O Teorema de Kuratowski

Combinando

2021

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Os elementos de V e de E são ditos **vértices** e **arestas** de G, resp..

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Os elementos de V e de E são ditos **vértices** e **arestas** de G, resp..

$(\mathbb{R}, <)$ $\qquad$ $(\mathbb{Z}, \mid)$ $\qquad$ $(X, =)$

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Os elementos de V e de E são ditos **vértices** e **arestas** de G, resp..

$(\mathbb{R}, <)$ $\qquad$ $(\mathbb{Z}, \mid)$ $\qquad$ $(X, =)$

Para o que segue, no entanto, estaremos interessados em grafos com determinadas propriedades:

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Os elementos de V e de E são ditos **vértices** e **arestas** de G, resp..

$$(\mathbb{R}, <) \qquad (\mathbb{Z}, \mid\,) \qquad (X, =)$$

Para o que segue, no entanto, estaremos interessados em grafos com determinadas propriedades:

- $aa \notin E$;

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Os elementos de V e de E são ditos **vértices** e **arestas** de G, resp..

$$(\mathbb{R}, <) \qquad (\mathbb{Z}, \mid\,) \qquad (X, =)$$

Para o que segue, no entanto, estaremos interessados em grafos com determinadas propriedades:

- $aa \notin E$;
- $ab \in E \implies ba \in E$;

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Os elementos de V e de E são ditos **vértices** e **arestas** de G, resp..

$$(\mathbb{R}, <) \qquad (\mathbb{Z}, \mid\,) \qquad (X, =)$$

Para o que segue, no entanto, estaremos interessados em grafos com determinadas propriedades:

- $aa \notin E$;
- $ab \in E \implies ba \in E$;
- $|V| < \infty$.

Grafo

Um **grafo** é um conjunto V munido de uma relação E, geralmente representado pelo par $G = (V, E)$.

Os elementos de V e de E são ditos **vértices** e **arestas** de G, resp..

Pessoas em uma reunião que se conhecem

Atores de Hollywood que nunca fizeram filmes juntos

Regiões de um mapa que são adjacentes

Para o que segue, no entanto, estaremos interessados em grafos com determinadas propriedades:

- $aa \notin E$;
- $ab \in E \implies ba \in E$;
- $|V| < \infty$.

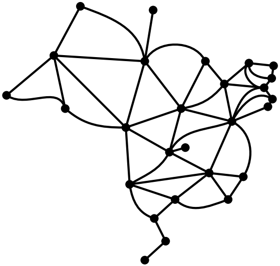
Imersão

Em geral, para facilitar a visualização, apresentamos grafos através de diagramas, representando vértices por pontos e arestas por arcos

Imersão

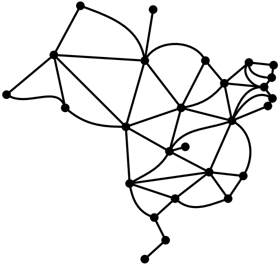
Em geral, para facilitar a visualização, apresentamos grafos através de diagramas, representando vértices por pontos e arestas por arcos

Em geral, para facilitar a visualização, apresentamos grafos através de diagramas, representando vértices por pontos e arestas por arcos



Imersão

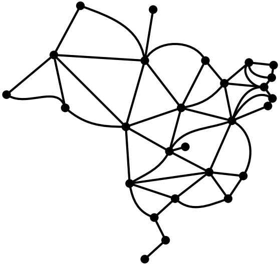
Em geral, para facilitar a visualização, apresentamos grafos através de diagramas, representando vértices por pontos e arestas por arcos



Essa representação é chamada de **imersão** do grafo no plano.

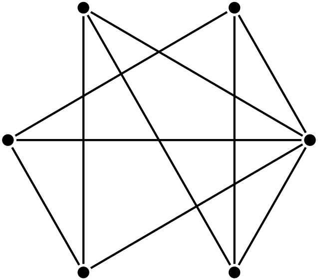
Imersão

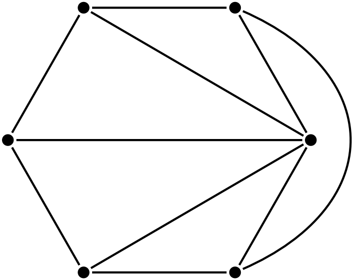
Em geral, para facilitar a visualização, apresentamos grafos através de diagramas, representando vértices por pontos e arestas por arcos



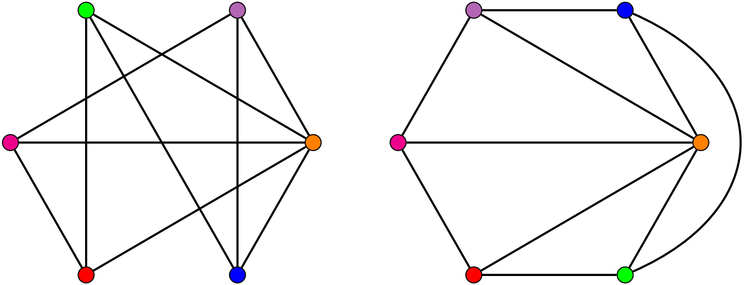
Essa representação é chamada de **imersão** do grafo no plano.
É claro que um grafo pode ter várias imersões.

Grafo planar

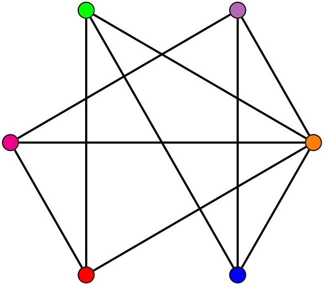




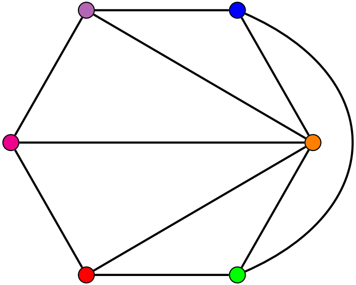
Grafo planar



Grafo planar



Imersão não plana



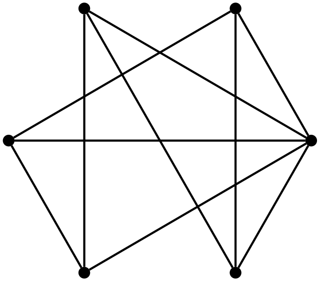
Imersão plana

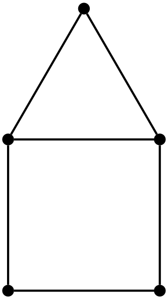
Grafo planar

Um grafo é dito **planar** se existe uma imersão sua que é plana.

Grafo planar

Um grafo é dito **planar** se existe uma imersão sua que é plana.

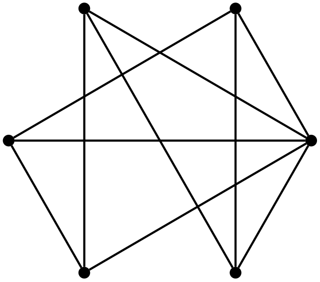


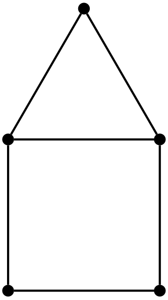


Grafo planar

Um grafo é dito **planar** se existe uma imersão sua que é plana.

