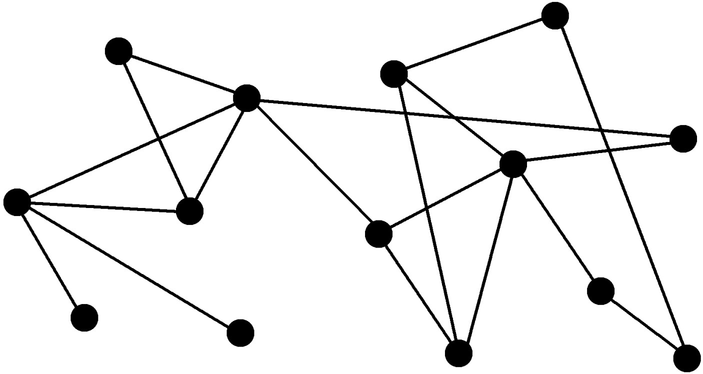
É difícil capturar o ladrão

Combinando

19 de Novembro de 2020

Convenções

Um grafo consiste em um par $G = (V, E)$, em que V é um conjunto qualquer (que será referido como conjunto de **vértices**) e E é um conjunto de pares não ordenados de elementos de V (que serão designados **arestas**). Através de desenhos, fazemos as seguintes representações:



Exemplos Clássicos

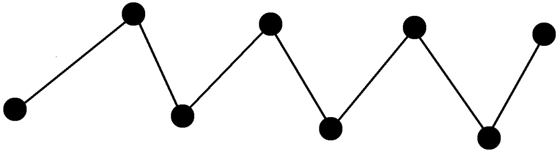


Figura: Um **caminho** finito corresponde a um conjunto de vértices cujas arestas os ligam de maneira sequencial.

Exemplos Clássicos

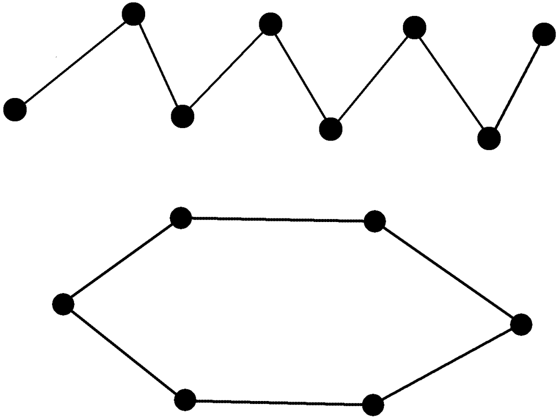


Figura: Um **circuito** é um caminho finito em que os vértices das extremidades coincidem.

Exemplos Clássicos

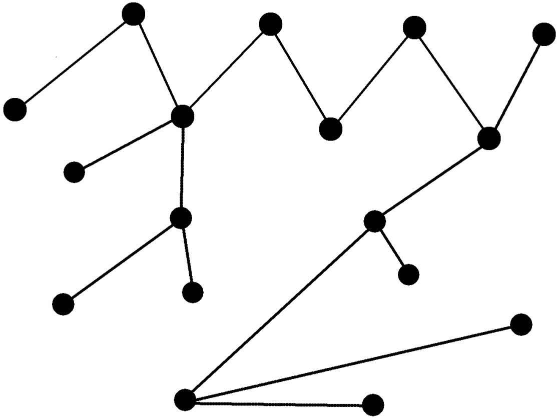


Figura: Uma **árvore** é um grafo que não possui circuitos.

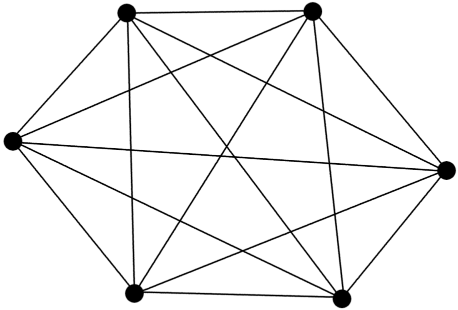
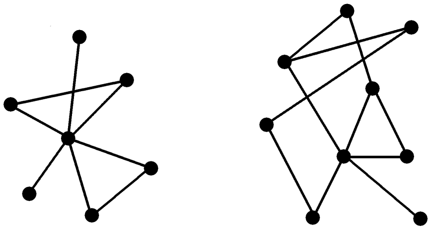


Figura: Um grafo **completo** ou uma **clique** de κ vértices consiste em um grafo com κ vértices e tal que, dados quaisquer dois vértices distintos, existe uma aresta que os tem como extremidades. Esse grafo é geralmente denotado por K_κ. Nesse exemplo, representamos uma clique com 6 vértices, isto é, representamos o grafo K_6.

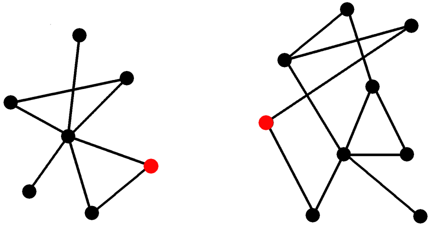
Definições Úteis

Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo. Ele é dito ser **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas conectando eles. Os exemplos vistos até aqui são conexos. O exemplo abaixo é **desconexo**:



Definições Úteis

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas os conectando. Os exemplos vistos até aqui são conexos. O exemplo abaixo é **desconexo**:



Definições Úteis

Vamos introduzir alguns conceitos importantes de Teoria dos Grafos. Para isso, seja $G = (V, E)$ um grafo. Ele é dito ser **conexo** se, dados quaisquer $u, v \in V$ vértices de G, existe um caminho de arestas conectando eles. Os exemplos vistos até aqui são conexos. O exemplo abaixo é **desconexo**:

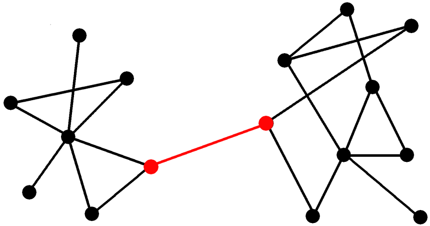


Figura: Como a retirada da aresta vermelha faz com que o novo grafo fique desconexo, essa aresta é dita ser uma **ponte** do grafo.

Definições Úteis

Quando um grafo $G = (V, E)$ é conexo, está bem definida a **distância** entre dois vértices $v, u \in V$, que consiste na menor quantidade de arestas n tal que existe um caminho de n arestas entre tais vértices. Nesse caso, denotamos $d(u, v) = n$. No exemplo a seguir, a distância entre os vértices azuis é 4:

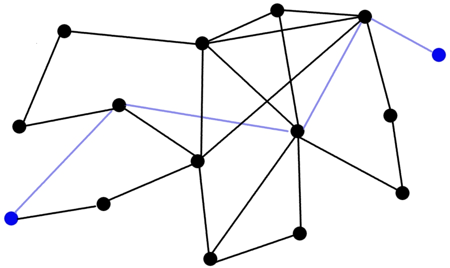


Figura: O caminho destacado em azul claro possui quatro arestas e não há um caminho com três arestas que que possui os vértices azuis como extremidades.

Definições Úteis

Assim, também em um grafo conexo $G = (V, E)$, é possível definir o seu **diâmetro** como

$$d(G) = \sup\{d(u, v) : u, v \in V\}$$

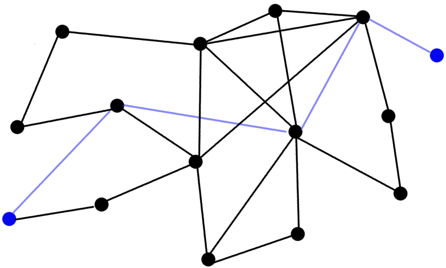
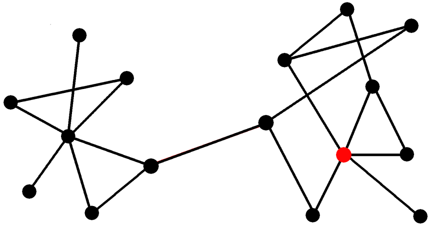


Figura: O diâmetro desse grafo é quatro, pois não há dois vértices cuja distância é cinco.

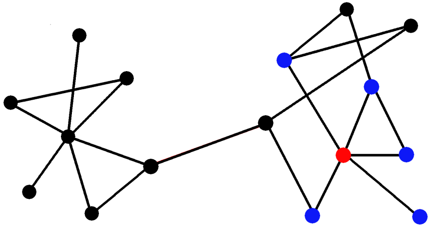
Definições Úteis

Dado v um vértice de um grafo $G = (V, E)$, o **grau** $g(v)$ desse vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem. O vértice em vermelho abaixo, por exemplo, possui grau 5.



Definições Úteis

Dado v um vértice de um grafo $G = (V, E)$, o **grau** $g(v)$ desse vértice corresponde ao número de arestas que nele incidem. O vértice em vermelho abaixo, por exemplo, possui grau 5.



Já os **vizinhos** de um vértice v corresponde aos vértices que possuem uma aresta com ele. O conjunto de tais vizinhos é denotado por $N(v)$ é consiste na **vizinhança** desse vértice. No nosso exemplo, os vizinhos do vértice vermelho são os pontos em azul.

Definições Úteis

Seja $G = (V, E)$ um grafo que **contém** um circuito, isto é, tal que existe um subconjunto de vértices $S \subset V$ e um subconjunto de arestas $A \subset E$ tal que (S, A) é um circuito. O grafo abaixo possui um circuito:

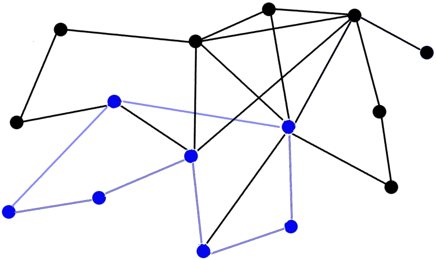


Figura: O grafo da figura contém um circuito, destacado em azul.

Definições Úteis

Seja $G = (V, E)$ um grafo que contém um circuito, isto é, tal que existe um subconjunto de vértices $S \subset V$ e um subconjunto de arestas $A \subset E$ tal que (S, A) é um circuito. Uma **corda** desse circuito consiste em uma aresta $e \in E \setminus A$ que possui dois vértices de S como extremidades.

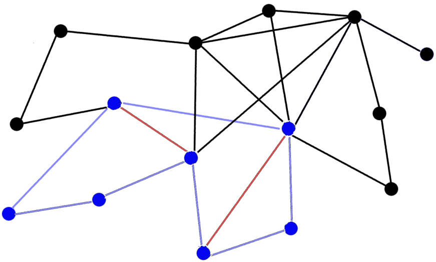


Figura: As arestas em vermelho são cordas do circuito em azul.

Definições Úteis

Um grafo $G = (V, E)$ é dito ser **cordal** se todos os circuitos que ele contém admitem cordas. O grafo a seguir, por exemplo, não é cordal.

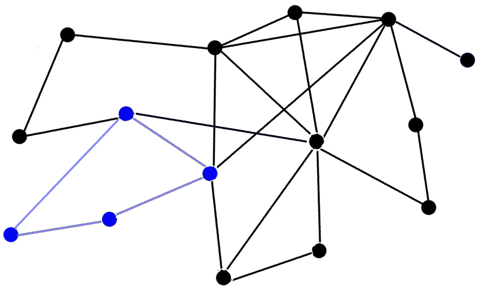


Figura: O circuito destacado em azul não possui cordas.

Adicionando algumas arestas, podemos tornar grafos não cordais em grafos cordais, que também são conhecidos como grafos **triangulados**.

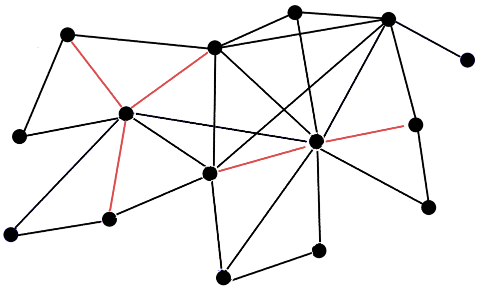


Figura: As arestas em vermelho são cordas de certos circuitos.

Figura: Tabuleiro de Interpol

O jogo e seus personagens:

O jogo *Cops and Robber* é jogado sobre um grafo $G = (V, E)$ que não admite múltiplas arestas e nem loops. As rodadas ocorrem com dois jogadores se alternando, um deles controlando um conjunto C de Cops e outro controlando um Robber R. Inicialmente, os Cops escolhem vértices do grafo para se posicionarem e o Robber escolhe um vértice em seguida para se posicionar. Em cada rodada, os seguintes movimentos podem ser realizados:

- Se for a rodada do jogador que controla os Cops jogar, ele pode escolher quantos cops quiser e movê-los para vértices adjacentes. Pode, inclusive, não mover nenhum Cop, "pulando sua rodada".
- Se for a rodada do jogador que controla o Robber jogar, ele pode movê-lo (ou não) para um vértice vizinho ao que se encontra.

Critério de Vitória

Dizemos que os Cops ganham o jogo se eles conseguem *capturar* o Robber, isto é, se em alguma rodada dos Cops algum Cop é vizinho ao Robber e pode se mover para o vértice em que ele se encontra. Se isso nunca ocorrer, declaramos a vitória para o Robber.
Observe que, se os Cops forem suficientemente numerosos, eles capturam o Robber de uma maneira bem fácil: basta posicioná-los em todos os vértices do grafo, se possível. Assim, dado G um grafo, procuraremos pela menor quantidade de Cops necessária para que eles ganhem o jogo de Cops And Robber em G. Essa quantidade será designada **cop-number** de G é representada por $c(G)$.

Exemplo

Se P é um caminho com uma quantidade finita de vértices, então $c(P) = 1$.

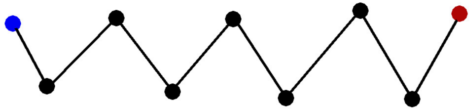


Figura: Caminho finito. O Cop é representado pelo vértice azul e o Robber é representado pelo vértice vermelho.

Exemplo

Se G é um caminho com uma quantidade infinita enumerável de vértices, então $c(P) = \aleph_0$.

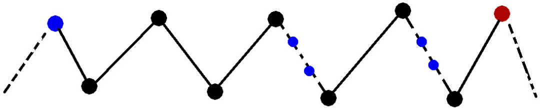


Figura: Caminho infinito enumerável. Os Cops são representados pelos vértices azuis e o Robber é representado pelo vértice vermelho.

Exemplo

Se G é um circuito com 4 vértices ou mais, então $c(G) > 1$.[a]

[a] Circuitos costumam ajudar o Robber.

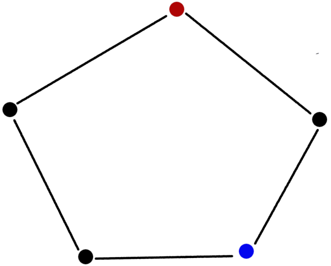


Figura: Um circuito com 5 vértices. O Cop é representado pelo vértice azul e o Robber é representado pelo vértice vermelho.

Pergunta Interessante

Após essa discussão, tentaremos encontrar algumas hipóteses necessárias para que um grafo $G = (V, E)$ seja **cop-win**, isto é, tal que $c(G) = 1$. No seminário passado, vimos que é possível caracterizar esses grafos na situação em que há apenas finitos vértices:

Proposição: ([1])

Seja $G = (V, E)$ um grafo com uma quantidade finita de vértices. Então, G é cop-win se, e somente se, G é desmanchável.

Corolário:

Todo grafo cordal $G = (V, E)$ com finitos vértices é cop-win.

Rascunho da Prova: Por indução sobre a quantidade de arestas do grafo cordal G, verifica-se que ele possui um vértice cuja vizinhança induz uma clique. Esse vértice é uma esquina do grafo, podendo ser retraído e permitindo-nos obter um outro grafo cordal. Ou seja, grafos cordais são desmancháveis e, portanto, cop-wins.

Como são os grafos cop-win com infinitos vértices?

Inicialmente, a definição de grafos desmancháveis foi feita apenas considerando grafos com finitos vértices. Mesmo se relaxarmos a definição de desmanchabilidade de grafos ao permitirmos infinitas retrações de vértices, a caracterização apresentada anteriormente é falha.

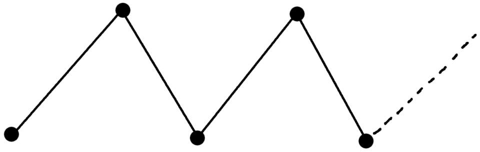


Figura: Um caminho infinito é um grafo "desmanchável", mas não é cop-win. Na verdade, esse é até um grafo *cordal*...

Como são os grafos cop-win com infinitos vértices?

Então, grafos cordais não garantem a vitória para um único Cop, embora o Robber tenha dificuldade em “contornar” o policial. Contudo, o exemplo apresentado que verifica esse fato favorece muito o ladrão por permitir que ele sempre se mantenha muito longe do Cop, uma vez que o diâmetro de um caminho infinito é $\aleph_0$. Agora, a pergunta que tentaremos responder coloca uma limitação na distância em que os jogadores podem se manter:

Pergunta

Todo grafo cordal com diâmetro finito é cop-win?

Em busca da resposta

Considere o conjunto de letras, designado **alfabeto**, dado por $\mathcal{B} = \{1, 2\}$. Uma **palavra** consiste em uma sequência finita $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathcal{B}$ para todo $1 \leq i \leq n$. O número n é dito ser o **comprimento** dessa palavra. Por exemplo, 21112121 e 12112 são palavras. O conjunto de todas as palavras desse alfabeto será designado por $\mathbb{P}$. Definimos a **árvore binária** como o grafo G^* que possui $V^* = \mathbb{P} \cup \{r\}$ como conjunto (note que esse é um conjunto enumerável) de vértices e as seguintes arestas:

- Há uma aresta entre r e 1 e uma aresta entre r e 2.
- Uma palavra $p = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ (com $a_i \in \mathcal{B}$ para todo $1 \leq i \leq n$) é vizinha das palavras $p1 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n 1$ e $p1 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n 2$

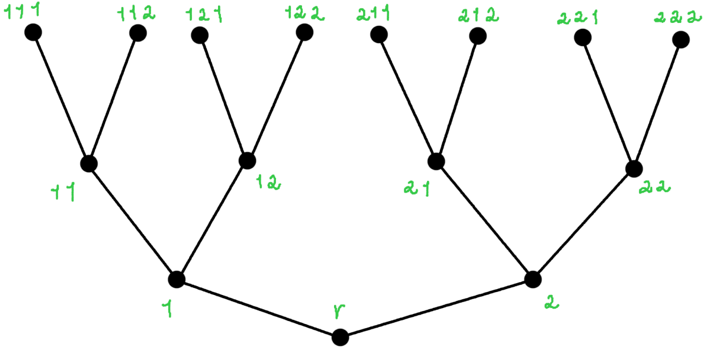


Figura: Alguns vértices da árvore binária.

Para cada palavra $p \in \mathbb{P}$, considere o grafo completo K_p (designado **bloco**) cujo conjunto de vértices é $V^* \times V^*$. No decorrer da apresentação, esse grafo será ilustrado como abaixo:

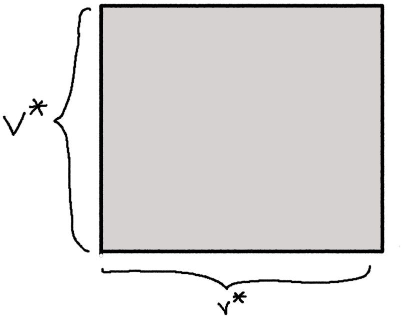


Figura: Os lados desse quadrado consistem em cópias de V^*.

Para cada palavra $p \in V^* = \mathbb{P} \cup \{r\}$, considere o grafo completo K_p (designado **bloco**) cujo conjunto de vértices é $V_p = V^* \times V^*$. No decorrer da apresentação, esse grafo será ilustrado como abaixo:

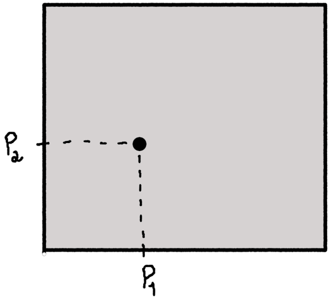


Figura: Um vértice de K_p é da forma (p_1, p_2), em que $p_1, p_2 \in \mathbb{P} \cup \{r\}$.

Para cada palavra $p \in \mathbb{P}$, considere o grafo completo K_p cujo conjunto de vértices é $V^* \times V^*$. No decorrer da apresentação, esse grafo será ilustrado como abaixo:

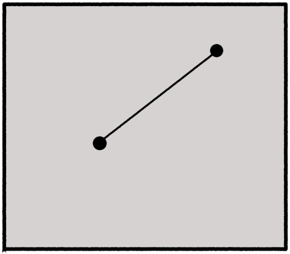


Figura: Uma vez que K_p é um grafo completo, quaisquer dois vértices são extremidades de alguma aresta.

Finalmente, considere o grafo $G = (V, E)$ definido como a seguir:

- Os vértices de G consistem em várias cópias de blocos $V^* \times V^*$. Mais especificamente, $V = \bigcup_{p \in \mathbb{P} \cup \{r\}} V_p$.
- Todos os vértices de um bloco V_p são adjacentes entre si, isto é, o subgrafo induzido de G a V_p é K_p.
- `Regra 1:` Um vértice do bloco V_p é adjacente a todos os vértices do bloco V_{p1} e a todos os vértices do bloco V_{p2}.
- `Regra 2:` Dado $x = (p_1, p_2) \in V_p$, sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$ tais que $p_1 = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ e $p_2 = b_1 b_2 b_3 \ldots b_m$. Então, x é adjacente a todos vértices do bloco V_{p1r_i} e V_{p2s_j} para todo $1 \leq i \leq n$ e todo $1 \leq j \leq m$, em que $r_i = a_1 a_2 a_3 \ldots a_i$ e $s_j = b_1 b_2 b_3 \ldots b_j$.

Ilustração do conjunto de vértices

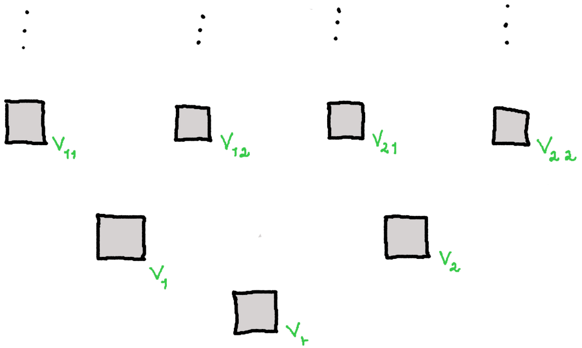


Figura: O grafo G possui várias cópias de um bloco $V^* \times V^*$, em uma disposição como na árvore binária.

Ilustração da Regra 1

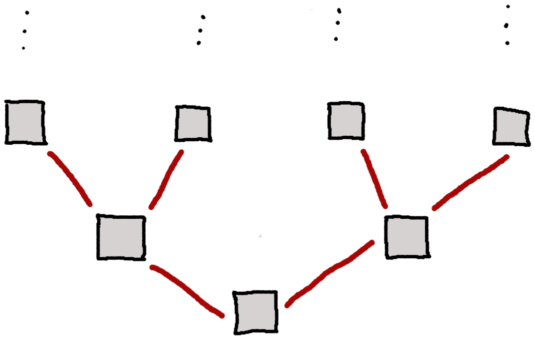


Figura: Uma aresta em vermelho entre dois blocos indica que todos os vértices de um bloco são adjacentes a todos os vértices do outro.

Ilustração da Regra 2

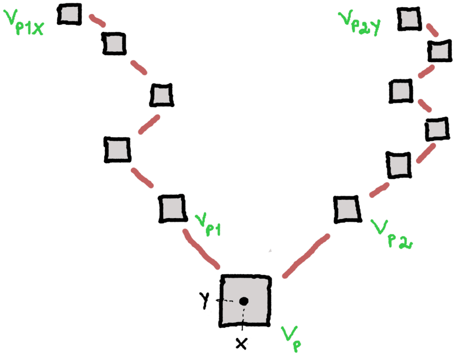


Figura: Dado $(x, y) \in V_p$, devemos encontrar as palavras $p1x$ e $p2y$ na árvore binária, bem como os caminhos entre essas palavras e p.

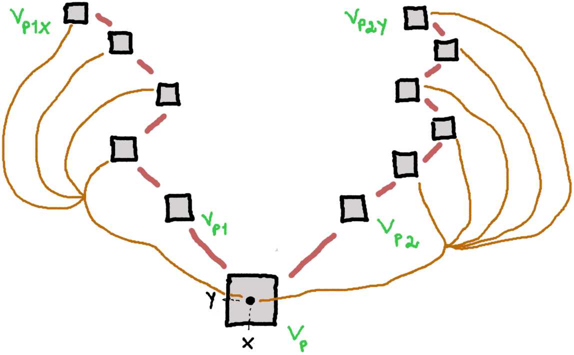
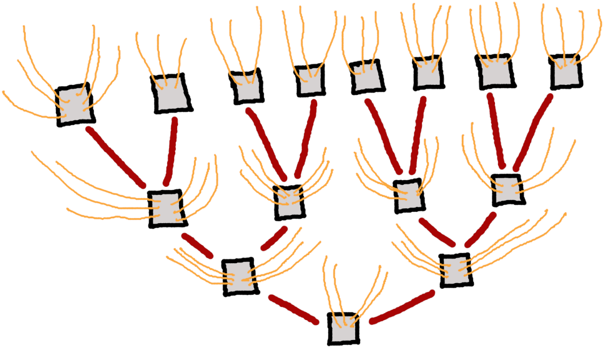


Figura: Para cada bloco que (x, y) é conectado por meio de uma aresta laranja indicamos que o vértice (x, y) é adjacente a todos os vértices desse bloco.

Um retrato final do grafo



Observações Importantes

- Uma vez que a adjacência entre vértices de blocos diferentes ocorre com respeito às Regras 1 e 2, concluimos que dois vértices de blocos V_p e V_q (em que p e q são palavras de mesmo comprimento) são adjacentes se, e somente se, $p = q$.

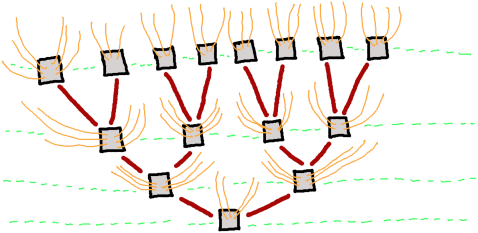


Figura: As linhas verdes indicam os "estratos" do grafo em que há blocos cujas respectivas palavras possuem mesmo comprimento. Note que não há arestas entre vértices de tais blocos.

- Fixada uma palavra $p \in \mathbb{P}$, considere C o caminho da árvore binária entre r e p. Então, um vértice $x \in V_p$ possui como vizinhos em "estratos" inferiores ao comprimento de p apenas alguns vértices de $\bigcup_{c \in C} V_c$.

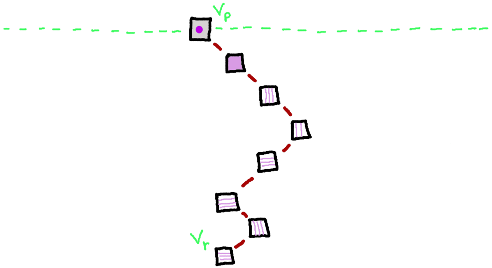


Figura: As linhas em tons claros de roxo indicam os vértices de "estratos" inferiores ao de V_p que são adjacentes ao ponto destacado.

Afirmação

O grafo G assim definido é cordal.

Para mostrarmos isso, considere um circuito de n arestas $C_n = x_0 x_1 \ldots x_{n-1}$, em que $n \geq 4$. Para cada $0 \leq i \leq n-1$, seja p_i a palavra tal que $x_i \in V_{p_i}$ e, sem perda de generalidade, suponha que p_0 possui comprimento minimal. Se os vértices de C_n estão contidos em V_{p_0}, então C_n admite uma corda (na verdade, admite várias).

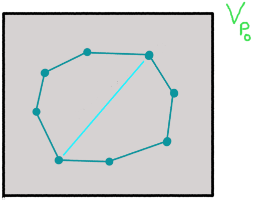


Figura: Uma vez que o subgrafo induzido a V_{p_0} é completo, o circuito possuirá cordas se seus vértices estiverem contidos em V_{p_0}.

Considere agora o caso em que isso não ocorre e seja

$$k = \min\{0 \leq i \leq n-1 : p_i \text{ tem comprimento maximal}\}$$

Então, $k \geq 1$ (por uma observação anterior) e $x_{k-1} \notin V_{p_k}$. Mostraremos que existe uma aresta entre x_{k-1} e x_{k+1}, configurando uma corda.

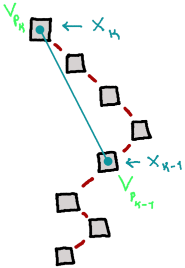


Figura: Como os vértices x_{k-1} e x_k são adjacentes (por comporem um circuito), concluimos que a palavra p_{k-1} se encontra no caminho entre p_k e r na árvore binária.

Há os seguintes quatro casos:

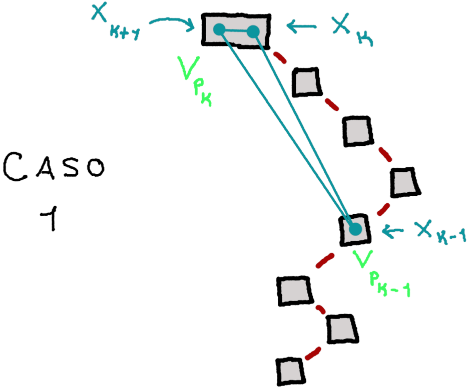


Figura: Se p_{k+1} possui o mesmo comprimento de p_k, então $x_{k+1} \in V_{p_k}$. Uma vez que existe uma aresta entre x_{k-1} e x_k, a Regra 1 ou a Regra 2 nos garante que x_{k-1} é adjacente a todos os vértices do bloco V_{p_k}. Em particular, existe uma aresta entre x_{k-1} e x_{k+1}.

Há os seguintes quatro casos:

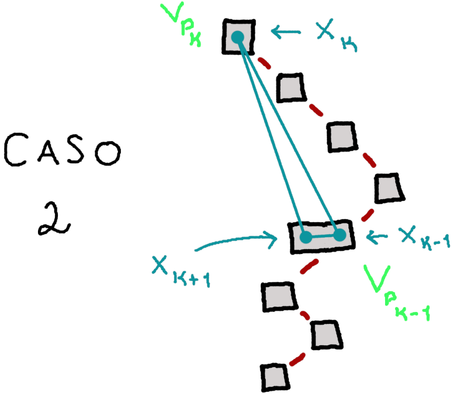


Figura: Se p_{k+1} possui o mesmo comprimento de p_k, então $x_{k+1} \in V_{p_{k-1}}$. Como os vértices de $V_{p_{k-1}}$ configuram um bloco, existe uma aresta entre x_{k-1} e x_{k+1}.

Há os seguintes quatro casos:

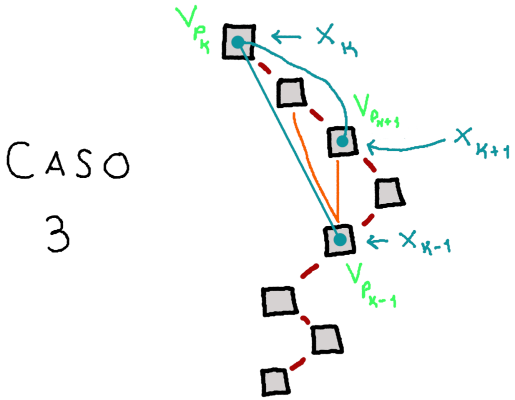


Figura: Se p_{k+1} possui comprimento menor que o de p_k e maior que o de p_{k+1}, então, pela Regra 1 ou pela Regra 2, x_{k-1} é adjacente a todos os vértices do bloco $V_{p_{k+1}}$. Em particular, existe uma aresta entre x_{k-1} e x_{k+1}.

Há os seguintes quatro casos:

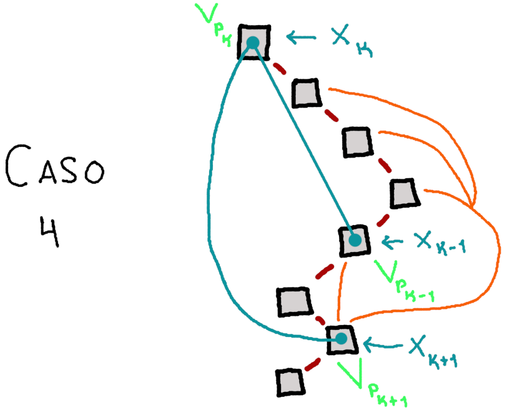


Figura: Se p_{k+1} possui comprimento menor que o de p_{k-1}, então, pela Regra 1 ou pela Regra 2, x_{k+1} é adjacente a todos os vértices do bloco $V_{p_{k-1}}$. Em particular, existe uma aresta entre x_{k+1} e x_{k-1}.

Afirmação

O grafo G assim definido possui diâmetro finito. Na verdade, seu diâmetro é 2.

Sejam u e v vértices distintos de G, existindo p_1 e p_2 palavras tais que $u \in V_{p_1}$ e $v \in V_{p_2}$. Mostraremos que $d(u, v) \leq 2$. Se $p_1 = p_2$, então $d(u, v) = 1$, pois os vértices $V_{p_1} = V_{p_2}$ configuram blocos. Se não, escrevendo $p_1 = a_1a_2a_3 \dots a_n$ e $p_2 = b_1b_2b_3 \dots b_m$, em que $a_i, b_j \in \{1, 2\}$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, existe

$$k = \min\{1 \leq i \leq \min\{n, m\} : a_i \neq b_i\}$$

Com isso, defina $p = a_1a_2a_3 \dots a_{k-1}$ (se $k = 1$, considere $p = r$). Então, alguns casos devem ser considerados:

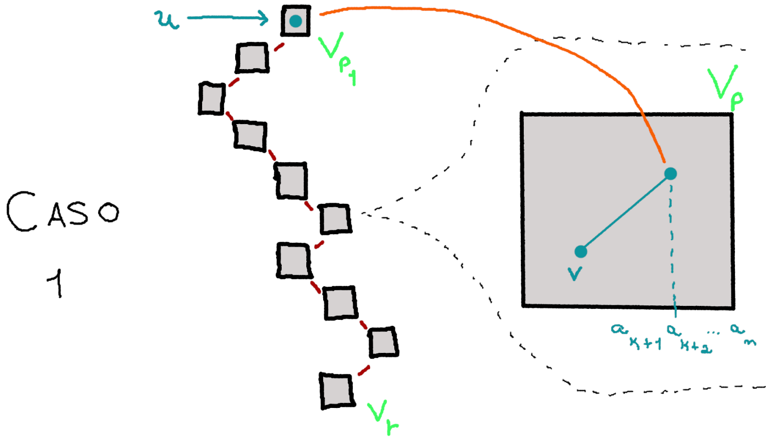


Figura: Se $p = p_2$, o vértice v é adjacente a um vértice do bloco $V_{p_2} = V_p$ que é vizinho de todos os vértices de V_{p_1} (em particular, é vizinho de u) por meio da Regra 1 ou da Regra 2. Com isso, $d(p_1, p_2) \leq 2$. O caso em que $p = p_1$ é análogo.

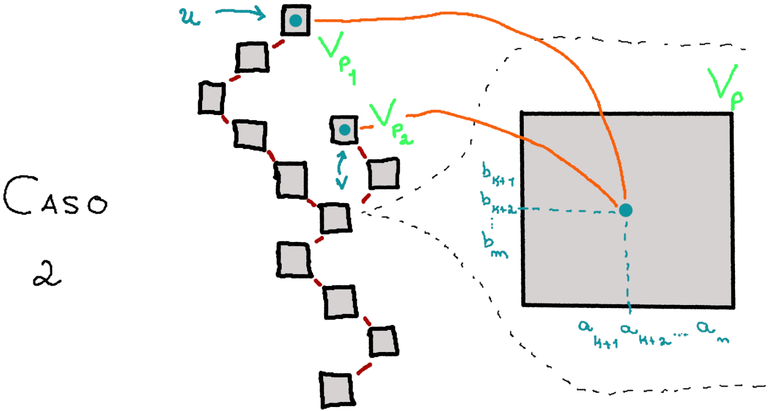


Figura: Se $p \neq p_1$ e $p \neq p_2$, existe um vértice do bloco V_p que é adjacente a todos os vértices de V_{p_1} e a todos os vértices de V_{p_2}, verificando que $d(u, v) \leq 2$.

