

HEX e Y: dois jogos de conexão (que são equivalentes)

Lucas Silva Sinzato Real

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Combinando

18/03/2021

Parênteses: Grafos Planares

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é **planar** se seu conjunto de vértices pode ser encarado como pontos do plano \mathbb{R}^2 e suas arestas como curvas que os conectam, mas sem que haja intersecção entre arestas distintas.

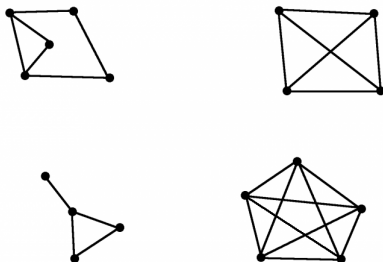
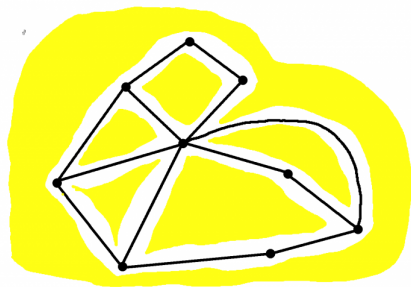


Figura: Três desses grafos são planares e um deles não é.

Se $G = (V, E)$ é um grafo planar, sua representação no plano na qual suas arestas não se intersectam é dita ser uma **representação planar**. Nessa representação, uma **face** consiste em um subconjunto maximal do plano cartesiano no qual, dados dois de seus pontos, existe uma curva ligando-os que não cruza com as demais arestas do grafo.



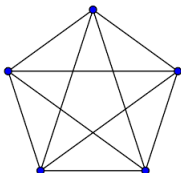
Considere $G = (V, E)$ um grafo planar conexo com finitos vértices e denote por n sua quantidade de vértices, q o número de arestas e r o número de faces. Por indução sobre q , mostraremos que

$$n - q + r = 2$$

Se $q = 0$, devemos ter $n = 1$ (pela conexidade do grafo) e $r = 1$, verificando a igualdade acima. Se $q > 0$, dois casos devem ser considerados:

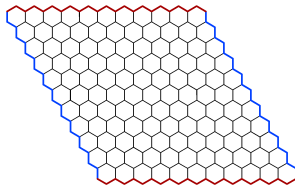
- Se G é uma árvore, então $q = n - 1$ e $r = 1$, também verificando a fórmula.
- Se G possui um circuito, remova uma de suas arestas. Pela hipótese de indução, se r' denota a quantidade de regiões do grafo com tal aresta removida, vale que $n - (q - 1) + r' = 2$. Com a adição da aresta removida, concluímos que $r = r' + 1$, verificando que $n - q + r = 2$.

Observe que, se $G = (V, E)$ é um grafo planar conexo com pelo menos três vértices e três arestas, então cada face é delimitada por, pelo menos, três arestas. Sejam n , q e r as quantidades de vértices, arestas e faces desse grafo, respectivamente. Como uma aresta é fronteira de duas faces, concluímos que $3r \leq 2q$. Com isso, aplicando a fórmula de Euler, vale que $3(2 - n + q) \leq 2q$, de onde concluímos que $q \leq 3n - 6$. Em particular, o grafo completo de cinco vértices não é planar.



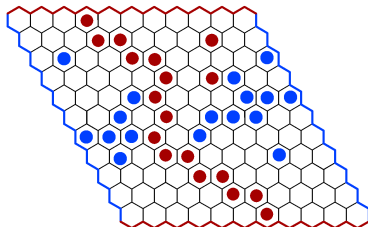
O Jogo Hex

O jogo HEX é jogado em um tabuleiro de quadro lados cujas casas são hexagonais.



