HEX e Y: dois jogos de conexão

(que são equivalentes)

Lucas Silva Sinzato Real

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Combinando

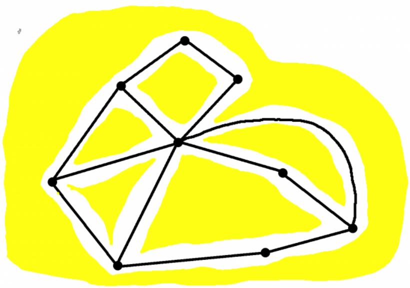
17/03/2021

Parênteses: Grafos Planares

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é **planar** se seu conjunto de vértices pode ser encarado como pontos do plano $\mathbb{R}^2$ e suas arestas como curvas que os conectam, mas sem que haja intersecção entre arestas distintas.

Figura: Três desses grafos são planares e um deles não é.

Se $G = (V, E)$ é um grafo planar, sua representação no plano na qual suas arestas não se intersectam é dita ser uma **representação planar**. Nessa representação, uma **face** consiste em um subconjunto maximal do plano cartesiano no qual, dados dois de seus pontos, existe uma curva ligando-os que não cruza com as demais arestas do grafo.



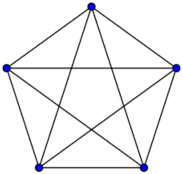
Considere $G = (V, E)$ um grafo planar conexo com finitos vértices e denote por n sua quantidade de vértices, q o número de arestas e r o número de faces. Por indução sobre q, mostraremos que

$$n - q + r = 2$$

Se $q = 0$, devemos ter $n = 1$ (pela conexidade do grafo) e $r = 1$, verificando a igualdade acima. Se $q > 0$, dois casos devem ser considerados:

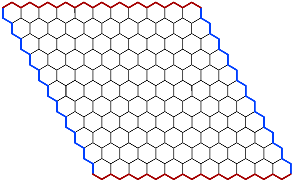
- Se G é uma árvore, então $q = n - 1$ e $r = 1$, também verificando a fórmula.
- Se G possui um circuito, remova uma de suas arestas. Pela hipótese de indução, se r' denota a quantidade de regiões do grafo com tal aresta removida, vale que $n - (q - 1) + r' = 2$. Com a adição da aresta removida, concluimos que $r = r' + 1$, verificando que $n - q + r = 1$

Observe que, se $G = (V, E)$ é um grafo planar conexo com pelo menos três vértices e três arestas, então cada face é delimitada por, pelo menos, três arestas. Sejam n, q e r as quantidades de vértices, arestas e faces desse grafo, respectivamente. Como uma aresta é fronteira de duas faces, concluimos que $3r \leq 2q$. Com isso, aplicando a fórmula de Euler, vale que $3(2 - n + q) \leq 2q$, de onde concluimos que $q \leq 3n - 6$. Em particular, o grafo completo de cinco vértices não é planar.



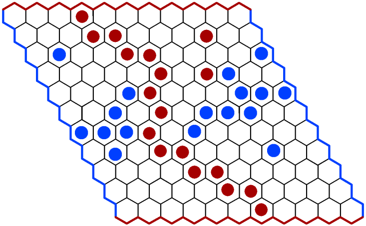
O Jogo Hex

O jogo `HEX` é jogado em um tabuleiro de quadro lados cujas casas são hexagonais.



Com isso, dois jogadores se alternam na disposição de peças vermelhas e azuis sobre as casas do tabuleiro. O jogador munido com as peças vermelhas deve dispor suas peças de modo a construir um caminho conectando os lados superior e inferior do tabuleiro, enquanto o jogador que controla as peças azuis deve construir com suas peças que conecte as suas laterais. Assim, vence o jogador que primeiro atingir seu objetivo.

No exemplo abaixo, o jogador vermelho conseguiu ganhar o jogo.



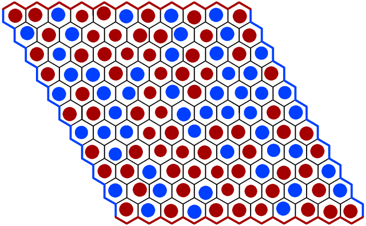
Mas o que garante que, independentemente da maneira com que os jogadores disponham suas peças, haja sempre um caminho de peças vermelhas conectando os lados superiores e inferiores do tabuleiro ou um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais?

Teorema do HEX [?]

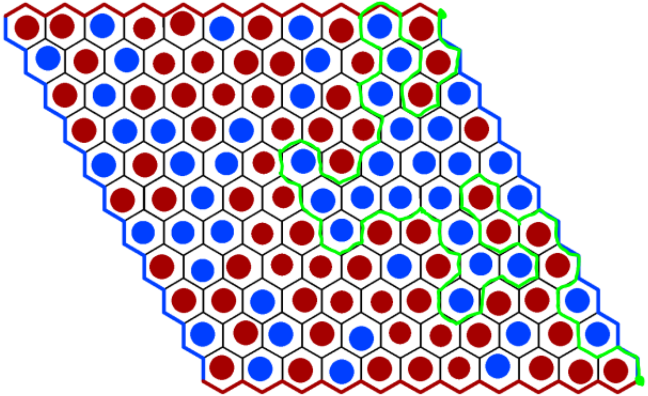
Suponha que o tabuleiro do jogo HEX esteja totalmente coberto por peças vermelhas e azuis (não necessariamente em mesma quantidade). Então, existe ou um caminho de peças vermelhas conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais.

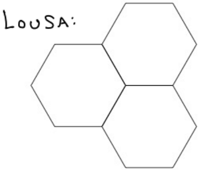
Demonstração do Teorema do Jogo HEX

Suponha que o tabuleiro do jogo HEX esteja totalmente preenchido por peças azuis e vermelhas. Atribua a cor vermelha aos lados superior e inferior do tabuleiro e a cor azul aos outros dois lados, como na figura a seguir:



Considere então o algoritmo que constrói um caminho entre as linhas do tabuleiro da seguinte maneira: inicie um caminho em dos quatro cantos do tabuleiro e prossiga caminhando por arestas que são fronteiras de duas casas com cores distintas.



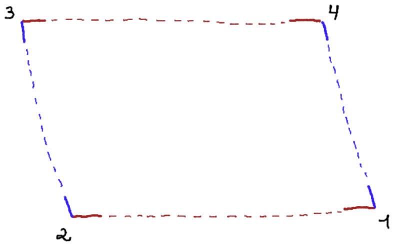


Pela lei que descreve esse algoritmo, podemos recursivamente verificar as seguintes propriedades:

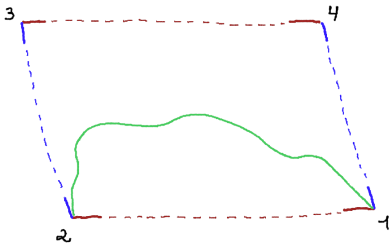
- O procedimento está bem definido, isto é, o caminho construído nunca chegará numa intersecção de três hexágonos de mesma cor.
- A menos que o caminho alcance um dos quatro extremos do tabuleiro, é sempre possível se deslocar para um nó que ainda não foi percorrido pelo algoritmo.
- À direita do caminho construido, sempre se encontra uma peça azul e, à sua esquerda, sempre se encontra uma peça vermelha.

Portanto, uma vez que o tabuleiro do jogo HEX é finito, esse algoritmo deve ser finalizado eventualmente, alcançando alguma outra extremidade do tabuleiro. Observe que a extremidade oposta à inicial não pode ser atingida, uma vez que o caminho construído sempre possui peças vermelhas à sua esquerda e peças azuis à sua direita.

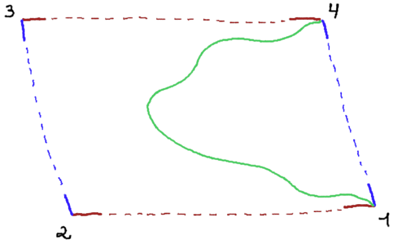
Suponha então que o caminho construído partiu da extremidade 1 e alcançou a extremidade 2. Observe então que esse caminho não pode alcançar o lado vermelho superior do tabuleiro, pois isso nos permitiria obter uma representação planar do grafo completo de cinco vértices.



Suponha então que o caminho construído partiu da extremidade 1 e alcançou a extremidade 2. Observe então que esse caminho não pode alcançar o lado vermelho superior do tabuleiro, pois isso nos permitiria obter uma representação planar do grafo completo de cinco vértices. Mas então, o caminho de peças azuis à direita do caminho configura um caminho que conecta as laterais esquerda e direita do tabuleiro.

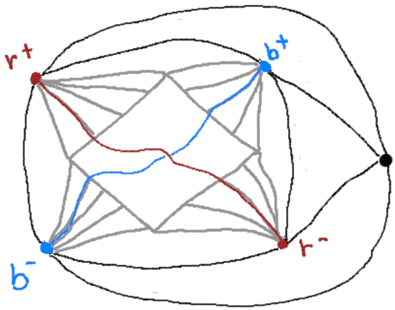


Analogamente, se o caminho construído pelo algoritmo parte da extremidade 1 e atinge a extremidade 4, então as peças vermelhas à esquerda desse caminho conectam os lados superior e inferior do tabuleiro.



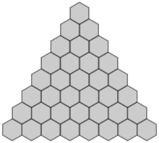
E isso verifica que há um caminho de peças vermelhas conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais.

Mostraremos agora que não deve haver um caminho vermelho que conecta a parte superior e a inferior do tabuleiro *juntamente* com um caminho azul que conecta as outras duas laterais. Por definição, esses dois caminhos não possuem vértices em comum. Porém, isso contradiz o fato de que um grafo completo de 5 vértices não admite uma representação planar. □

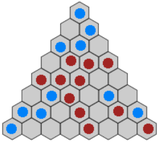


O Jogo Y

Similarmente ao jogo HEX, o jogo Y é jogado em um tabuleiro com casas hexagonais, mas de formato triangular.



Como antes, dois jogadores se alternam na disposição de peças vermelhas e azuis sobre o tabuleiro, mas agora ambos possuem o mesmo objetivo: construir uma coleção conexa de suas peças que alcançam os três lados do tabuleiro simultaneamente. Essa coleção de peças é designada por Y, justificando o nome do jogo. Na disposição a seguir, por exemplo, o jogador das peças vermelhas ganhou o jogo:



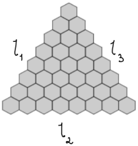
Novamente, podemos nos perguntar o que garante que, independentemente do modo como os jogadores disponham as peças no tabuleiro, existe ou um `Y` azul ou um `Y` vermelho caso todas as casas do tabuleiro estejam ocupadas. Uma das respostas possível é simples: isso é garantido pelo Teorema do `HEX`!

Teorema do Jogo `Y` [?]

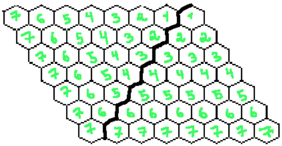
Se o tabuleiro do jogo `Y` estiver totalmente preenchido, existe ou um `Y` azul ou um `Y` vermelho.

Demonstração do Teorema do Jogo Y

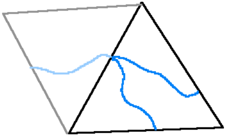
Denote por l_1, l_2 e l_3 os três lados do tabuleiro (colorido) do jogo Y, como a seguir:



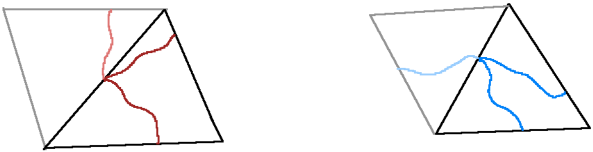
Observe que, ao refletirmos o tabuleiro do jogo Y com respeito ao lado l_1, obtemos um tabuleiro do Jogo HEX.