Afirmação

O grafo G assim definido é tal que $c(G) > 1$.

Por um momento, suponha que um único Cop admite estratégia vencedora e, sem perda de generalidade, assuma que essa estratégia permita que esse jogador inicie o jogo em algum vértice de V_r.

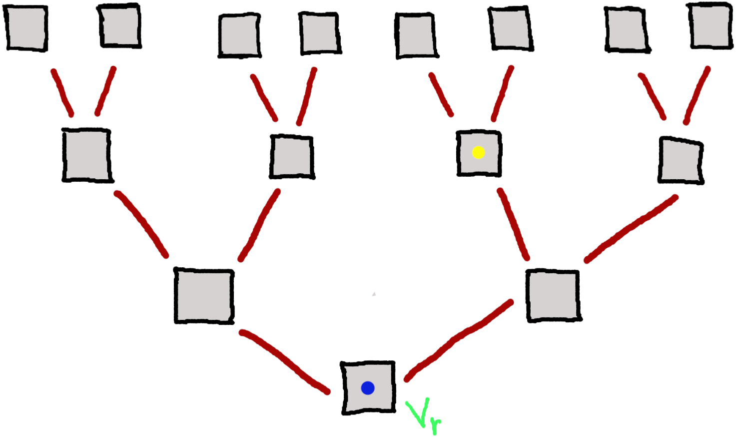


Figura: Suponha que o Cop (em azul) inicial seu jogo em algum vértice do bloco V_r e que o Robber (em amarelo) se posicione em um vértice com distância 2 do primeiro jogador. Note que, na próxima rodada, o Cop não pode se deslocar para algum vértice do mesmo bloco em que o Robber se encontra.

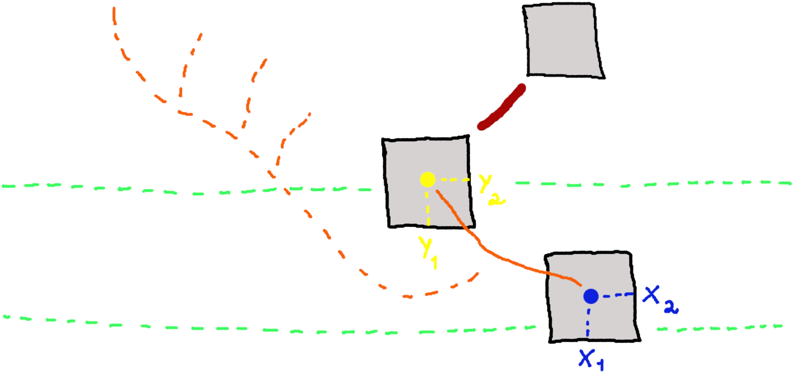


Figura: Suponha que o Cop se desloque para algum vértice adjacente ao vértice em que o Robber se encontra. Pela Regra 1, existe um bloco cujos vértices são adjacentes ao vértice que o Robber se encontra, mas que não são adjacentes ao vértice que o Cop se encontra.

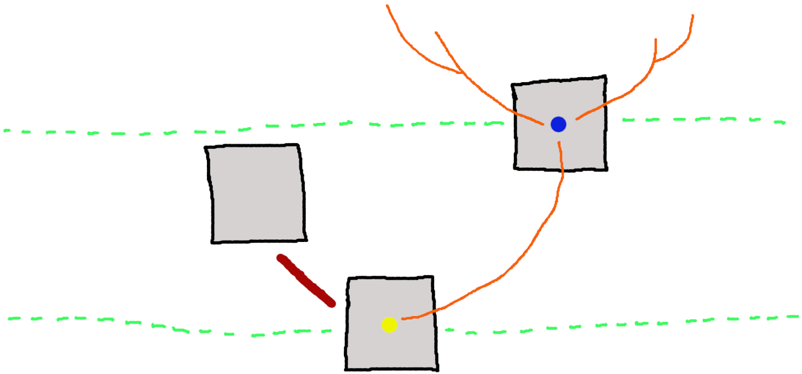


Figura: Suponha que o Cop se desloque para algum vértice adjacente ao vértice em que o Robber se encontra. Pela Regra 1, existe um bloco cujos vértices são adjacentes ao vértice que o Robber se encontra, mas que não são adjacentes ao vértice que o Cop se encontra.

Em suma

Mostramos que existe um grafo G com uma quantidade enumerável de vértices com as seguintes propriedades:

- G é cordal.
- G possui diâmetro 2.
- Um único Cop não possui estratégia vencedora nesse grafo.

Na verdade, é possível utilizar esse exemplo para construir um grafo com uma quantidade qualquer de vértices com essas propriedades.

Referências Bibliográficas

[1] Anthony Bonato and Richard Nowakowski. *The Game of Cops and Robbers on Graphs*. 09 2011.