Com isso, dois jogadores se alternam na disposição de peças **vermelhas** e **azuis** sobre as casas do tabuleiro. O jogador munido com as peças **vermelhas** deve dispor suas peças de modo a construir um caminho conectando os lados superior e inferior do tabuleiro, enquanto o jogador que controla as peças **azuis** deve construir com suas peças que conecte as suas laterais. Assim, vence o jogador que primeiro atingir seu objetivo.

No exemplo abaixo, o jogador **vermelho** conseguiu ganhar o jogo.



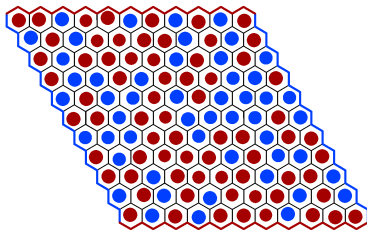
Mas o que garante que, independentemente da maneira com que os jogadores disponham suas peças, haja sempre um caminho de peças vermelhas conectando os lados superiores e inferiores do tabuleiro ou um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais?

Teorema do HEX [?]

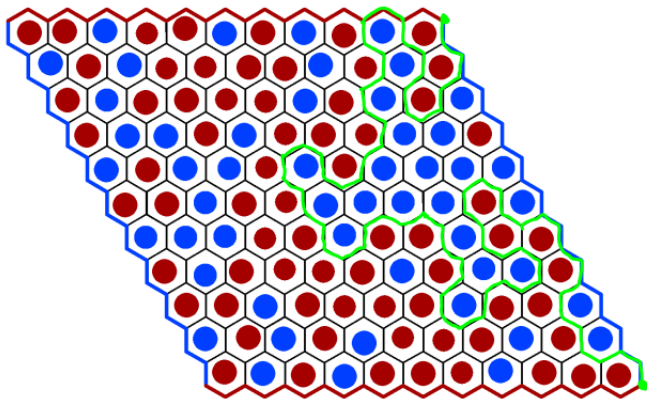
Suponha que o tabuleiro do jogo HEX esteja totalmente coberto por peças vermelhas e azuis (não necessariamente em mesma quantidade). Então, existe **ou** um caminho de peças vermelhas conectando os lados superior e inferior do tabuleiro **ou** um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais.

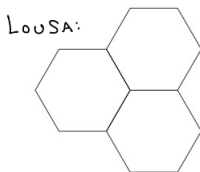
Demonstração do Teorema do Jogo HEX

Suponha que o tabuleiro do jogo HEX esteja totalmente preenchido por peças azuis e vermelhas. Atribua a cor **vermelha** aos lados superior e inferior do tabuleiro e a cor **azul** aos outros dois lados, como na figura a seguir:



Considere então o algoritmo que constrói um caminho entre as linhas do tabuleiro da seguinte maneira: inicie um caminho em dos quatro cantos do tabuleiro e prossiga caminhando por arestas que são fronteiras de duas casas com cores distintas.

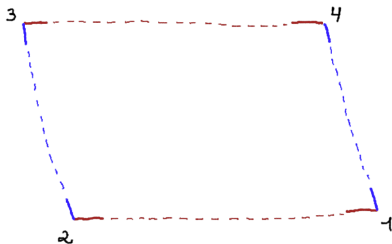




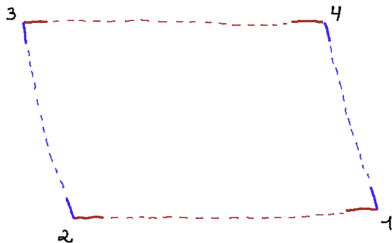
Pela lei que descreve esse algoritmo, podemos recursivamente verificar as seguintes propriedades:

- O procedimento está bem definido, isto é, o caminho construído nunca chegará numa intersecção de três hexágonos de mesma cor.
- A menos que o caminho alcance um dos quatro extremos do tabuleiro, é sempre possível se deslocar para um nó que ainda não foi percorrido pelo algoritmo.
- À direita do caminho construído, sempre se encontra uma peça azul e, à sua esquerda, sempre se encontra uma peça vermelha.

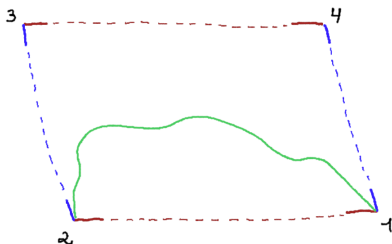
Portanto, uma vez que o tabuleiro do jogo HEX é finito, esse algoritmo deve ser finalizado eventualmente, alcançando alguma outra extremidade do tabuleiro. Observe que a extremidade oposta à inicial não pode ser atingida, uma vez que o caminho construído sempre possui peças vermelhas à sua esquerda e peças azuis à sua direita.



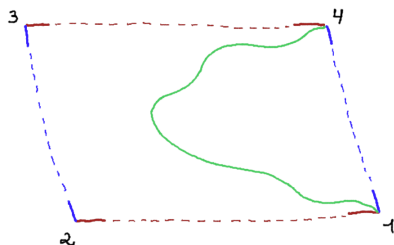
Suponha então que o caminho construído partiu da extremidade 1 e alcançou a extremidade 2. Observe então que esse caminho não pode alcançar o lado vermelho superior do tabuleiro, pois isso nos permitiria obter uma representação planar do grafo completo de cinco vértices.



Suponha então que o caminho construído partiu da extremidade 1 e alcançou a extremidade 2. Observe então que esse caminho não pode alcançar o lado vermelho superior do tabuleiro, pois isso nos permitiria obter uma representação planar do grafo completo de cinco vértices. Mas então, o caminho de peças azuis à direita do caminho configura um caminho que conecta as laterais esquerda e direita do tabuleiro.

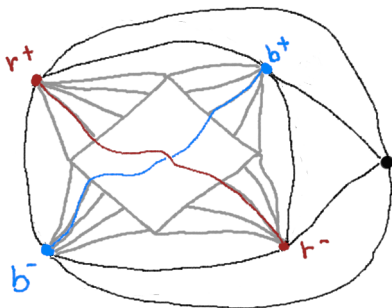


Analogamente, se o caminho construído pelo algoritmo parte da extremidade 1 e atinge a extremidade 4, então as peças **vermelhas** à esquerda desse caminho conectam os lados superior e inferior do tabuleiro.



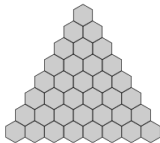
E isso verifica que há um caminho de peças vermelhas conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais.

Mostraremos agora que não deve haver um caminho vermelho que conecta a parte superior e a inferior do tabuleiro *juntamente* com um caminho azul que conecta as outras duas laterais. Por definição, esses dois caminhos não possuem vértices em comum. Porém, isso contradiz o fato de que um grafo completo de 5 vértices não admite uma representação planar. \square

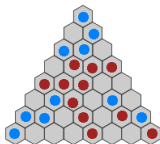


O Jogo Y

Similarmente ao jogo HEX, o jogo Y é jogado em um tabuleiro com casas hexagonais, mas de formato triangular.



Como antes, dois jogadores se alternam na disposição de peças **vermelhas** e **azuis** sobre o tabuleiro, mas agora ambos possuem o mesmo objetivo: construir uma coleção conexa de suas peças que alcançam os três lados do tabuleiro simultaneamente. Essa coleção de peças é designada por Y, justificando o nome do jogo. Na disposição a seguir, por exemplo, o jogador das peças **vermelhas** ganhou o jogo:

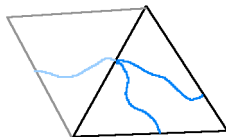


Novamente, podemos nos perguntar o que garante que, independentemente do modo como os jogadores disponham as peças no tabuleiro, existe ou um Y azul ou um Y vermelho caso todas as casas do tabuleiro estejam ocupadas. Uma das respostas possível é simples: isso é garantido pelo Teorema do HEX!

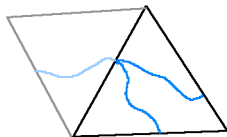
Teorema do Jogo Y [?]

Se o tabuleiro do jogo Y estiver totalmente preenchido, existe ou um Y azul ou um Y vermelho.

Assim, se supormos que o tabuleiro de Y está colorido e realizarmos essa reflexão repetindo a coloração, obteremos um tabuleiro do jogo HEX também colorido. Isso significa que existe um caminho vermelho conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho azul conectando as outras duas laterais. Mas então, pela forma com que a duplicação do tabuleiro Y foi feita, é possível encontrar um Y azul ou um Y vermelho.

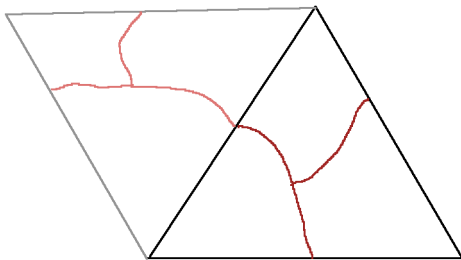


Assim, se supormos que o tabuleiro de Y está colorido e realizarmos essa reflexão repetindo a coloração, obteremos um tabuleiro do jogo HEX também colorido. Isso significa que existe um caminho vermelho conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho azul conectando as outras duas laterais. Mas então, pela forma com que a duplicação do tabuleiro Y foi feita, é possível encontrar um Y azul ou um Y vermelho.



Isso prova que alguém ganha o jogo Y.

Esse mesmo argumento verifica que não é possível haver dois Y de cores distintas, mesmo que o tabuleiro todo esteja colorido. Isso porque o reflexo de um Y na construção do tabuleiro HEX descrito anteriormente consiste em uma coleção conexa de peças que conecta os quatro lados do tabuleiro. \square



Reciprocamente...

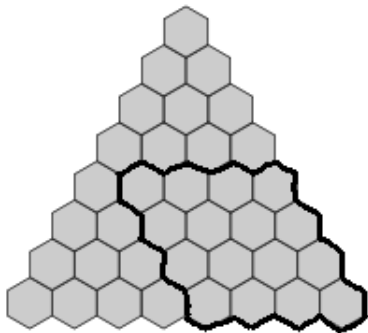
É interessante destacar também que, se não soubéssemos que o jogo HEX sempre termina sem empates, mas soubéssemos que o Teorema do Jogo Y é verdadeiro, poderíamos demonstrar o Teorema do Jogo HEX.

Teorema do Jogo HEX (Revisitado)

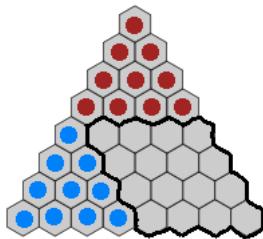
Suponha que o tabuleiro do jogo HEX esteja totalmente coberto por peças vermelhas e azuis (não necessariamente em mesma quantidade). Então, existe ou um caminho de peças vermelhas conectando os lados superior e inferior do tabuleiro ou um caminho de peças azuis conectando as outras duas laterais.

Demonstração utilizando o jogo Y

Dado um tabuleiro do jogo HEX, é possível “completá-lo” de modo a obter um tabuleiro triangular do jogo Y.



Com isso, disponha peças **azuis** em todas as casas à esquerda do tabuleiro do jogo HEX e peças **vermelhas** em todas as casas acima.



Por hipótese, qualquer que seja a disposição de peças no tabuleiro do jogo HEX, haverá um Y azul ou um Y vermelho. No primeiro caso, obtemos um caminho de peças azuis que conectam as laterais do tabuleiro do jogo HEX e, no segundo caso, obtemos um caminho de peças vermelhas que conectam os lados superior e inferior desse tabuleiro.

Referências Bibliográficas: