

Emaranhados

Violeta Mar

A teoria de emaranhados (*tangles*, em inglês) nasce na teoria de conectividade de grafos finitos. Aqui apresentamos uma versão ‘conjuntista’ dela, vinda da versão simplificada apresentada por Diestel em seu livro cujo objetivo era aplicações em inteligência artificial. [1]

Definição (Emaranhados e consistência). Seja V um conjunto, e $S \subset \mathcal{P}(V)$ um subconjunto fechado para complementar. Uma função $\tau : S \rightarrow \{0, 1\}$ é dita um *emaranhado* se satisfaz

- $\tau(A) = 1$ ou $\tau(\neg A) = 1$ para qualquer $A \in S$
- *consistência*: dados quaisquer $A, B, C \in S$, se a interseção destes três é vazia, então pelo menos um dos $\tau(A), \tau(B), \tau(C)$ é 0.

Vamos dizer que τ escolhe um A se $\tau(A) = 1$. Veja que consistência implica que τ sempre escolhe apenas um dentre A e seu complementar $\neg A$.

Esta definição pode lembrar a definição de ultrafiltros para álgebras de Boole. De fato, se S é uma álgebra de Boole, emaranhados são apenas ultrafiltros.

Proposição 1 (Emaranhados são ultrafiltros quando S é de Boole). Suponha que S seja fechado para união e interseção, ou seja, S forma uma álgebra de Boole (ou corpo de conjuntos). Então $\tau : S \rightarrow \{0, 1\}$ é um emaranhado se e somente se é um homomorfismo de álgebras de Boole, ou seja, um ultrafiltro.

Demonstração: Se τ é homomorfismo, então $\tau(A \cap B \cap C) = 0$ quando $A \cap B \cap C = \emptyset$, logo $\tau(A)\tau(B)\tau(C) = 0$, que só pode acontecer se pelo menos um destes valores é 0.

Reciprocamente, dado um emaranhado τ e dois elementos $A, B \in S$, considere os quatro casos de valores para $\tau(A)$ e $\tau(B)$. Faremos o primeiro: suponha $\tau(A) = \tau(B) = 1$. Como a interseção de A, B e $\neg(A \cap B)$ é vazia, devemos ter $\tau(\neg(A \cap B)) = 0$ e portanto $\tau(A \cap B) = 1 = \tau(A)\tau(B)$. Como a interseção de $A \cap B$ e $\neg A \cap \neg B$ é vazia, então $\tau(\neg A \cap \neg B) = 0$. Mas $\neg(\neg A \cap \neg B) = A \cup B$ e logo $\tau(A \cup B) = 1 = \tau(A) + \tau(B)$. Fazemos contas análogas para cada um dos outros três casos e concluímos que τ é homomorfismo. $\square$

Vamos deixar essa prova um pouco mais clara introduzindo alguns conceitos a mais.

Definição (Cantos e comparabilidade). Dados dois conjuntos $A, B \in S$, chamamos os quatro conjuntos $A \cap B, A \cap \neg B, \neg A \cap B, \neg A \cap \neg B$ de cantos do par A, B . Dizemos que A e B são comparáveis se pelo menos um destes conjuntos é vazio, caso contrário dizemos que são incomparáveis.

Veja que A é comparável a B exatamente quando pelo menos uma das inclusões $A \subset B, A \subset \neg B, \neg A \subset B, \neg A \subset \neg B$ é verdadeira. Ou seja, A e B são incomparáveis quando $\{A, B, \neg A, \neg B\}$ é um conjunto de elementos que são incomparáveis em relação a ordem dada pela inclusão.

O valor de τ dos quatro cantos é inteiramente determinado pelo valor de τ em A e em B - é isto que essencialmente mostramos nos quatro casos da demonstração da Proposição 1.

Os cantos de um par de conjuntos em S podem não estar presentes em S . Dado um $S \subset \mathcal{P}(V)$ fechado pra complementar, dizer que todos os cantos de S sempre estão em S é equivalente a dizer que S é uma álgebra de Boole. Na teoria de emaranhados, uma versão mais fraca vai ser suficiente para estabelecermos os resultados legais que buscamos.

Definição (Álgebras sub-Boole). Um subconjunto $S \subset \mathcal{P}(V)$ é dito sub-Boole (ou, na terminologia do Diestel, um conjunto submodular) se é fechado por complementar e dados quaisquer dois $A, B \in S$ temos que $A \cup B \in S$ ou $A \cap B \in S$.

Temos dois pares de cantos que dizemos *opostos*: $A \cap B$ e $\neg A \cap \neg B$; $\neg A \cap B$ e $A \cap \neg B$. Dado um $S \subset \mathcal{P}(V)$ fechado pra complementar, dizer que dentre dois cantos opostos, pelo menos um está em S é equivalente a dizer que S é sub-Boole.

Adicionando cantos, então, sempre conseguimos estender um dado S para um $\tilde{S}$ que seja um sub-Boole ou uma de fato álgebra de Boole. Porém, um emaranhado τ de S não necessariamente se estende para um emaranhado $\tilde{\tau}$ em $\tilde{S}$: veja, na definição, pedimos apenas que triplas de conjuntos com interseção vazia devem ter pelo menos um de seus conjuntos não escolhidos por τ . Ao adicionarmos cantos ao S , não só triplas mas agora interseções de possivelmente até 6 conjuntos devem ser consistentes para que tenhamos um emaranhado. Nem todo emaranhado vai ter esse nível mais alto de consistência. Por exemplo...

Exemplo (Emaranhado não estendível). Seja $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 4\}$, $D = \{1, 2, 3\}$. Faça $S = \{A, B, C, D, \neg A, \neg B, \neg C, \neg D\}$. Então, a função τ que atribui 1 a todos os A, B, C, D e 0 a seus complementares é um emaranhado. Mas, se adicionarmos apenas o canto $A \cap B$ a S , já não podemos estender τ para um $\tilde{\tau}$. Pois, se pudessemos, o valor de $\tilde{\tau}$ em $A \cap B$ deveria ser 1, porém $(A \cap B) \cap C \cap D$ é vazio, e nenhum dos três $\tilde{\tau}(A \cap B)$, $\tilde{\tau}(C)$, $\tilde{\tau}(D)$ é 0.

É claro, como o valor de um emaranhado τ em qualquer um dos quatro cantos de A, B é determinado pelos valores de τ em A e B , se existir uma extensão $\tilde{\tau}$ para $\tilde{S}$ então ela deve ser única.

Continuando a introdução dos conceitos necessários para chegarmos ao nosso principal teorema, o teorema das árvores de emaranhados, trazemos agora os conjuntos árvore.

Definição (Encaixados, conjunto árvore). Dizemos que dois conjuntos $A, B \subset V$ estão encaixados se ou A é comparável com B em relação a inclusão (isto é, $A \subset B$ ou $B \subset A$) ou então $\neg A$ é comparável com B (isto é, $\neg A \subset B$ ou $B \subset \neg A$).

Um $S \subset \mathcal{P}(V)$, fechado para complementar e que não contém o vazio, é dito um conjunto árvore se quaisquer dois $A, B \in S$ (que não sejam complementares um do outro) estão encaixados.

Lembrando que estamos sempre conceitualizando um $A \subset V$ como uma partição de V em dois pedaços: A e seu complementar $\neg A$.

Vamos entender o que tem de árvore em conjuntos árvore. Primeiramente, toda árvore define um conjunto árvore.

Proposição 2 (Conjunto árvore da árvore). Seja T uma árvore (um grafo simples sem ciclos). Defina $S(T) = \{A \subset V(T) \mid \text{existe uma única aresta entre } A \text{ e } \neg A\}$. Então S é um conjunto árvore.

Demonstração: Veja que cada aresta e de T define um $A \in S(T)$, tomando A como uma das duas componentes conexas de $T \setminus e$, sendo a outra $\neg A$. E, por outro lado, dado um $A \in S(T)$, se tomarmos e como a aresta que liga A a seu complementar, então A é uma das componentes conexas de $G \setminus e$. Sabendo isso, vamos agora mostrar que $S(T)$ é um conjunto árvore. Tome dois $A, B \in S(T)$ não complementares, e seja e, f suas arestas correspondentes. f deve ligar dois vértices de uma das componentes conexas de $G \setminus e$, ou seja, f é uma aresta do grafo induzido por A ou uma aresta do grafo induzido por $\neg A$. Digamos que f é uma aresta de vértices em A . Então, ao retirarmos f , $\neg A$ continua conexo. Logo $\neg A$ será um subconjunto de uma das componentes conexas de $G \setminus F$, isto é, de B ou $\neg B$. Igualmente, se f é uma aresta de vértices em $\neg A$, então teríamos que A é subconjunto de B ou $\neg B$. Concluimos que $S(T)$ é um conjunto árvore. $\square$

Proposição 3 (Emaranhados de árvores são principais e recuperam a árvore). Seja T uma árvore, e $S(T)$ seu conjunto árvore. Todos os emaranhados de $S(T)$ são da forma τ_v para um $v \in V(T)$, onde $\tau_v(A) = 1 \Leftrightarrow v \in A$. E mais: dois vértices $v, w \in T$ são adjacentes se e somente se seus emaranhados τ_v e τ_w são distintos em apenas um $A \in S(T)$.

Demonstração: Enumere as arestas de T como $\{e_1, \dots, e_k\}$. Lembre-se da descrição na demonstração anterior de $S(T)$ via as componentes conexas de cortes da árvore. Dentre as duas

componentes conexas de $T \setminus e_1$, τ seleciona uma delas, digamos C_1 . Para quaisquer outras arestas $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ na outra componente conexa, $\neg C_1$, a consistência de τ implica que ela selecionará componentes conexas $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_m}\}$ que vão conter C_1 . Logo $C_1 \cap C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_m} = C_1$. Se C_1 já é um conjunto contendo apenas um vértice v , então esta última interseção é a interseção de todos os conjuntos selecionados por τ , e portanto τ será o τ_v deste v . Caso contrário, devemos ter pelo menos uma aresta e_j entre vértices de C_1 . Seja C_j a componente conexa escolhida por τ de $T \setminus e_j$. Olhando agora apenas ao C_1 , ao retirarmos e_j iremos ficar com duas componentes conexas, ambas não vazias: $C_1 \cap C_j$ e $C_1 \cap \neg C_j$. Se $C_1 \cap C_j$ conter apenas um vértice, então τ é o principal em relação a este vértice. Caso contrário, ela deve conter alguma aresta, e assim poderíamos continuar este processo, encontrando a componente conexa escolhida por τ na retirada dessa aresta, e interceptando-a com C_1 e C_j . Como existem apenas finitas arestas, em algum momento esta interseção deve conter apenas um vértice, que será o v tal que $\tau = \tau_v$.

Agora, se dois vértices $v, w \in T$ são adjacentes, digamos pela aresta e_i , então com certeza v e w estão em componentes conexas diferentes ao remover e_i , assim τ_v e τ_w diferem no corte relativo a esta aresta. E, na retirada de qualquer outra aresta e_j , a e_i se mantém, logo os vértices estarão na mesma componente conexa e portanto τ_v e τ_w concordaram no corte relativo a e_j . Já se eles não forem adjacentes, deve haver um caminho entre eles contendo no mínimo duas arestas. A retirada de ambas estas arestas coloca os vértices em componentes conexas diferentes, e portanto τ_v e τ_w diferem em pelo menos dois valores (de fato, a quantidade de diferenças é exatamente o número de arestas do caminho entre os vértices, recuperando a métrica da árvore). $\square$

Vamos agora mostrar que todo conjunto árvore finito vem de uma árvore por esta construção. Já podemos ter uma ideia de como isso se dá pensando em como a última proposição sugere que os emaranhados do $S(T)$ recuperam a estrutura da árvore. Se estamos de posse de seu $S(T)$, poderíamos reconstruir a árvore T tomando como conjunto de vértices os emaranhados de $S(T)$ e ligando eles entre si quando diferem em apenas um valor. Este seria um caminho pra construir a árvore a partir de um S qualquer. Não vamos fazer isso. Vamos construir uma árvore explicitamente em um processo indutivo (porque essa foi a primeira ideia que eu tive).

Proposição 4 (Árvore do conjunto árvore). Todo conjunto árvore finito S é isomorfo a um $S(T)$ para uma única árvore (aqui estamos tomando isomorfismo por significar uma bijeção entre conjuntos que preserva inclusão).

Demonstração: Vamos construir uma árvore T para um dado S conjunto árvore finito de forma que $S \cong S(T)$. Tome alguma ordenação $S = \{A_1, \neg A_1, A_2, \neg A_2, \dots, A_n, \neg A_n\}$. Comece a árvore T por uma árvore T_1 composta por dois vértices e_1^- e e_1^+ e uma aresta direcionada de e_1^- para e_1^+ que nomearemos por e_1 . Para um $i < n$, seja $S_i = \{A_1, \neg A_1, A_2, \neg A_2, \dots, A_i, \neg A_i\}$. Suponha que já construímos uma árvore T_i que satisfaz

- T_i possui i arestas direcionadas $\{e_1, \dots, e_i\}$
- $S_i \cong S(T_i) = \{\tilde{A}_1, \neg \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \neg \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_i, \neg \tilde{A}_i\}$, onde cada $\tilde{A}_j$ é a imagem do A_j de S_i

→ $\tilde{A}_j$ é a componente conexa que contém o e_j^+ , e portanto $\neg\tilde{A}_j$ é a componente conexa que contém o e_j^-

Já temos T_1 satisfazendo essas condições. Continuando o processo indutivo, vamos agora adicionar uma aresta no lugar certo de T_i para construir T_{i+1} . Para isso, veja que o elemento A_{i+1} define um emaranhado τ_{i+1} de S_i da seguinte maneira.

$$\tau_{i+1}(A_j) = 1 \text{ se } A_{i+1} \subset A_j \text{ ou } \neg A_{i+1} \subset A_j$$

$$\tau_{i+1}(\neg A_j) = 1 \text{ se } A_{i+1} \subset \neg A_j \text{ ou } \neg A_{i+1} \subset \neg A_j$$

Como S é conjunto árvore, um (e apenas um) destes dois casos deve ocorrer, dando uma função τ_{i+1} bem definida. Resta mostrar consistência dela. Faça essa conta.

Temos então um emaranhado τ_{i+1} de S_i , que naturalmente define um emaranhado $\tilde{\tau}_{i+1}$ de $S(T_i)$. Pela proposição anterior, sabemos que τ_{i+1} é principal, ou seja, existe um vértice $v \in T_i$ tal que $\tilde{\tau}_{i+1}(A) = 1 \Leftrightarrow v \in A$. Sejam $\{e_{k_1}, \dots, e_{k_m}\}$ as arestas adjacentes a v . “Abra” o vértice v em dois vértices e_{i+1}^- e e_{i+1}^+ e uma aresta direcionada e_{i+1} de e_{i+1}^- para e_{i+1}^+ . Para cada k dentre os $k_1, \dots, k_m$, faça:

- se $A_{i+1} \subset A_k$, coloque o e_k apontando para e_{i+1}^-
- se $\neg A_{i+1} \subset A_k$, coloque o e_k apontando para e_{i+1}^+
- se $A_{i+1} \subset \neg A_k$, coloque o e_k saindo de e_{i+1}^-
- se $\neg A_{i+1} \subset \neg A_k$, coloque o e_k saindo de e_{i+1}^+

Assim temos nossa nova T_{i+1} , e seja $S(T_i) = \{\tilde{A}_1, \neg\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \neg\tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_{i+1}, \neg\tilde{A}_{i+1}\}$ - veja que aqui estamos cometendo um abuso de notação, repetindo os mesmos nomes $\tilde{A}_j$ que antes eram as partições da árvore anterior $S(T_i)$. Isto não é grande problema: a única diferença entre estes conjuntos é que o elemento v é substituído por dois elementos e_{i+1}^- e e_{i+1}^+ . Precisamos nos convencer que $S_{i+1} \cong S(T_{i+1})$. As relações entre os novos $\tilde{A}_j$ para $j < i + 1$ não mudam, pois apenas temos a troca de v por e_{i+1}^- e e_{i+1}^+ em todos os conjuntos. Basta mostrar, então, que $\tilde{A}_{i+1}$ é encaixado com cada $\tilde{A}_j$ da mesma maneira que A_{i+1} é encaixado com cada A_j . Tome um $j < i + 1$ e vamos fazer o caso $A_{i+1} \subset A_j$ - os outros três são análogos.

Se a aresta e_j referente ao $\tilde{A}_j$ em T_i era adjacente a v , então por construção e_j aponta para e_{i+1}^- . Assim, o único caminho de e_{i+1}^+ para e_j^+ é a aresta e_{i+1} . Logo, qualquer caminho da componente conexa $\tilde{A}_{i+1}$ de $T_{i+1} \setminus e_{i+1}$ não passa pela aresta e_k , o que nos permite concluir que $\tilde{A}_{i+1} \subset \tilde{A}_k$.

Já se e_j não for adjacente a v , deve existir algum caminho de e_j^+ até v . Este caminho, ao final, chega em alguma aresta e_k adjacente a v . Gostaríamos que e_k fosse colocada em e_{i+1}^- na construção do T_{i+1} , pois se isso acontece, então o único caminho de e_{i+1}^+ até a aresta e_j passa por e_{i+1} e aí conseguiríamos concluir que $\tilde{A}_{i+1} \subset \tilde{A}_j$. Suponha, então, que e_k não é colocada em e_{i+1}^- na construção do T_{i+1} , e sim colocada em e_{i+1}^+ . Isto só ocorre se temos que $\neg A_{i+1}$ é subconjunto de A_k ou de $\neg A_k$. Se $\neg A_{i+1} \subset A_k$, então e_k aponta na direção de e_{i+1}^+ . Assim, a componente conexa da ponta e_k^+ deve ser a que não contém a aresta e_j e portanto $A_k \subset A_j$. Mas daí teríamos $\neg A_{i+1} \subset A_k \subset A_j$ o que contradiz $A_{i+1} \subset A_j$. Já se $\neg A_{i+1} \subset \neg A_k$, então e_k aponta na direção oposta de e_{i+1}^+ . Mas daí teríamos $A_k \subset \neg A_{i+1} \subset A_j$ e também teríamos que e_j^- possui um caminho até e_k^+ que não passa por k , ou seja, $e_j^- \in A_k \subset A_j$, contradição.

Concluimos que e_k realmente é colocada em e_{i+1}^- e assim chegamos a $\tilde{A}_{i+1} \subset \tilde{A}_j$, finalizando nossa demonstração.

Na verdade, resta provar a unicidade: se começarmos com um $S = S(T)$ para alguma árvore T , a árvore construída pelo algoritmo anterior é isomorfa a T . A demonstração disso segue facilmente se entendemos como os emaranhados de uma árvore finita recuperam a sua estrutura, como descrito na proposição anterior. De fato, suponha que $S(T_1) \cong S(T_2)$. Dado um vértice $v \in T_1$, seu emaranhado τ_v irá definir um emaranhado em $S(T_2)$, que também deverá ser principal, digamos referente ao vértice v' . Mapeie $\varphi : v \mapsto v'$. Como também todo vértice de T_2 define um emaranhado que pode ser traduzido para um emaranhado de T_1 , temos que φ é bijetora. Ela será um morfismo de grafos, isto é, $v - w \Leftrightarrow \varphi(v) - \varphi(w)$, pois adjacência de dois vértices acontece se e somente se seus emaranhados diferem por apenas um vértice, como descrito na proposição anterior.

□

A noção de principalidade é muito dependente do conjunto base V . No isomorfismo que construímos agora $S \cong S(T)$, os emaranhados de S podem estar em bijeção com os de $S(T)$, mas não necessariamente são principais como serão em $S(T)$. Isto acontece pois a interseção de todos os seus conjuntos selecionados pode ser vazia.

Exemplo (Buraco negro). Voltando ao exemplo anterior de um emaranhado não estendível. Temos $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{A, B, C, D, \neg A, \neg B, \neg C, \neg D\}$ onde $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, $C = \{1, 2, 4\}$, $D = \{1, 2, 3\}$. Veja que a árvore construído pelo algoritmo anterior é a estrela com todas as arestas apontadas para o vértice central. Temos então 5 emaranhados nesta árvore, todos principais em $S(T)$, mas o relativo ao vértice central não é principal em S . Sua interseção de todos os conjuntos escolhidos é vazia (buraco negro).

Exemplo (Visualização). Dado um conjunto árvore $S(T)$, podemos desenhar o V em formato da árvore T com as separações de $S(T)$ explicitadas.

Até agora, estivemos considerando um conjunto S qualquer de subconjuntos de um dado V . Para aplicarmos esta teoria em grafos, vamos especificar estes conjuntos.

Definição (Separações finitas e sua álgebra). Dado um grafo G , definimos sua álgebra de separações finitas como sendo $\mathcal{S}(G) := \{E \subset E(G) \mid V(E) \cap V(\neg E) \text{ é finito}\}$. Um elemento de $\mathcal{S}$ junto com seu complementar é chamado de separação, e sua ordem é o número $|V(E) \cap V(\neg E)|$. Separações de ordem k são chamadas de k -separações, e as coletamos nos conjuntos $S_k(G) := \{E \subset E(G) \mid |V(E) \cap V(\neg E)| = k\}$ para cada k natural.

Chamamos $\mathcal{S}(G)$ de uma álgebra pois ela, de fato, forma sempre uma álgebra de Boole, o que não acontece necessariamente com os S_k .

Conjuntos árvore de $S(G)$ nos permitem encontrar uma estrutura de árvore escondida dentro do nosso grafo. Na literatura, isto foi originalmente feito através da definição de decomposição em árvores. Relembrando:

Definição (Decomposição em árvore). Uma decomposição em árvore de um grafo G é uma árvore T e uma função f que, dada um $t \in V(T)$, te retorna um subgrafo de G , satisfazendo as condições

$$\rightarrow \bigcup_{t \in V(T)} f(t) = G$$

$$\rightarrow \text{se } t \text{ é um vértice no caminho entre } t_1 \text{ e } t_2, \text{ então } f(t_1) \cap f(t_2) \subset f(t)$$

Se para cada aresta $e \in T$ entre dois vértices t_1 e t_2 tivermos que $f(t_1) \cap f(t_2)$ é finito, dizemos que a decomposição tem adesão finita.

E então

Proposição 5 (Conjuntos árvore de separações induzem uma decomposição em árvore). Seja G grafo conexo. Se existe um conjunto árvore $S \subset S(G)$ tal que sua árvore correspondente é T (isto é, $S \cong S(T)$), então existe uma decomposição em árvore de G cuja árvore é T .

Demonstração: Para cada vértice t de T , podemos definir o emaranhado principal τ_t em $S(T)$, que através do isomorfismo $S \cong S(T)$ induz um emaranhado $\tilde{\tau}_t$ em S . Defina $f(t) = \bigcap_{E \in S, \tilde{\tau}_t(E)=1} V(E)$.

Como G é conexo, pra qualquer vértice v existe uma aresta e adjacente a v . Esta aresta define um emaranhado principal $\tilde{\tau}$ em S , que pelo isomorfismo $S \cong S(T)$ induz um emaranhado τ em $S(T)$. Como todo emaranhado de $S(T)$ é principal, devemos ter $\tau = \tau_t$ para algum $t \in T$. Assim, ao construir $f(t)$, a interseção é tomada em todos os $E \in S$ tal que $\tilde{\tau}$ vale 1, ou seja, todos conjuntos que contém e . Logo $v \in V(E)$ para todos estes, ou seja, $v \in f(t)$. Isto mostra que $\bigcup_{t \in V(T)} f(t) = G$.

Para a segunda condição, suponha que t está entre t_1 e t_2 . Dado uma aresta e de T , uma componente conexa de $T \setminus e$ que não contenha nem o t_1 nem o t_2 não pode também conter o t . Assim, se $E \in S(T)$ é tal que $\tau_t(E) = 1$ então $\tau_{t_1}(E) = 1$ ou $\tau_{t_2}(E) = 1$. Essa propriedade se mantém verdade após passarmos o isomorfismo e obtermos os $\tilde{\tau}_t, \tilde{\tau}_{t_1}, \tilde{\tau}_{t_2}$. Assim, como $f(t_1) \cap f(t_2)$ é a interseção de todos os $V(E)$ tal que $\tau_{t_1}(E) = 1$ ou $\tau_{t_2}(E) = 1$, podemos concluir que $f(t_1) \cap f(t_2) \subset f(t)$.

Um detalhe: quando t_1 é adjacente a t_2 , vamos ter a igualdade $f(t_1) \cap f(t_2) = V(E) \cap V(\neg E)$, onde E é o conjunto de S referente ao elemento de $S(T)$ da aresta entre t_1 e t_2 (preguicinha de escrever, mas isto segue do fato de que sempre que um E' diferente de E é um dos conjuntos contados na interseção $f(t_1) \cap f(t_2)$, então teremos $E \subset E'$ ou $\neg E \subset E'$, estamos aqui só trazendo as propriedades de separação de uma árvore de volta pro S). Assim, o fato de S ser composto de separações finitas implica que a decomposição tem adesão finita.

□

A recíproca dessa proposição é aproximadamente verdade: toda decomposição em árvore induz naturalmente um conjunto de separações que será um conjunto árvore (se ele não for trivial). O final da demonstração anterior, e a própria definição de adesão finita, já sugere quem são as separações: os conjuntos $f(t_1) \cap f(t_2)$ vão ser vértices que, ao retirados, separam o grafo. Os dois lados da separação do grafo vem dos dois lados da separação da árvore: se chamarmos de A_1 e A_2 as duas componentes conexas de $T \setminus e$ onde e é a aresta entre t_1 e t_2 , então a união de todas as bags $f(t)$ com $t \in A_1$ e a união de todas as bags $f(t)$ com $t \in A_2$ são separados pelo conjunto $f(t_1) \cap f(t_2)$ (isto não é muito difícil de provar, segue diretamente da definição de decomposição). O fato de separações de árvores serem encaixadas permite então provar que estas separações em G também são encaixadas, obtendo, então, um conjunto árvore. Porém, esta decomposição pode ser ‘degenerada’ de forma que a árvore desse conjunto árvore pode não ser a mesma que a da decomposição. O exemplo mais simples disso é a decomposição trivial, que escolhe G para qualquer vértice da árvore. Podemos fazer isso para qualquer árvore, mas o conjunto de separações é sempre o trivial (que, formalmente, nem consideramos como conjunto árvore em nossa definição). Também poderíamos simplesmente adicionar uma aresta a mais em algum t da árvore da decomposição, e repetir o $f(t)$ como o subgrafo do novo vértice adjacente a t . O conjunto de separações se manterá, mas a árvore muda. Acredito que deve haver alguma condição natural a se pedir da decomposição para que isto não ocorra e assim obtermos uma bijeção entre conjuntos árvores de separações e decomposições em árvore. O Diestel provavelmente já fez isso aqui [2], mas eu não li direito. A definição original de decomposição em árvores, em [3], pede que os vértices de $f(t_1) \cap f(t_2)$ não possuem arestas entre si, mas acho que isso não é suficiente.

De qualquer forma, seguimos.

Uma última definição antes de afirmarmos nosso principal teorema.

Definição (Exibição de emaranhados). Dizemos que um $S' \subset S \subset \mathcal{P}(V)$ exibe um conjunto de emaranhados $\mathcal{E}$ se para quaisquer dois $\tau, \tau' \in \mathcal{E}$, existe um $A \in S'$ tal que $\tau(A) \neq \tau'(A)$.

Teorema 1 (Teorema da Árvores de Emaranhados - finito). Seja V finito. Em qualquer $S \subset \mathcal{P}(V)$ sub-Boole existe um conjunto árvore $N \subset S$ que exibe todos os emaranhados de S .

Demonstração: Vamos apresentar um algoritmo que constrói o N . Suponha que já construímos um conjunto árvore N que diferencia um conjunto O de $n - 1$ emaranhados de S , e ainda resta mais emaranhados para diferenciar. Escolha um emaranhado τ que N não diferencia. Deve, então, existir algum outro $\tau' \in O$ que concorda com τ em todos os elementos de N . Qualquer outro $\tau'' \in O$ é diferenciado de τ' em algum elemento de N por suposição, então é diferenciado de τ também. Ou seja, o único par que precisamos consertar é o τ e τ' . Para isso, adicione a N algum elemento $A \in S$ em que τ e τ' diferem - que, é claro, existe, pois τ e τ' são dois emaranhados distintos. Agora $N \cup A$ diferencia $O \cup \{\tau\}$, mas pode não ser mais conjunto árvore. Isto pode acontecer caso o A não seja encaixado com alguns elementos de

N . Seja B um desses elementos. Vamos resolver esse não encaixamento substituindo A ou B por algum dos conjuntos dentre $\{A \cap B, \neg A \cap B, A \cap \neg B, \neg A \cap \neg B\}$, que são os conjuntos que chamamos de cantos de A e B . Cantos funcionam bem pois eles não vão atrapalhar nenhum encaixamento, como vamos provar ao final. Não necessariamente todos os cantos vão estar em S , mas alguns pelo menos vão estar, pelo fato de S ser sub-Boole, e isso será suficiente. Para decidirmos qual substituição vamos fazer, precisamos escolher a que não vai nos fazer perder a diferenciação de nenhum emaranhado. Vamos por casos. Primeiramente, suponha $\tau(B) = 1$.

Suponha que $A \cap B \in S$. Como $\tau(B) = 1$, e A diferencia τ e τ' , então $A \cap B$ também diferencia τ de τ' . Construa N' substituindo A por $A \cap B$ em $N \cup A$, isto é, $N' = N \cup A \cap B$. N' continua a diferenciar $O \cup \{\tau\}$.

Suponha que $A \cap B \notin S$. Então por S ser sub-Boole, $A \cup B \in S$. A união não é suficiente para diferenciar τ e τ' , então agora não podemos fazer o mesmo truque do caso anterior sem perder a diferenciação de τ . E se substituíssemos o B ? Possivelmente poderíamos perder a diferenciação de algum outro par $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\tau}'$ em O . De fato, se existir um par destes, ele será único, como provaremos ao final em um lema. Então precisamos apenas nos preocupar com este par $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\tau}'$. Se o A diferencia este par, então podemos simplesmente definir $N' = N \setminus B \cup A$, que irá continuar a diferenciar $O \cup \{\tau\}$ com um não encaixamento a menos. Caso contrário, A pode valer 0 em ambos ou 1 em ambos. Se ele vale 0 em ambos, então $A \cup B$ diferencia $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\tau}'$. Defina neste caso $N' = N \setminus B \cup A, A \cup B$. Se ele vale 1 em ambos, vamos ter que procurar novos cantos. Olhe para o par $A, \neg B$. Se a interseção $A \cap \neg B \in S$, então ela diferencia $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\tau}'$ e podemos definir $N' = N \setminus B \cup A, A \cap \neg B$. Se $A \cap \neg B \notin S$, então a união $A \cup \neg B \in S$. Neste caso não temos a diferenciação do $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\tau}'$, mas temos a diferenciação do τ e do τ' , então podemos voltar a ideia anterior e substituir o A ! Defina daí $N' = N \cup \{A \cup \neg B\}$.

Começamos a argumentação dos dois parágrafos anteriores supondo que $\tau(B) = 1$. Se este não for o caso, troque B por $\neg B$ na argumentação inteira.

Finalmente, em qualquer um dos casos, chegamos a um N' que diferencia $O \cup \{\tau\}$ e que substitui dentre dois A, B não encaixados, um deles por um do seus cantos.

Lema. Tome dois conjuntos A, B não encaixados e um C encaixado com A ou com B . Então C está encaixado com qualquer um dos cantos $\{A \cap B, A \cap \neg B, \neg A \cap B, \neg A \cap \neg B\}$.

Com este lema, garantimos que nosso N' tem exatamente um não encaixamento a menos que N . Repita este processo até não ter mais não encaixamentos, e assim chegará a um conjunto árvore que diferencia n emaranhados, finalizando nosso passo indutivo.

Resta apenas demonstrar um fato afirmado durante a demonstração e não provado: que existe um único par $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\tau}'$ em O diferenciado por B e não diferenciado por nenhum outro elemento de N .

Lema. Seja N um conjunto árvore, $B \in N$ e O um conjunto de emaranhados diferenciados por N . Se existe um par de emaranhados $\tilde{\tau}$ e $\tilde{\tau}'$ em O diferenciado apenas por B e por mais ninguém, então este par é único.

□

Este resultado implica na versão clássica de [3] que originou essa teoria abstrata de emaranhados.

Proposição 6 (A decomposição de Seymour-Hoffman). Para qualquer G finito, existe uma decomposição em árvore de G que exhibe todos os k -emaranhados de G .

Emaranhados de $\mathcal{S}(G)$, quando G é infinito, vão ser extremidades ou emaranhados esquisitos não principais. Existe uma versão do teorema da árvore de emaranhados que resulta em uma decomposição que exhibe esses tangles.

Proposição 7 (Teorema da Árvores de Emaranhados - infinito). Decomposição que exhibe ends

Demonstração: Descobrir como faz isso?

□

Relação com tree algebra?
E no caso infinito?

Referências

- [1] R. Diestel. Tangles: A Structural Approach to Artificial Intelligence in the Empirical Sciences. Cambridge University Press, 2024.
- [2] Reinhard Diestel. Tree sets, 2015.
- [3] Neil Robertson and P.D Seymour. Graph minors. x. obstructions to tree-decomposition. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 52(2):153–190, July 1991.