E que grafos não são planares?

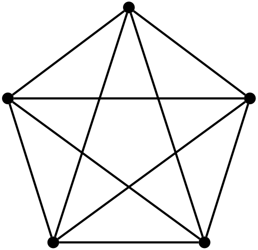




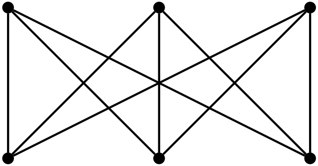
Grafo planar

Um grafo é dito **planar** se existe uma imersão sua que é plana.

E que grafos não são planares?



K_5



$K_{3,3}$

Lema de Euler

Lema de Euler

Para uma imersão plana de um grafo conexo, vale

$$V - E + F = 2$$

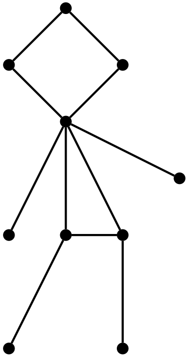
onde V, E, F são os números de vértices, arestas e faces da imersão, resp..

Lema de Euler

Para uma imersão plana de um grafo conexo, vale

$$V - E + F = 2$$

onde V, E, F são os números de vértices, arestas e faces da imersão, resp..

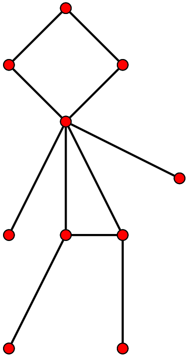


Lema de Euler

Para uma imersão plana de um grafo conexo, vale

$$V - E + F = 2$$

onde V, E, F são os números de vértices, arestas e faces da imersão, resp..



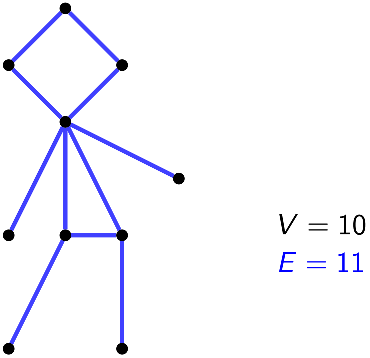
$V = 10$

Lema de Euler

Para uma imersão plana de um grafo conexo, vale

$$V - E + F = 2$$

onde V, E, F são os números de vértices, arestas e faces da imersão, resp..

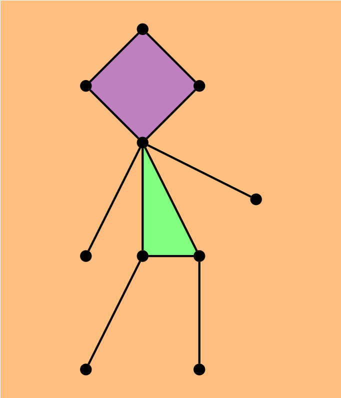


Lema de Euler

Para uma imersão plana de um grafo conexo, vale

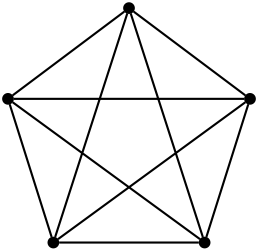
$$V - E + F = 2$$

onde V, E, F são os números de vértices, arestas e faces da imersão, resp..

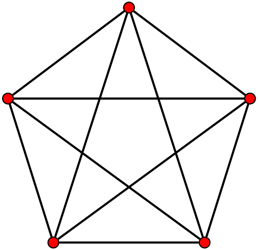


$V = 10$
$E = 11$
$F = 3$

Não planaridade

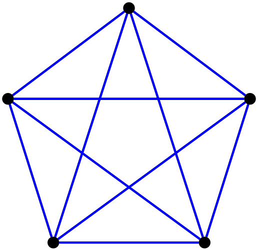


Não planaridade



$V = 5$

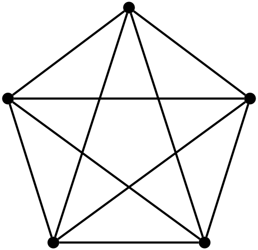
Não planaridade



$V = 5$

$E = 10$

Não planaridade

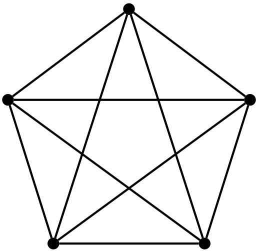


$V = 5$

$E = 10$

$F = 2 - V + E = 7$

Não planaridade



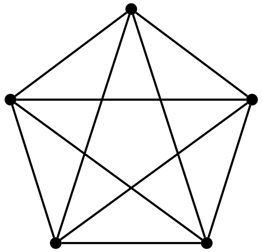
$V = 5$

$E = 10$

$F = 2 - V + E = 7$

Veja que cada face têm no mínimo 3 arestas, e cada aresta faz parte de no máximo 2 faces...

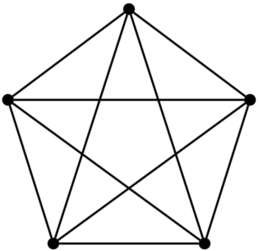
Não planaridade



$$V = 5$$
$$E = 10$$
$$F = 2 - V + E = 7$$

Veja que cada face têm no mínimo 3 arestas, e cada aresta faz parte de no máximo 2 faces... Logo, em uma possível imersão planar, $2E \geq 3F$.

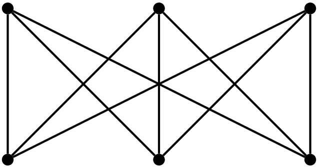
Não planaridade



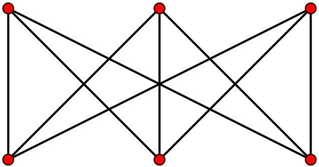
$$V = 5$$
$$E = 10$$
$$F = 2 - V + E = 7$$

Veja que cada face têm no mínimo 3 arestas, e cada aresta faz parte de no máximo 2 faces... Logo, em uma possível imersão planar, $2E \geq 3F$.
Porém, é claro que $2 \cdot 10 = 20 \ngeq 3 \cdot 7 = 21$.

Não planaridade

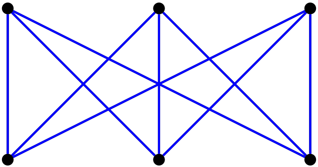


Não planaridade



$V = 6$

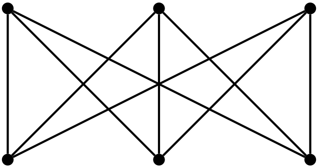
Não planaridade



$V = 6$

$E = 9$

Não planaridade

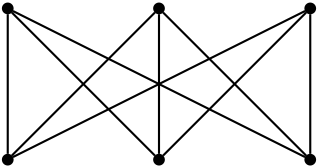


$V = 6$

$E = 9$

$F = 2 - V + E = 5$

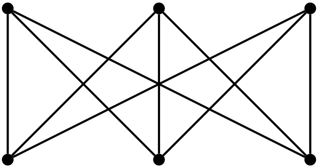
Não planaridade



$V = 6$
$E = 9$
$F = 2 - V + E = 5$

Aqui, $2E = 18 \geq 15 = 3F$, portanto precisamos de um argumento mais forte.

Não planaridade

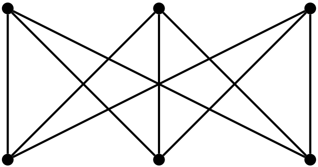


$V = 6$

$E = 9$

$F = 2 - V + E = 5$

Aqui, $2E = 18 \geq 15 = 3F$, portanto precisamos de um argumento mais forte. Para isso, veja que $K_{3,3}$ não possui triângulos, logo, cada face têm, no mínimo, 4 arestas, e não 3.



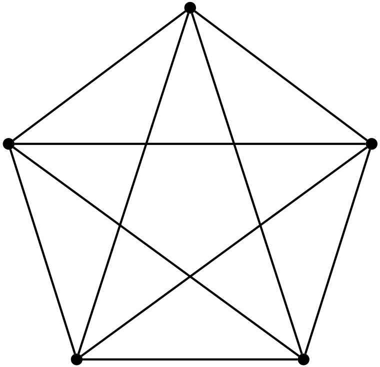
$V = 6$

$E = 9$

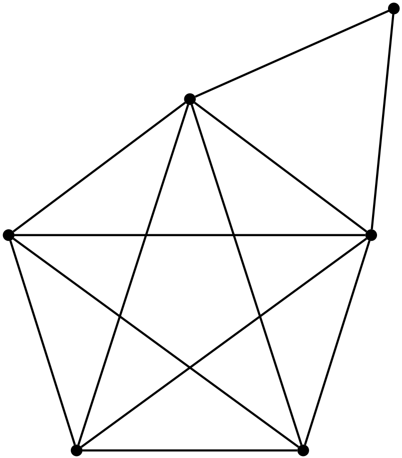
$F = 2 - V + E = 5$

Aqui, $2E = 18 \geq 15 = 3F$, portanto precisamos de um argumento mais forte. Para isso, veja que $K_{3,3}$ não possui triângulos, logo, cada face têm, no mínimo, 4 arestas, e não 3. Assim, deve ser verdade que $2E \geq 4F$, porém $2 \cdot 9 = 18 \not\geq 4 \cdot 5 = 20$.

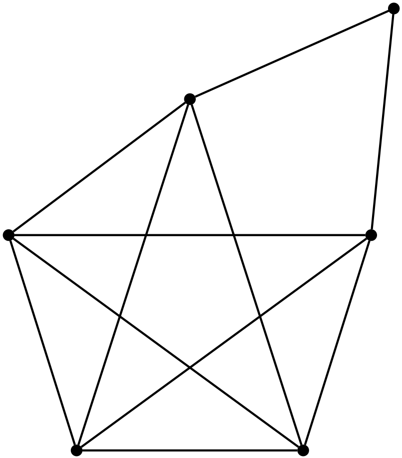
Subgrafos e subdivisões



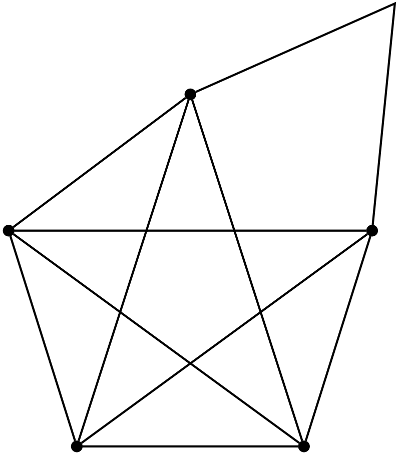
Subgrafos e subdivisões



Subgrafos e subdivisões



Subgrafos e subdivisões



Subgrafos e subdivisões

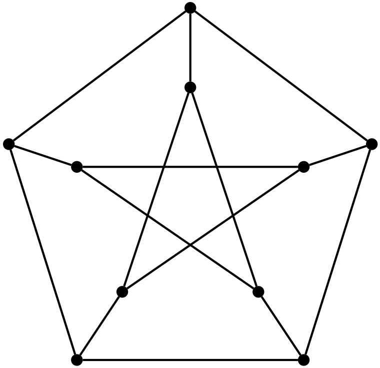
Lema

Se um subgrafo de um grafo é não-planar, então o grafo é não-planar.

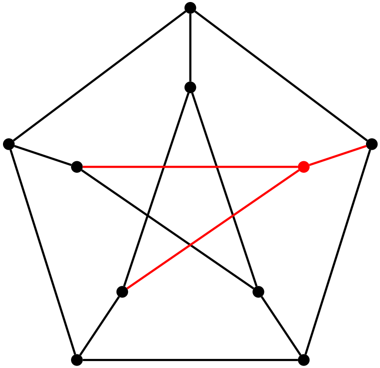
Lema

Uma subdivisão de um grafo não-planar é não-planar.

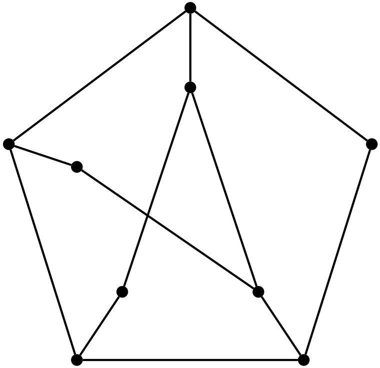
Exemplo



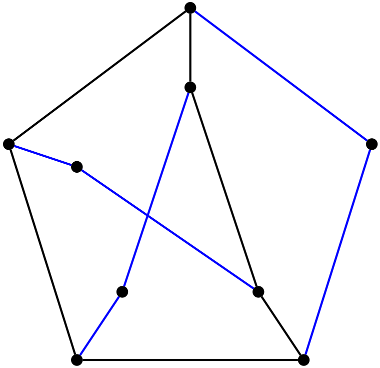
Exemplo



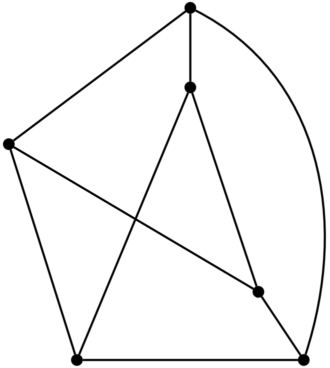
Exemplo



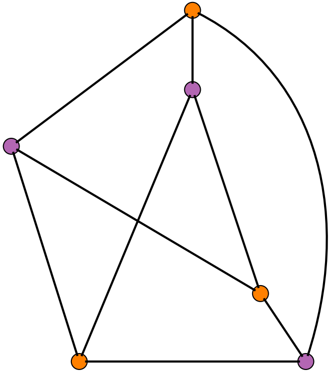
Exemplo



Exemplo



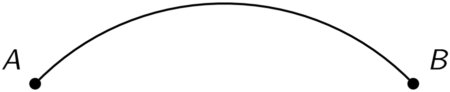
Exemplo



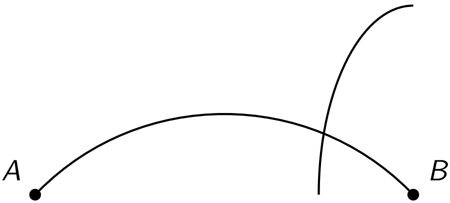
Kuratowski

Seja G um grafo. Então G é não planar se, e somente se, G contém um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.

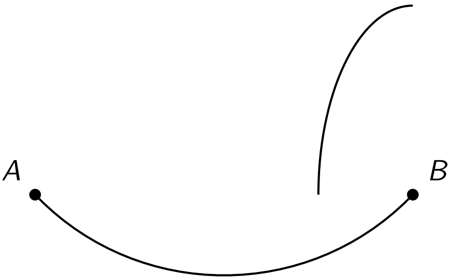
Intuição



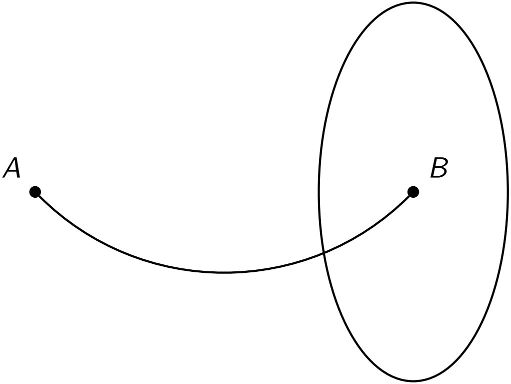
Intuição



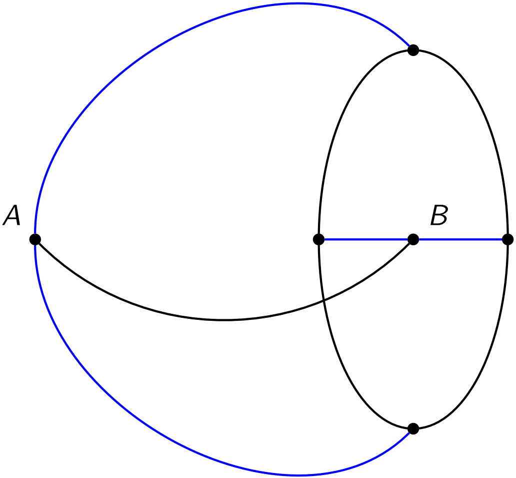
Intuição



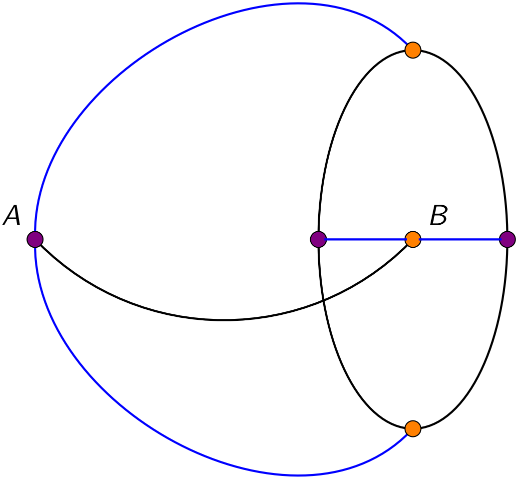
Intuição



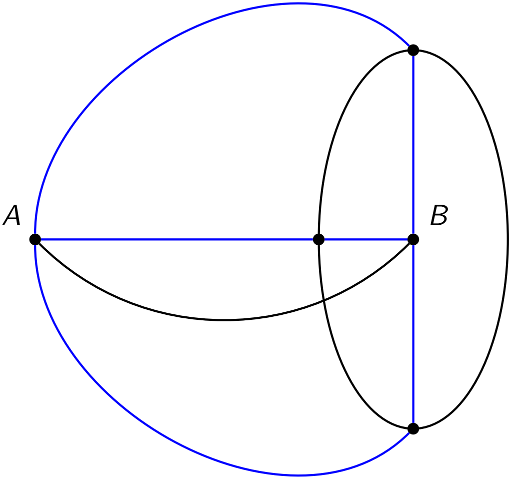
Intuição



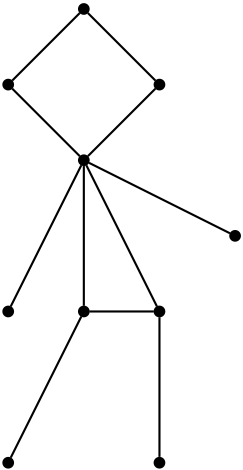
Intuição



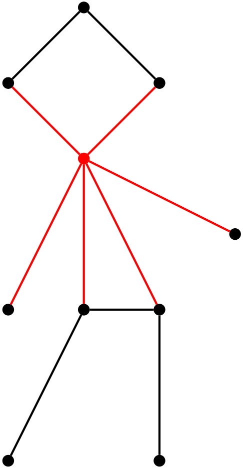
Intuição



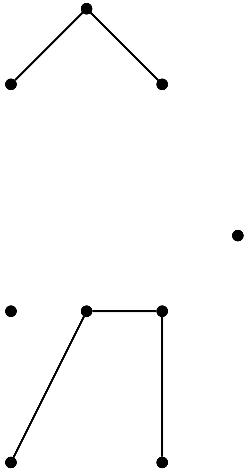
Corte



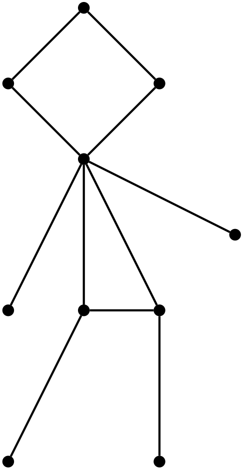
Corte



Corte

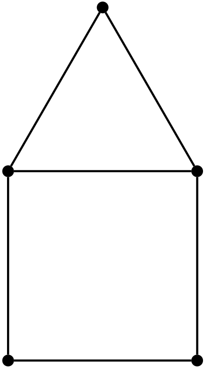


Corte

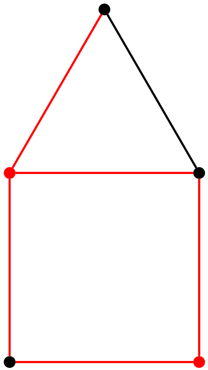


Grafo 1−conexo

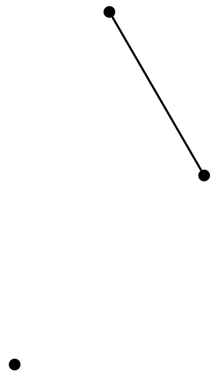
Corte



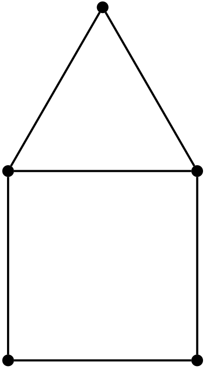
Corte



Corte

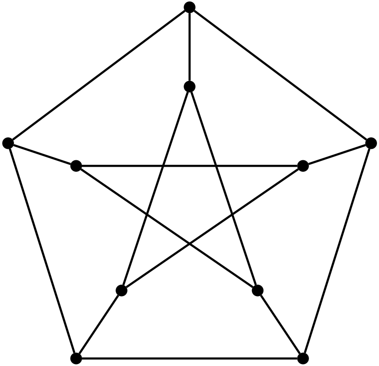


Corte

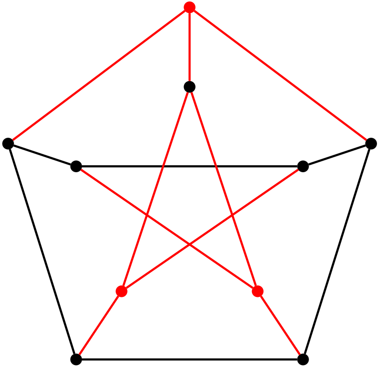


Grafo 2−conexo

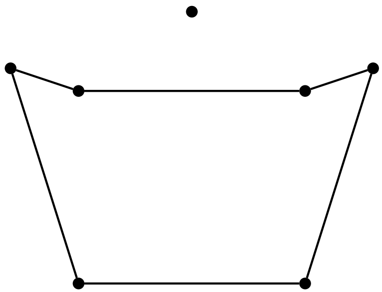
Corte



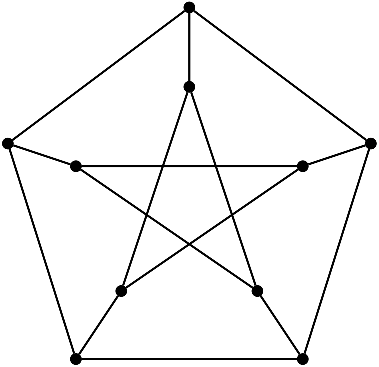
Corte



Corte



Corte



Grafo 3−conexo

Lema

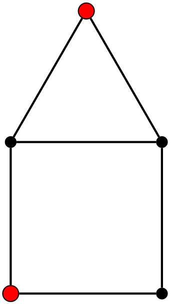
Lema

Sejam G um grafo $2-$conexo com pelo menos três vértices e u, v vértices distintos de G. Então existe um ciclo em G que contém u e v.

Lema

Lema

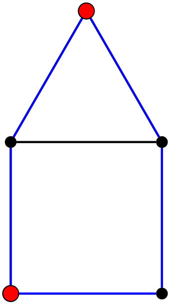
Sejam G um grafo $2-$conexo com pelo menos três vértices e u, v vértices distintos de G. Então existe um ciclo em G que contém u e v.



Lema

Lema

Sejam G um grafo $2-$conexo com pelo menos três vértices e u, v vértices distintos de G. Então existe um ciclo em G que contém u e v.



Outro lema

Lema

Se $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ são grafos planares com $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ e $ab \in E_1, E_2$, então $G = G_1 \cup G_2$ é planar.

Outro lema

Lema

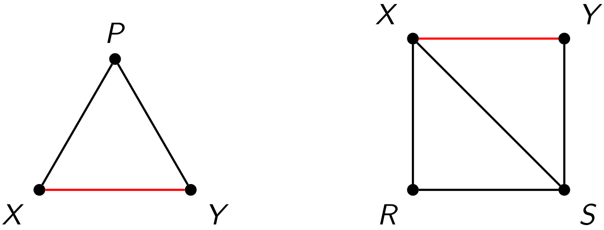
Se $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ são grafos planares com $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ e $ab \in E_1, E_2$, então $G = G_1 \cup G_2$ é planar.

Demonstração.

Lema

Se $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ são grafos planares com $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ e $ab \in E_1, E_2$, então $G = G_1 \cup G_2$ é planar.

Demonstração.

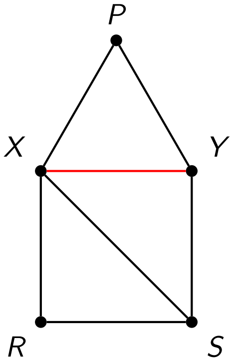


Outro lema

Lema

Se $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ são grafos planares com $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ e $ab \in E_1, E_2$, então $G = G_1 \cup G_2$ é planar.

Demonstração.

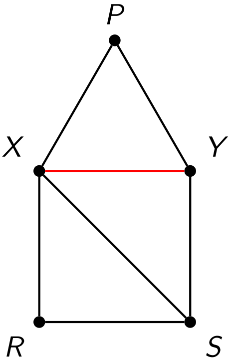


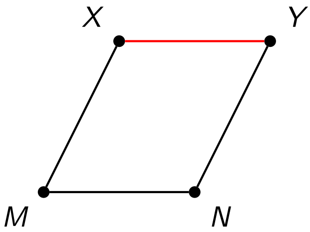
Outro lema

Lema

Se $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ são grafos planares com $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ e $ab \in E_1, E_2$, então $G = G_1 \cup G_2$ é planar.

Demonstração.



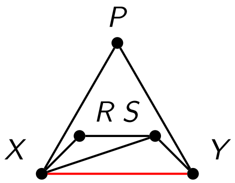


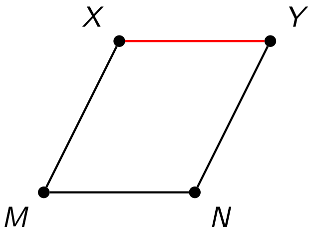
Outro lema

Lema

Se $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ são grafos planares com $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ e $ab \in E_1, E_2$, então $G = G_1 \cup G_2$ é planar.

Demonstração.



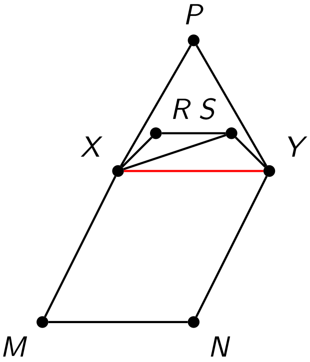


Outro lema

Lema

Se $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ são grafos planares com $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$ e $ab \in E_1, E_2$, então $G = G_1 \cup G_2$ é planar.

Demonstração.



Demonstração

Suponha que existe um grafo **não planar** que **não contém** um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Seja G um tal grafo com número mínimo de arestas.

Demonstração

Suponha que existe um grafo **não planar** que **não contém** um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Seja G um tal grafo com número mínimo de arestas.

Lema

G deve ser $3-$conexo.

Suponha que existe um grafo **não planar** que **não contém** um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Seja G um tal grafo com número mínimo de arestas.

Lema

G deve ser $3-$conexo.

Demonstração. Suponha que G não é $3-$conexo.

Demonstração

Suponha que existe um grafo **não planar** que **não contém** um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Seja G um tal grafo com número mínimo de arestas.

Lema

G deve ser $3-$conexo.

Demonstração. Suponha que G não é $3-$conexo.
Então existe um corte $\{u, v\}$ de G.

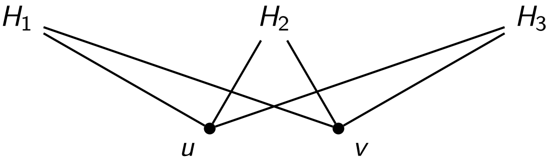
Demonstração

Suponha que existe um grafo **não planar** que **não contém** um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Seja G um tal grafo com número mínimo de arestas.

Lema

G deve ser $3-$conexo.

Demonstração. Suponha que G não é $3-$conexo.
Então existe um corte $\{u, v\}$ de G.



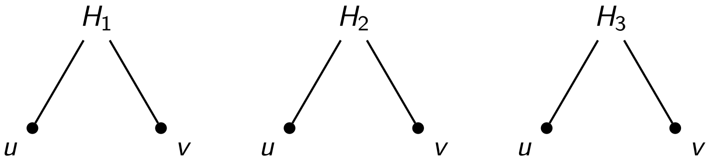
Demonstração

Suponha que existe um grafo **não planar** que **não contém** um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Seja G um tal grafo com número mínimo de arestas.

Lema

G deve ser $3-$conexo.

Demonstração. Suponha que G não é $3-$conexo.
Então existe um corte $\{u, v\}$ de G.



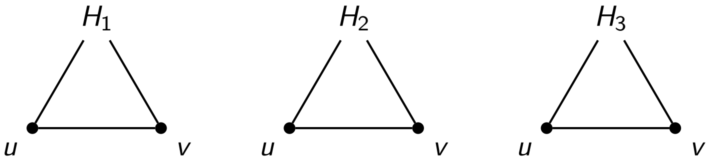
Demonstração

Suponha que existe um grafo **não planar** que **não contém** um subgrafo que é uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$. Seja G um tal grafo com número mínimo de arestas.

Lema

G deve ser $3-$conexo.

Demonstração. Suponha que G não é $3-$conexo.
Então existe um corte $\{u, v\}$ de G.

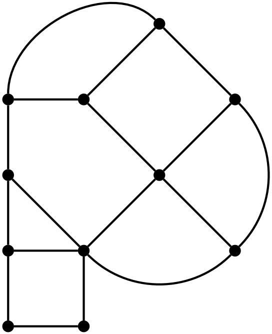


Pontes

Seja C um ciclo em um grafo G. Uma **ponte** de C é um subgrafo maximal que não contém caminhos com vértices internos em C.

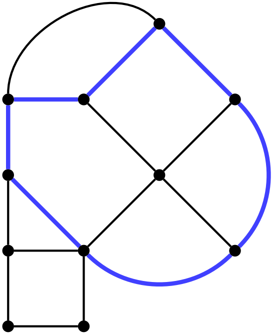
Pontes

Seja C um ciclo em um grafo G. Uma **ponte** de C é um subgrafo maximal que não contém caminhos com vértices internos em C.



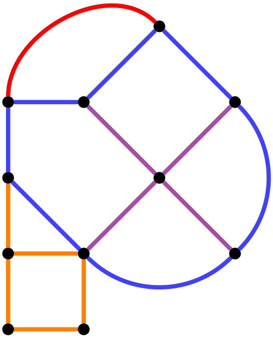
Pontes

Seja C um ciclo em um grafo G. Uma **ponte** de C é um subgrafo maximal que não contém caminhos com vértices internos em C.



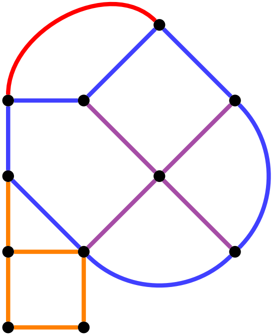
Pontes

Seja C um ciclo em um grafo G. Uma **ponte** de C é um subgrafo maximal que não contém caminhos com vértices internos em C.



Pontes

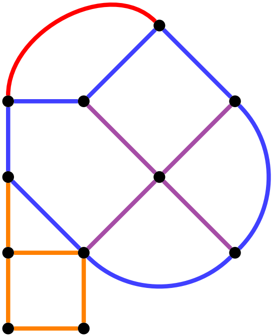
Seja C um ciclo em um grafo G. Uma **ponte** de C é um subgrafo maximal que não contém caminhos com vértices internos em C.



Para uma imersão planar de G, podemos dizer se pontes são **interiores** ou **exteriores**.

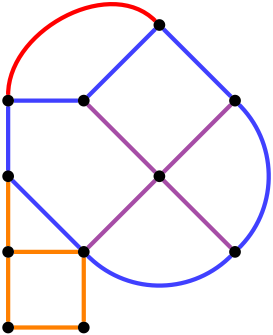
Pontes

Dizemos que duas pontes **se evitam** se não existem dois vértices de ancoragem de uma se alternando com dois vértices de ancoragem da outra no ciclo. Caso contrário, dizemos que as pontes **se sobrepõem**.



Pontes

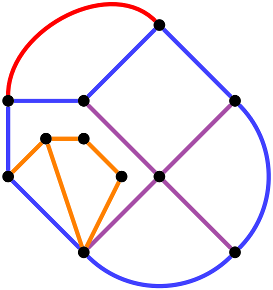
Dizemos que duas pontes **se evitam** se não existem dois vértices de ancoragem de uma se alternando com dois vértices de ancoragem da outra no ciclo. Caso contrário, dizemos que as pontes **se sobrepõem**.



Se uma ponte exterior não se sobrepõe com nenhuma ponte interior, então podemos passar essa ponte para dentro do ciclo sem alterar o restante da imersão e mantendo-a planar.

Pontes

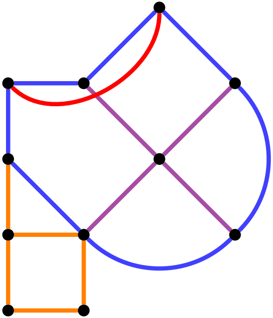
Dizemos que duas pontes **se evitam** se não existem dois vértices de ancoragem de uma se alternando com dois vértices de ancoragem da outra no ciclo. Caso contrário, dizemos que as pontes **se sobrepõem**.



Se uma ponte exterior não se sobrepõe com nenhuma ponte interior, então podemos passar essa ponte para dentro do ciclo sem alterar o restante da imersão e mantendo-a planar.

Pontes

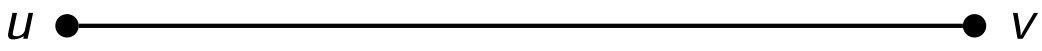
Dizemos que duas pontes **se evitam** se não existem dois vértices de ancoragem de uma se alternando com dois vértices de ancoragem da outra no ciclo. Caso contrário, dizemos que as pontes **se sobrepõem**.



Se uma ponte exterior não se sobrepõe com nenhuma ponte interior, então podemos passar essa ponte para dentro do ciclo sem alterar o restante da imersão e mantendo-a planar.

Demonstração

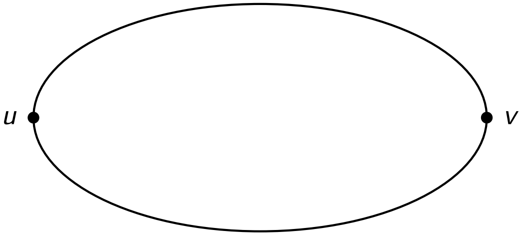
Sejam u, v vértices adjacentes de G.



Demonstração

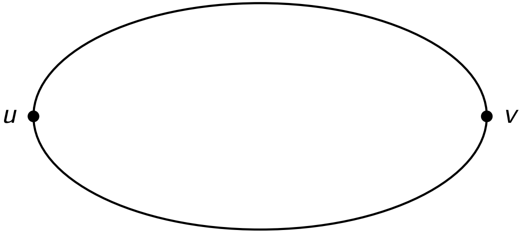
Sejam u, v vértices adjacentes de G. Então $G - uv$ é planar (pela minimalidade de G) e 2−conexo.

Sejam u, v vértices adjacentes de G. Então $G - uv$ é planar (pela minimalidade de G) e $2-$conexo. Assim, existe um ciclo em G que contém u e v.



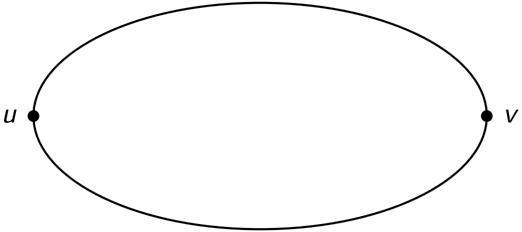
Demonstração

Dada uma imersão plana de $G - uv$, de todos os ciclos contendo u e v, escolha C com o máximo de arestas possível em seu interior.



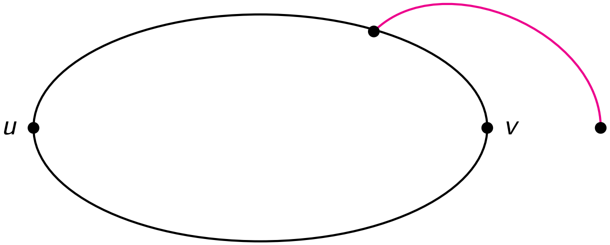
Demonstração

Dada uma imersão plana de $G - uv$, de todos os ciclos contendo u e v, escolha C com o máximo de arestas possível em seu interior.
Consideramos agora as pontes de C.



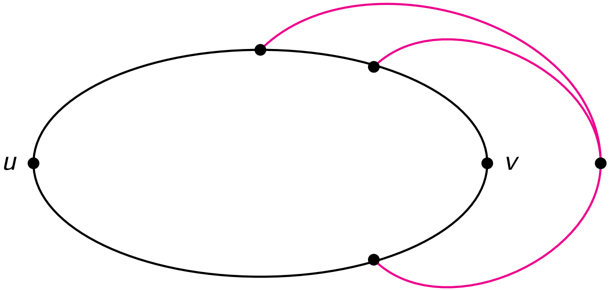
Demonstração

Se existe uma ponte ancorada em um único vértice de C, então esse vértice é um vértice de corte, contradizendo a $2-$conexidade de $G - uv$.



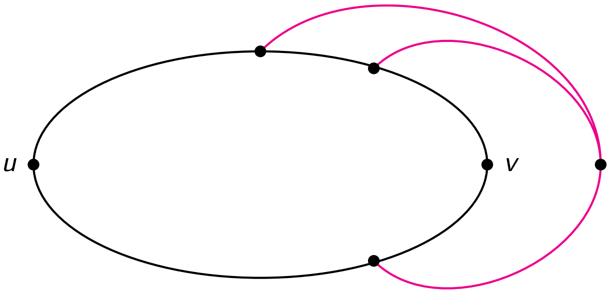
Demonstração

Se existe uma ponte ancorada em um único vértice de C, então esse vértice é um vértice de corte, contradizendo a $2-$conexidade de $G - uv$. Assim, todas as pontes devem estar ancoradas em pelo menos dois vértices.



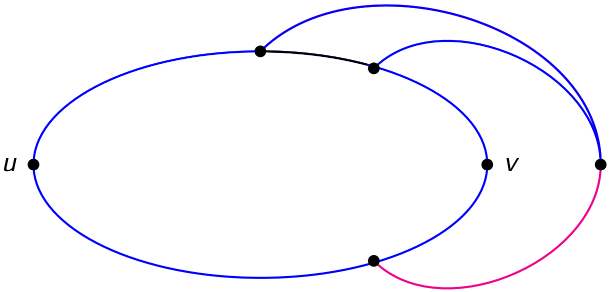
Demonstração

No entanto, uma ponte exterior não pode estar ancorada em 3 ou mais vértices de C, pois, nesse caso, poderíamos encontrar um ciclo contendo u e v com mais arestas em seu interior.



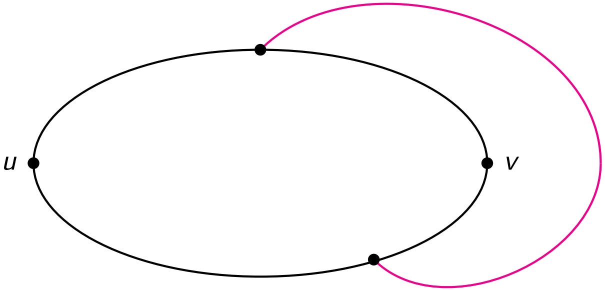
Demonstração

No entanto, uma ponte exterior não pode estar ancorada em 3 ou mais vértices de C, pois, nesse caso, poderíamos encontrar um ciclo contendo u e v com mais arestas em seu interior.



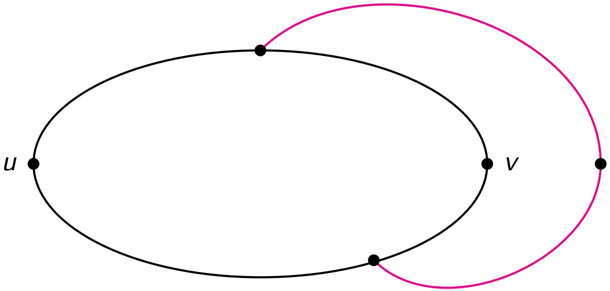
Demonstração

Pelo mesmo argumento, um ponte exterior deve ter exatamente uma âncora em cada arco uv.



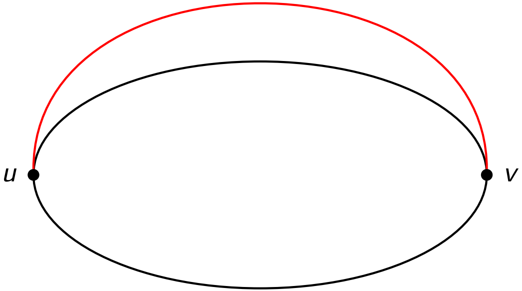
Demonstração

Além disso, uma ponte exterior precisa ser uma aresta, pois, caso ela possua algum vértice interior, suas âncoras serão um corte de G, contradizendo sua $3-$conexidade.



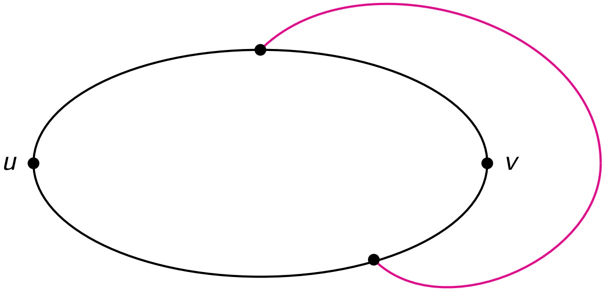
Demonstração

É claro que deve haver uma ponte exterior, pois, caso contrário, poderíamos adicionar a aresta uv ao grafo mantendo a planaridade da imersão.



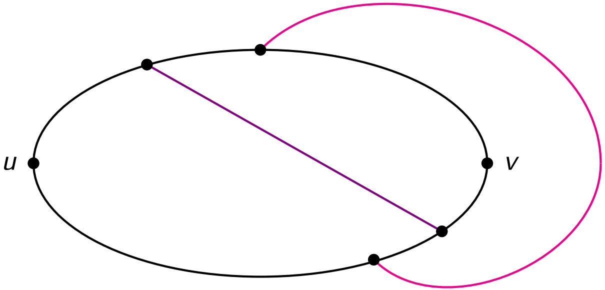
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



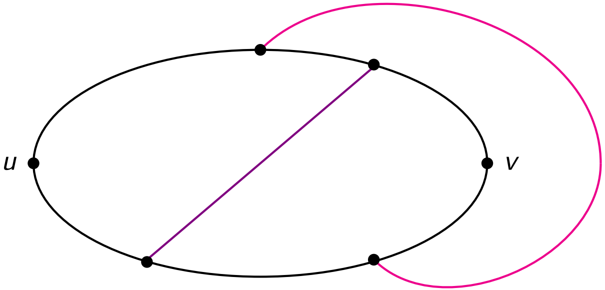
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



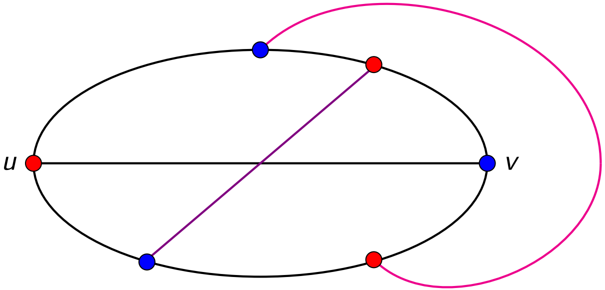
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



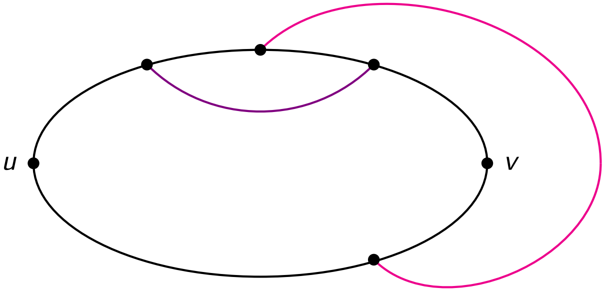
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



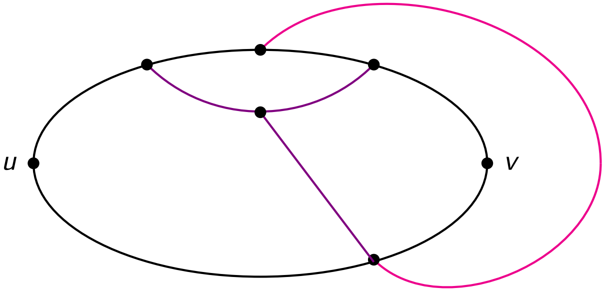
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



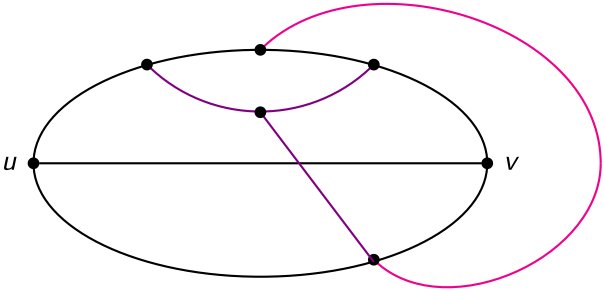
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



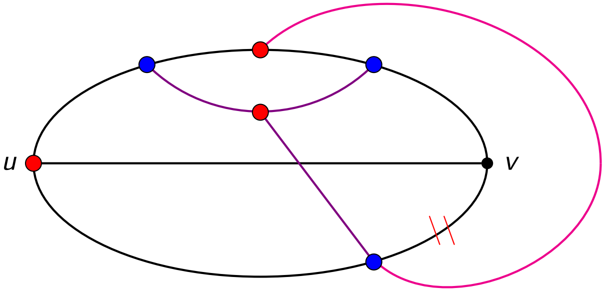
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



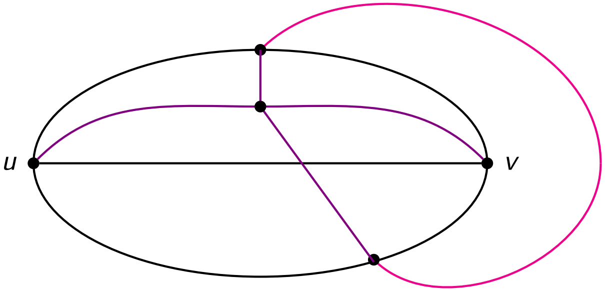
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



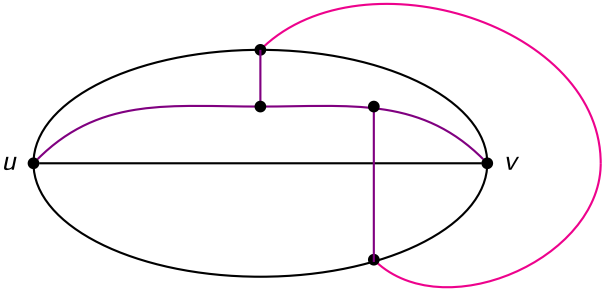
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



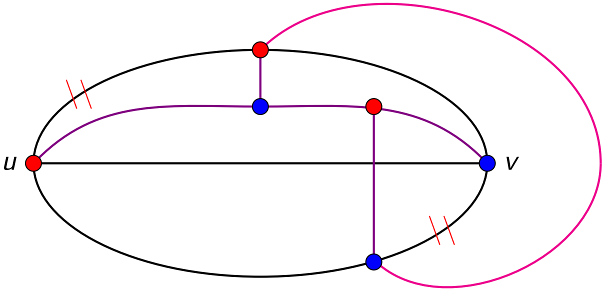
Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



Demonstração

Também é claro que deve haver uma ponte interior se sobrepondo com alguma ponte exterior, pois, caso contrário, todas as pontes exteriores poderiam ser transferidas para dentro do ciclo.



Referências

Planar Graphs - Numberphile. YouTube. 2019. URL: https://www.youtube.com/watch?v=xBkTIp6ajAg (acesso em 16/09/2021).

Mary Radcliffe. *Math 228: Kuratowski's Theorem*. URL: https://www.math.cmu.edu/~mradclif/teaching/228F16/Kuratowski.pdf (acesso em 05/11/2021).

Yifan Xu. *KURATOWSKI'S THEOREM*. URL: https://math.uchicago.edu/~may/REU2017/REUPapers/Xu,Yifan.pdf (acesso em 05/11/2021).