Assim, se supormos que o tabuleiro de `Y` está colorido e realizarmos essa reflexão repetindo a coloração, obteremos um tabuleiro do jogo `HEX` também colorido. Isso significa que existe um caminho vermelho conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho azul conectando as outras duas laterais. Mas então, pela forma com que a duplicação do tabuleiro `Y` foi feita, é possível encontrar um `Y` azul ou um `Y` vermelho.

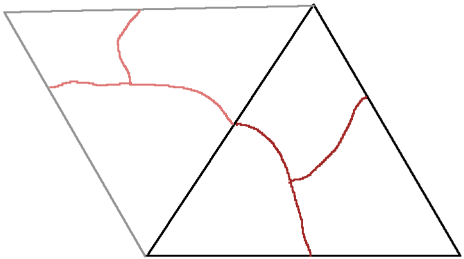


Assim, se supormos que o tabuleiro de Y está colorido e realizarmos essa reflexão repetindo a coloração, obteremos um tabuleiro do jogo HEX também colorido. Isso significa que existe um caminho vermelho conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho azul conectando as outras duas laterais. Mas então, pela forma com que a duplicação do tabuleiro Y foi feita, é possível encontrar um Y azul ou um Y vermelho.



Isso prova que alguém ganha o jogo Y.

Esse mesmo argumento verifica que não é possível haver dois `Y` de cores distintas, mesmo que o tabuleiro todo esteja colorido. Isso porque o reflexo de um `Y` na construção do tabuleiro `HEX` descrito anteriormente consiste em uma coleção conexa de peças que conecta os quatro lados do tabuleiro. □



Reciprocamente...

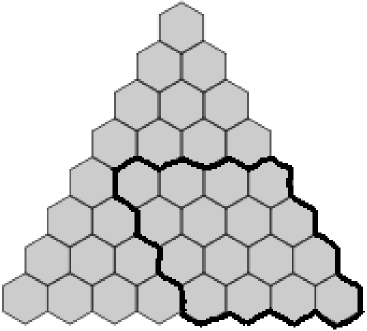
É interessante destacar também que, se não soubéssemos que o jogo `HEX` sempre termina sem empates, mas soubéssemos que o Teorema do Jogo `Y` é verdadeiro, poderíamos demonstrar o Teorema do Jogo `HEX`.

Teorema do Jogo `HEX` (Revisitado)

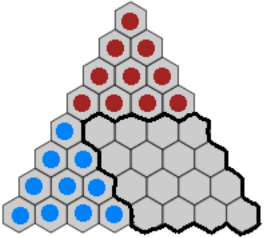
Suponha que o tabuleiro do jogo `HEX` esteja totalmente coberto por peças vermelhas e azuis (não necessariamente em mesma quantidade). Então, existe ou um caminho de peças vermelhas conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais.

Demonstração utilizando o jogo Y

Dado um tabuleiro do jogo HEX, é possível "completá-lo" de modo a obter um tabuleiro triangular do jogo Y.



Com isso, disponha peças azuis em todas as casas à esquerda do tabuleiro do jogo `HEX` e peças vermelhas em todas as casas acima.



Por hipótese, qualquer que seja a disposição de peças no tabuleiro do jogo `HEX`, haverá um `Y` azul ou um `Y` vermelho. No primeiro caso, obtemos um caminho de peças azuis que conectam as laterais do tabuleiro do jogo `HEX` e, no segundo caso, obtemos um caminho de peças vermlhas que conectam os lados superior e inferior desse tabuleiro.

Referências Bibliográficas: