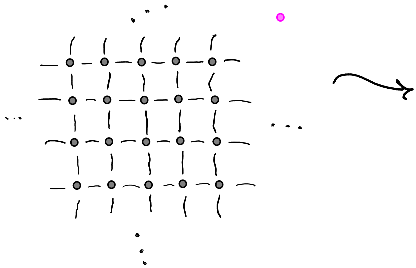
Definição 2: Em um grafo *localmente finito* G, o **grau** de ω é dito ser **par** se existe $S_0 \subset V(G)$ finito tal que o número máximo de $S - \omega$ arcos disjuntos nas arestas é par para todo $S \supset S_0$ finito.

Dizemos que o grau de ω é **ímpar** caso contrário.

Parênteses: grau de extremidade

Pergunta: Mas o que exatamente é o grau de uma extremidade?

Definição 1: O **grau** de ω é o tamanho da maior família de raios disjuntos nas arestas que têm ω como extremidade.



Tomando $S = \emptyset$, o grau dessa extremidade é par.

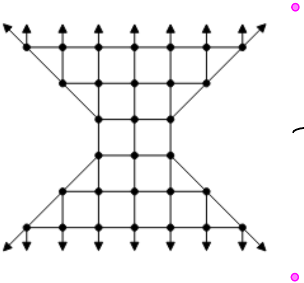
Definição 2: Em um grafo *localmente finito* G, o **grau** de ω é dito ser **par** se existe $S_0 \subset V(G)$ finito tal que o número máximo de $S - \omega$ arcos disjuntos nas arestas é par para todo $S \supset S_0$ finito.

Dizemos que o grau de ω é **ímpar** caso contrário.

Parênteses: grau de extremidade

Pergunta: Mas o que exatamente é o grau de uma extremidade?

Definição 1: O **grau** de ω é o tamanho da maior família de raios disjuntos nas arestas que têm ω como extremidade.



O grau de ambas as extremidades desse grafo é ímpar.

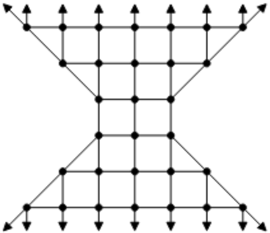
Definição 2: Em um grafo *localmente finito* G, o **grau** de ω é dito ser **par** se existe $S_0 \subset V(G)$ finito tal que o número máximo de $S - \omega$ arcos disjuntos nas arestas é par para todo $S \supset S_0$ finito.

Dizemos que o grau de ω é **ímpar** caso contrário.

Parênteses: grau de extremidade

Pergunta: Mas o que exatamente é o grau de uma extremidade?

Definição 1: O **grau** de ω é o tamanho da maior família de raios disjuntos nas arestas que têm ω como extremidade.



Lema(Aperto de Mão Infinito):

Em um grafo localmente finito, a quantidade de vértices e extremidades de grau ímpar é infinita ou par.

Definição 2: Em um grafo *localmente finito* G, o **grau** de ω é dito ser **par** se existe $S_0 \subset V(G)$ finito tal que o número máximo de $S - \omega$ arcos disjuntos nas arestas é par para todo $S \supset S_0$ finito.

Dizemos que o grau de ω é **ímpar** caso contrário.

Parênteses: grau de extremidade

Pergunta: Mas o que exatamente é o grau de uma extremidade?

Definição 1: O **grau** de ω é o tamanho da maior família de raios disjuntos nas arestas que têm ω como extremidade.

$$\Updownarrow$$

Essas noções de paridade coincidem se as famílias de raios disjuntos nas arestas com ponta em ω tem tamanho limitado.

Definição 2: Em um grafo *localmente finito* G, o **grau** de ω é dito ser **par** se existe $S_0 \subset V(G)$ finito tal que o número máximo de $S-\omega$ arcos disjuntos nas arestas é par para todo $S \supset S_0$ finito.

Dizemos que o grau de ω é **ímpar** caso contrário.

Esboço da Demonstração

Teorema (Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha que G é conexo.

Então:

T, por ser discreto em $|G|$, é **enumerável**.

$$\Uparrow$$

$|G|$ tem uma base enumerável.

$$\Uparrow$$

G é enumerável, pois, para todo $v \in V(G)$,

$$V(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{u \in V(G) : d(u, v) = n\}$$

$$\Downarrow$$

$|G|$ é metrizável, pois $\{v\}$ é fechado para todo $v \in V(G)$.

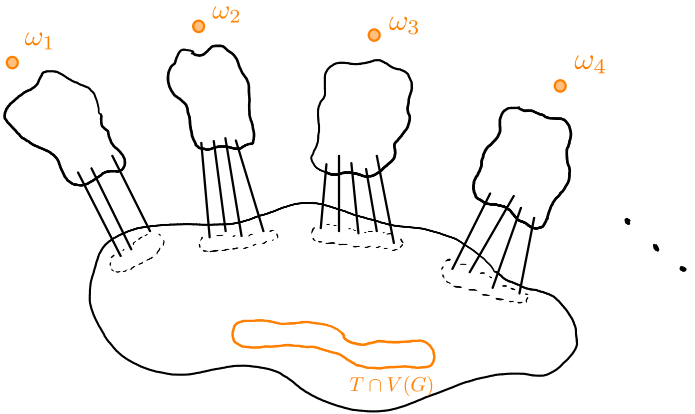
$+$

$|G|$ tem um denso enumerável: basta considerar as cópias dos racionais nas (enumeráveis) arestas.

Esboço da Demonstração

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha que G é conexo.

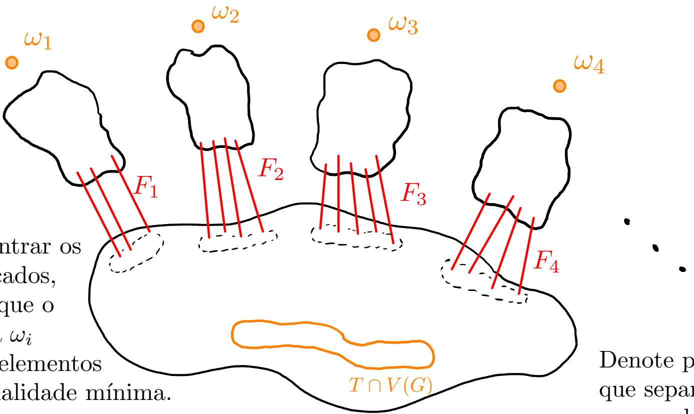
Assim, enumerando $T \cap \Omega(G)$ como $\{\omega_i\}_{i \leq \kappa}$ para algum $\kappa \leq \omega$, por *indução* é possível separar cada ω_i dos demais elementos de T por meio de subgrafos conexos dois a dois disjuntos:



Esboço da Demonstração

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponha que G é conexo.

Assim, enumerando $T \cap \Omega(G)$ como $\{\omega_i\}_{i \leq \kappa}$ para algum $\kappa \leq \omega$, por *indução* é possível separar cada ω_i dos demais elementos de T por meio de subgrafos conexos dois a dois disjuntos:

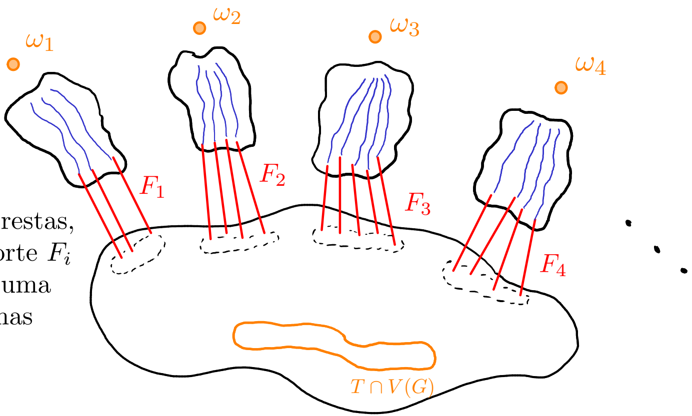


A menos de adentrar os subgrafos destacados, podemos supor que o corte que separa ω_i do restante dos elementos de T tem cardinalidade mínima.

Denote por F_i esse corte que separa ω_i de $T \setminus \{\omega_i\}$, para cada $i \leq \kappa$.

Esboço da Demonstração

Demonstração:

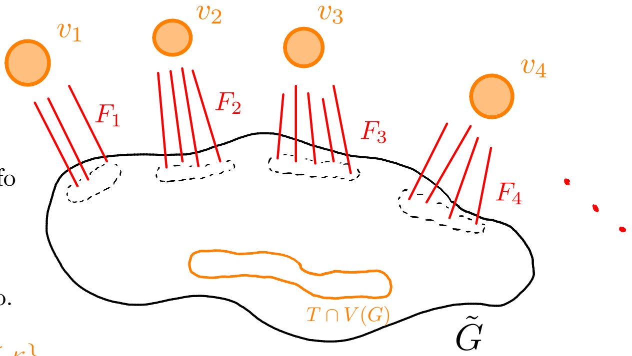


Por um análogo infinito do Teorema de Menger para Arestas, para cada i as arestas do corte F_i são as primeiras arestas de uma coleção de raios disjuntos (nas arestas) com ponta em ω_i.

Lema (Bruhn e Stein, 2007): Seja G um grafo conexo e localmente finito. Considere ω uma extremidade de G e $S \subset V(G)$ finito. Então, o número máximo de raios disjuntos (nas arestas) que tem uma ponta em S e outra em ω é igual ao tamanho mínimo de um corte que separa S de ω.

Esboço da Demonstração

Demonstração:

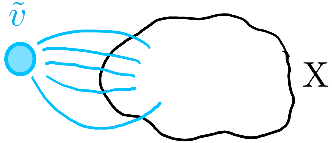


Para cada $i \leq \kappa$, contraia o subgrafo que separa ω_i de $T \setminus \{\omega_i\}$ para um vértice artificial v_i.

Denote por $\tilde{G}$ o (multi)grafo obtido.

Defina $\tilde{T} = (T \cap V(G)) \cup \{v_i : i \leq \kappa\}$.

Note que, para todo $X \subset V(\tilde{G}) \setminus \tilde{T}$, o corte definido por X não é (finito e) ímpar.

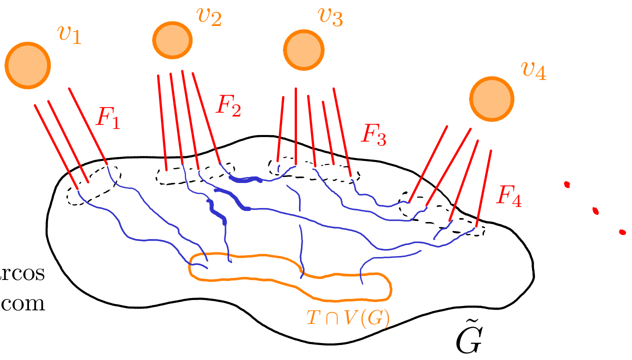


Caso contrário, a contração de $\tilde{G} \setminus X$ para um vértice $\tilde{v}$ definiria um grafo que tem apenas um vértice de grau ímpar, contradizendo o Lema do Aperto de Mão.

Esboço da Demonstração

Demonstração:

Note que, para todo $X \subset V(\tilde{G}) \setminus \tilde{T}$, o corte definido por X não é (finito e) ímpar.



Então, existe uma coleção $\mathcal{P}$ de arcos dois a dois disjuntos nas arestas, com pontas em $\tilde{T}$, tal que:

Para cada $t \in \tilde{T}$, existe um corte que separa t e $\tilde{T} \setminus t$ formado por exatamente uma aresta de cada raio que incide em t.

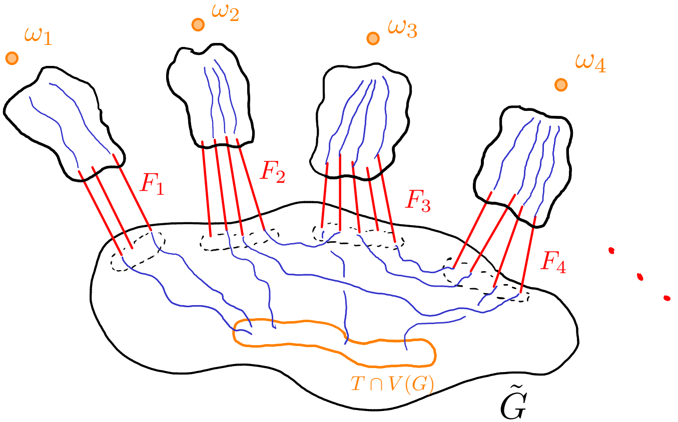
Teorema (Joó, 2021): Seja G um grafo qualquer e fixe $T \subset V(G)$ enumerável. Se nenhum subconjunto de $V(G) \setminus T$ define um corte ímpar, existe $\mathcal{P}$ uma coleção de $T-$arcos tal que, para todo $t \in T$, é possível escolher (exatamente) uma aresta de cada arco que incide em t de modo a formar um corte que o separa de $T \setminus t$.

Esboço da Demonstração

Demonstração:

Logo, a família de $T-$arcos procurada é dada pela concatenação dos arcos de $\mathcal{P}$ com alguns dos arcos anteriormente encontrados.

(Note que algumas arestas dos cortes $F_1, F_2, F_3, \ldots$ podem não ser utilizadas para a obtenção dos arcos definitivos)



$\square$

Comentários Gerais

O "coração da demonstração" consiste no resultado de Joó, que não faz uso do fato de que o grafo estudado é localmente finito:

Teorema (Joó, 2021): Seja G um grafo qualquer e fixe $T \subset V(G)$ enumerável. Se nenhum subconjunto de $V(G) \setminus T$ define um corte ímpar, existe $\mathcal{P}$ uma coleção de $T-$arcos tal que, para todo $t \in T$, é possível escolher (exatamente) uma aresta de cada arco que incide em t de modo a formar um corte que o separa de $T \setminus t$.

Será que, com modificações adequedas no enunciado, não é possível remover também a hipótese de finitude local no Teorema de Lovász-Cherkassky com Extremidades?

Teorema(Lovász-Cherkassky com Extremidades): Seja G um grafo localmente finito e fixe $T \subset V(G) \cup \Omega(G)$ discreto em $|G|$. Se G é interiormente Euleriano com respeito a T, existe $\mathcal{A}$ uma coleção de $T-$arcos disjuntos nas arestas tal que todo $t \in T$ é ponta de $\lambda(t, T \setminus \{t\})$ desses arcos.

Referências Bibliográficas:

Henning Bruhn and Maya Jakobine Stein.
On end degrees and infinite cycles in locally finite graphs.
Combinatorica, 27:269–291, 2007.

Raphael W. Jacobs, Attila Joó, Paul Knappe, Jan Kurkofka, and Ruben Melcher.
The Lovász-Cherkassky theorem for locally finite graphs with ends.
arXiv, 2021.

Attila Joó.
The Lovász-Cherkassky theorem in countable graphs.
arXiv, 2021.