O Jogo de Cops And Robber

Combinando

Abril de 2020

Figura: Tabuleiro de Interpol

O jogo e seus personagens:

O jogo *Cops and Robber* é jogado sobre um grafo $G = (V, E)$ que não admite múltiplas arestas e nem loops.

O jogo e seus personagens:

O jogo *Cops and Robber* é jogado sobre um grafo $G = (V, E)$ que não admite múltiplas arestas e nem loops. As rodadas ocorrem com dois jogadores se alternando, um deles controlando um conjunto C de Cops e outro controlando um Robber R.

O jogo e seus personagens:

O jogo *Cops and Robber* é jogado sobre um grafo $G = (V, E)$ que não admite múltiplas arestas e nem loops. As rodadas ocorrem com dois jogadores se alternando, um deles controlando um conjunto C de Cops e outro controlando um Robber R. Inicialmente, os Cops escolhem vértices do grafo para se posicionarem e o Robber escolhe um vértice em seguida para se posicionar.

O jogo e seus personagens:

O jogo *Cops and Robber* é jogado sobre um grafo $G = (V, E)$ que não admite múltiplas arestas e nem loops. As rodadas ocorrem com dois jogadores se alternando, um deles controlando um conjunto C de Cops e outro controlando um Robber R. Inicialmente, os Cops escolhem vértices do grafo para se posicionarem e o Robber escolhe um vértice em seguida para se posicionar. Em cada rodada, os seguintes movimentos podem ser realizados:

- Se for a rodada do jogador que controla os Cops jogar, ele pode escolher quantos cops quiser e movê-los para vértices adjacentes. Pode, inclusive, não mover nenhum Cop, “pulando sua rodada”.
- Se for a rodada do jogador que controla o Robber jogar, ele pode movê-lo (ou não) para um vértice vizinho ao que se encontra.

Critério de Vitória

Dizemos que os Cops ganham o jogo se eles conseguem *capturar* o Robber, isto é, se em alguma rodada dos Cops algum Cop é vizinho ao Robber e pode se mover para o vértice em que ele se encontra. Se isso nunca ocorrer, declaramos a vitória para o Robber.

Critério de Vitória

Dizemos que os Cops ganham o jogo se eles conseguem *capturar* o Robber, isto é, se em alguma rodada dos Cops algum Cop é vizinho ao Robber e pode se mover para o vértice em que ele se encontra. Se isso nunca ocorrer, declaramos a vitória para o Robber.
Observe que, se os Cops forem suficientemente numerosos, eles capturam o Robber de uma maneira bem fácil: basta posicioná-los em todos os vértices do grafo, se possível.

Critério de Vitória

Dizemos que os Cops ganham o jogo se eles conseguem *capturar* o Robber, isto é, se em alguma rodada dos Cops algum Cop é vizinho ao Robber e pode se mover para o vértice em que ele se encontra. Se isso nunca ocorrer, declaramos a vitória para o Robber.
Observe que, se os Cops forem suficientemente numerosos, eles capturam o Robber de uma maneira bem fácil: basta posicioná-los em todos os vértices do grafo, se possível. Assim, dado G um grafo, procuraremos pela menor quantidade de Cops necessária para que eles ganhem o jogo de Cops And Robber em G.

Critério de Vitória

Dizemos que os Cops ganham o jogo se eles conseguem *capturar* o Robber, isto é, se em alguma rodada dos Cops algum Cop é vizinho ao Robber e pode se mover para o vértice em que ele se encontra. Se isso nunca ocorrer, declaramos a vitória para o Robber.
Observe que, se os Cops forem suficientemente numerosos, eles capturam o Robber de uma maneira bem fácil: basta posicioná-los em todos os vértices do grafo, se possível. Assim, dado G um grafo, procuraremos pela menor quantidade de Cops necessária para que eles ganhem o jogo de Cops And Robber em G. Essa quantidade será designada **cop-number** de G é representada por $c(G)$.

Exemplos Básicos

Exemplo

Se P é um caminho com uma quantidade finita de vértices, então $c(P) = 1$.

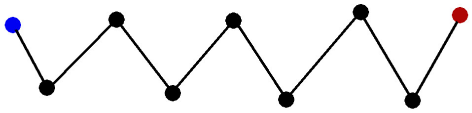


Figura: Caminho finito. O Cop é representado pelo vértice azul e o Robber é representado pelo vértice vermelho.

Exemplo

Se P é um caminho com uma quantidade infinita enumerável de vértices, então $c(P) = \omega$.

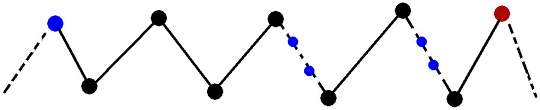


Figura: Caminho infinito enumerável. Os Cops são representados pelos vértices azuis e o Robber é representado pelo vértice vermelho.

Generalização dos Exemplos

A ideia por trás da quantidade de Cops necessárias para se ganhar o jogo em cada um dos exemplos anteriores pode ser utilizada para a demonstração do seguinte resultado:

Proposição

Se $T = (V, E)$ é uma árvore que não possui um caminho infinito como subgrafo, então $c(T) = 1$.

A ideia por trás da quantidade de Cops necessárias para se ganhar o jogo em cada um dos exemplos anteriores pode ser utilizada para a demonstração do seguinte resultado:

Proposição

Se $T = (V, E)$ é uma árvore que não possui um caminho infinito como subgrafo, então $c(T) = 1$.

Demonstração: Posicionaremos um Cop C em um vértice r que escolhemos ser raiz da árvore.

Generalização dos Exemplos

A ideia por trás da quantidade de Cops necessárias para se ganhar o jogo em cada um dos exemplos anteriores pode ser utilizada para a demonstração do seguinte resultado:

Proposição

Se $T = (V, E)$ é uma árvore que não possui um caminho infinito como subgrafo, então $c(T) = 1$.

Demonstração: Posicionaremos um Cop C em um vértice r que escolhemos ser raiz da árvore.Dado $v \in V$ um outro vértice qualquer da árvore, mostraremos por indução sobre $d(r, v)$ que o Robber R perde o jogo se iniciar o jogo em v. Ou seja, não haverá vértices no qual o Robber possa iniciar o jogo e ganhar.

Generalização dos Exemplos

A ideia por trás da quantidade de Cops necessárias para se ganhar o jogo em cada um dos exemplos anteriores pode ser utilizada para a demonstração do seguinte resultado:

Proposição

Se $T = (V, E)$ é uma árvore que não possui um caminho infinito como subgrafo, então $c(T) = 1$.

Demonstração: Posicionaremos um Cop C em um vértice r que escolhemos ser raiz da árvore.Dado $v \in V$ um outro vértice qualquer da árvore, mostraremos por indução sobre $d(r, v)$ que o Robber R perde o jogo se iniciar o jogo em v. Ou seja, não haverá vértices no qual o Robber possa iniciar o jogo e ganhar.Caso $d(r, v) = 1$, isso realmente ocorre, pois o Cop inicia o jogo e já pode se mover para o vértice em que o Robber se encontra.

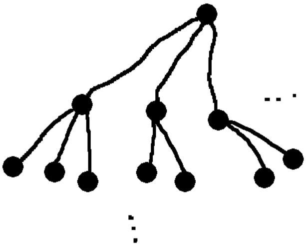


Figura: Uma árvore (sem caminhos infinitos).

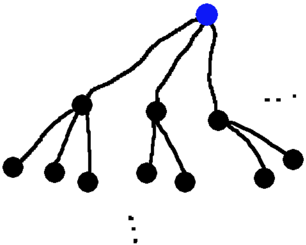


Figura: Começamos por posicionar o Cop na raiz da árvore.

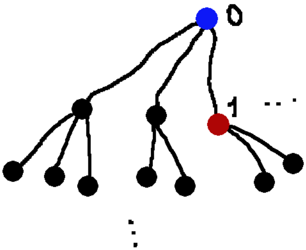


Figura: Se o Robber se posicionar em um vértice com distância 1 da raiz, ele perde já na próxima rodada.

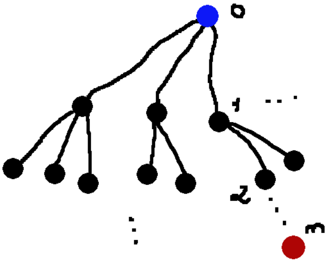


Figura: Suponha então que o Robber se posiciona em um vértice que dista *n* da raiz. Se essa distância entre o Cop e o Robber eventualmente diminuir, garantimos a hipótese do Cop por hipótese de indução.

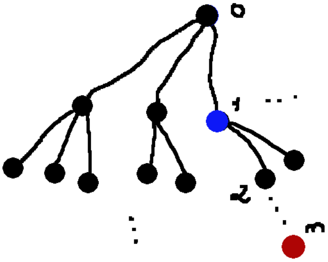


Figura: Por isso, o Cop faz seu movimento se posicionando em seu vizinho que compõe o único caminho entre a raiz da árvore e o Robber. Se o Robber decidir ficar parado ou se posicionar no vértice antecessor ao que ele se encontra, ele perde por hipótese de indução.

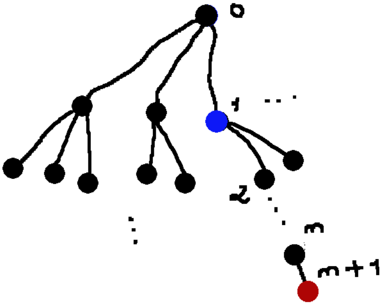


Figura: Se o vértice em que o Robber se encontra possuir algum sucessor, se deslocar a esse sucessor é o melhor que ele pode fazer. O Cop então novamente se desloca pelo único caminho que o liga ao vértice que se encontra o Robber e esse padrão se repete após cada rodada.

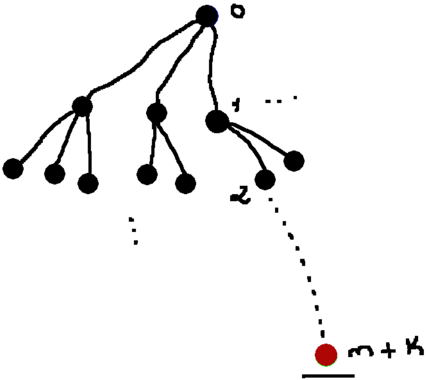


Figura: Como a árvore não possui ramos infinitos, o Robber eventualmente se posicionará em um vértice que não possui filhos.

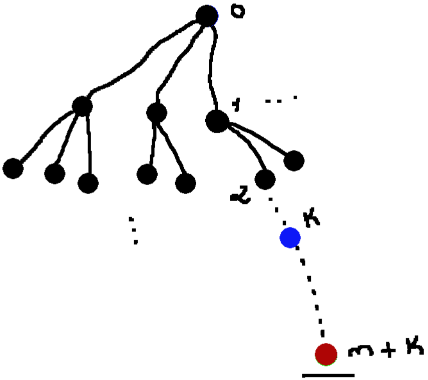


Figura: Lembre-se que o Cop sempre matém uma distância n do Robber, que agorá deverá ficar parado se não quiser que essa distância diminua ao retornar para o vértice anterior.

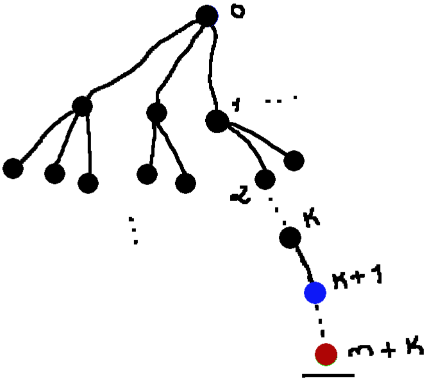
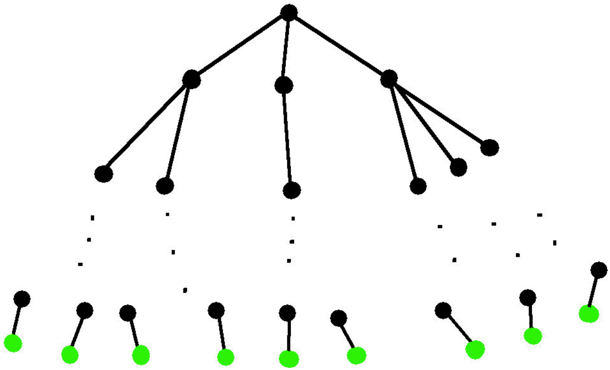


Figura: Nesse caso, o Cop se desloca para o próximo vértice no caminho que o conecta até o Robber, diminuindo sua distância até o oponente e vencendo por hipótese indutiva.

Observações Relevantes:

No resultando anterior, utilizamos de forma bem precisa o fato de que todos os ramos da árvore considerada possuia vértices terminais, como no exemplo a seguir:



Observe que um vértice terminal v de um árvore é tal que existe u outro vértice do grafo satisfazendo $N[v] = N(v) \cup \{v\} \subset N(u) \cup \{u\} = N[u]$ (a saber, u é o pai de v).

Observe que um vértice terminal v de um árvore é tal que existe u outro vértice do grafo satisfazendo $N[v] = N(v) \cup \{v\} \subset N(u) \cup \{u\} = N[u]$ (a saber, u é o pai de v). Dado $G = (V, A)$ um grafo, dizemos que $v \in V$ é uma **esquina** se existe $u \in V$ tal que $N[v] \subset N[u]$. Nessas condições, dizemos que u **domina** v.

Observe que um vértice terminal v de um árvore é tal que existe u outro vértice do grafo satisfazendo $N[v] = N(v) \cup \{v\} \subset N(u) \cup \{u\} = N[u]$ (a saber, u é o pai de v). Dado $G = (V, A)$ um grafo, dizemos que $v \in V$ é uma **esquina** se existe $u \in V$ tal que $N[v] \subset N[u]$. Nessas condições, dizemos que u **domina** v. Como já podemos intuir, esquinas são perigosas para o Robber.

Simplificando Coisas

Sejam $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ dois grafos. Dizemos que $f : V \to V'$ é um **homomorfismo de grafos** se preserva arestas ou identifica seus extremos, isto é, se, dada $\{u, v\} \in A$ uma aresta, temos que $\{f(u), f(v)\} \in A'$ ou $f(u) = f(v)$.

Simplificando Coisas

Sejam $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ dois grafos. Dizemos que $f : V \to V'$ é um **homomorfismo de grafos** se preserva arestas ou identifica seus extremos, isto é, se, dada $\{u, v\} \in A$ uma aresta, temos que $\{f(u), f(v)\} \in A'$ ou $f(u) = f(v)$.

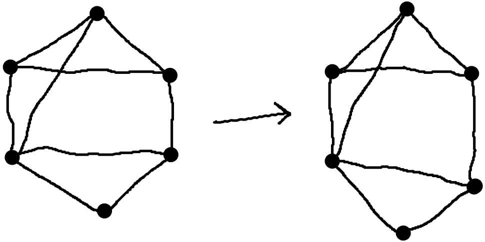


Figura: Homomorfismo Identidade

Simplificando Coisas

Sejam $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ dois grafos. Dizemos que $f : V \to V'$ é um **homomorfismo de grafos** se preserva arestas ou identifica seus extremos, isto é, $\{u, v\} \in A$ é uma aresta se, e somente se, $\{f(u), f(v)\} \in A'$ ou $f(u) = f(v)$.

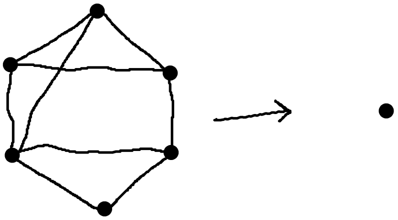


Figura: Homomorfismo Trivial

Simplificando Coisas

Sejam $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ dois grafos. Dizemos que $f : V \to V'$ é um **homomorfismo de grafos** se preserva arestas ou identifica seus extremos, isto é, $\{u, v\} \in A$ é uma aresta se, e somente se, $\{f(u), f(v)\} \in A'$ ou $f(u) = f(v)$.

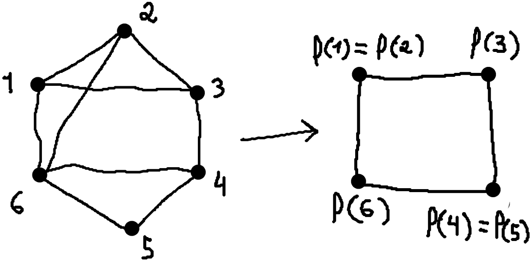


Figura: Homomorfismo Menos Trivial

Não simplificando muito

Seja $G = (V, A)$ um grafo e considere um subgrafo induzido $H = (V', A')$ de G. Dizemos que H é um **retrato** de G se existe $f : V \to V'$ um homomorfismo entre G e H (chamado **retração**) que fixa os vértices de H.

Não simplificando muito

Seja $G = (V, A)$ um grafo e considere um subgrafo induzido $H = (V', A')$ de G. Dizemos que H é um **retrato** de G se existe $f : V \to V'$ um homomorfismo entre G e H (chamado **retração**) que fixa os vértices de H.

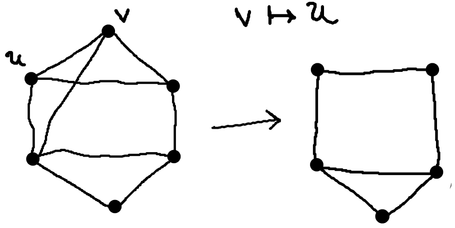


Figura: Homomorfismo $v \mapsto u$. A imagem desse homomorfismo é um retrato de G.

Observação

Considere $G = (V, A)$ um grafo. Dado $v \in V$, $H = G \setminus v$ é dito ser um **retrato por um ponto** de G se v é uma esquina de G.

Observação

Considere $G = (V, A)$ um grafo. Dado $v \in V$, $H = G \setminus v$ é dito ser um **retrato por um ponto** de G se v é uma esquina de G. Nesse caso, existe um homomorfismo de grafos natural $f : G \to H$, que fixa os vértices de H e tal que $f(v)$ domina v.

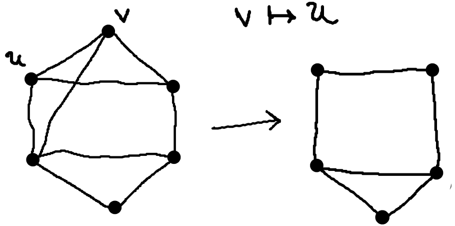


Figura: v é uma esquina do grafo, pois $N[v] \subset N[u]$.

Dado G um grafo com uma quantidade finita de vértices, dizemos que G é **desmanchável** se existe uma enumeração de seus vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tal que $G \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ é um retrato por um ponto de $G \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ para todo $2 \leq i \leq n-1$.

Dado G um grafo com uma quantidade finita de vértices, dizemos que G é **desmanchável** se existe uma enumeração de seus vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tal que $G \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ é um retrato por um ponto de $G \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ para todo $2 \leq i \leq n-1$. Em outras palavras, se G é desmanchável se pode ser reduzido a um vértice por uma quantidade finita de remoções de esquinas.

Dado G um grafo com uma quantidade finita de vértices, dizemos que G é **desmanchável** se existe uma enumeração de seus vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tal que $G \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ é um retrato por um ponto de $G \setminus \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ para todo $2 \leq i \leq n-1$. Em outras palavras, se G é desmanchável se pode ser reduzido a um vértice por uma quantidade finita de remoções de esquinas.

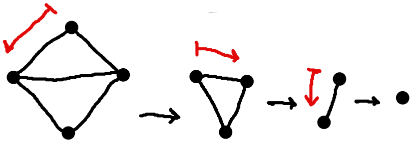


Figura: Exemplo de um grafo desmanchável e uma sequência de suas retrações

O quadrado não é desmanchável

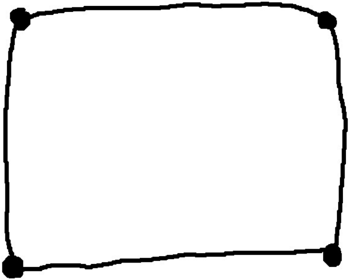


Figura: O quadrado não possui esquinas. Observe que seu cop number é 2.

Subgrafos podem piorar

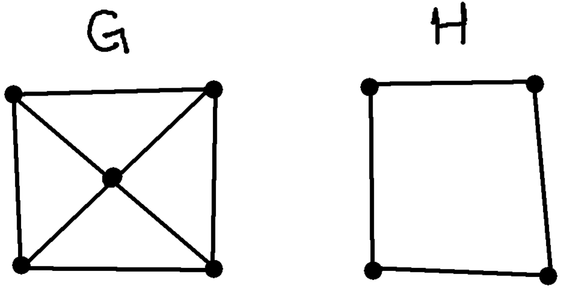


Figura: Observe que H é um subgrafo (induzido, aliás) de G, mas $c(G) = 1$ e $c(H) = 2$.

Retratos ajudam os Cops

Proposição

Se G é um grafo e H é um retrato de G, então $c(H) \leq c(G)$.

Retratos ajudam os Cops

Proposição

Se G é um grafo e H é um retrato de G, então $c(H) \leq c(G)$.

Demonstração: Seja $\kappa = c(G)$. A ideia da prova consiste em mostrar que κ Cops vencem o jogo em H através da cópia da estratégia de G via uma retração f.

Retratos ajudam os Cops

Proposição

Se G é um grafo e H é um retrato de G, então $c(H) \leq c(G)$.

Demonstração: Seja $\kappa = c(G)$. A ideia da prova consiste em mostrar que κ Cops vencem o jogo em H através da cópia da estratégia de G via uma retração f. Assim, inicie o jogo com o posicionamento dos Cops em H como imagem da posição inicial dos Cops que garante vitória em G.

Retratos ajudam os Cops

Proposição

Se G é um grafo e H é um retrato de G, então $c(H) \leq c(G)$.

Demonstração: Seja $\kappa = c(G)$. A ideia da prova consiste em mostrar que κ Cops vencem o jogo em H através da cópia da estratégia de G via uma retração f. Assim, inicie o jogo com o posicionamento dos Cops em H como imagem da posição inicial dos Cops que garante vitória em G. Obtida a resposta do Robber em H, é possível encará-la como uma resposta em G.

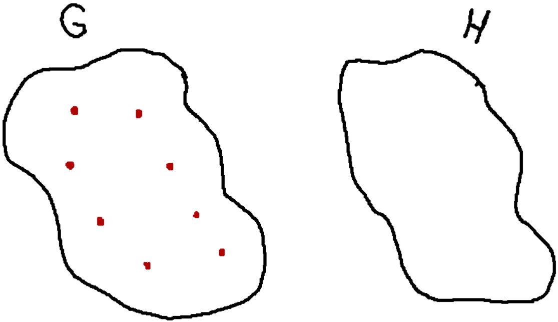


Figura: A estratégia vencedora dos κ Cops em G nos determina uma posição inicial dos policiais nesse grafo..

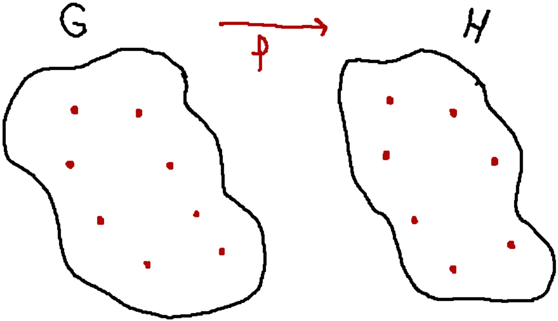


Figura: Assim, vamos dispor essa posição inicial em H através do homomorfismo f

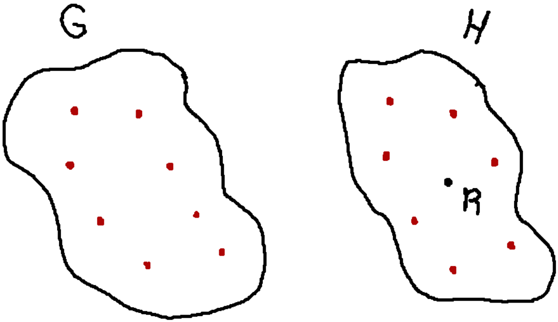


Figura: Como resposta, o Robber se posiciona em H.

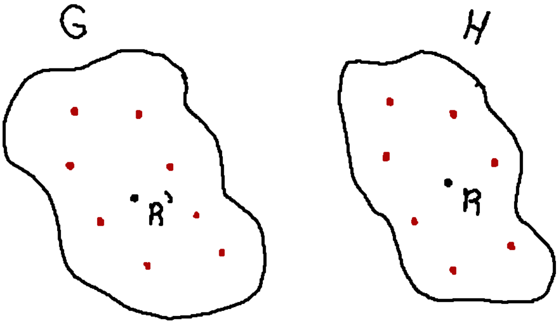


Figura: Para copiar a estratégia de Cops em G, basta pensar que o posicionamento do Robber em H é um posicionamento em G (visto que H é um subgrafo de G).

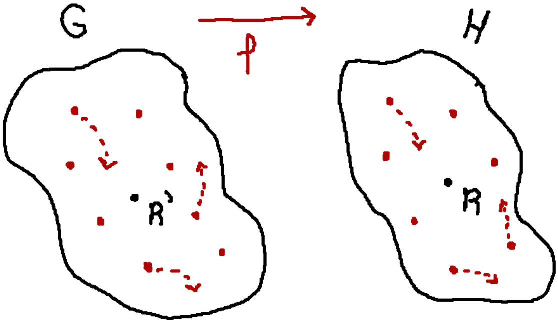


Figura: A estratégia vencedora dos Cops em G nos dá uma resposta a esse posicionamento do Robber. Vamos copiar tal resposta através de f.

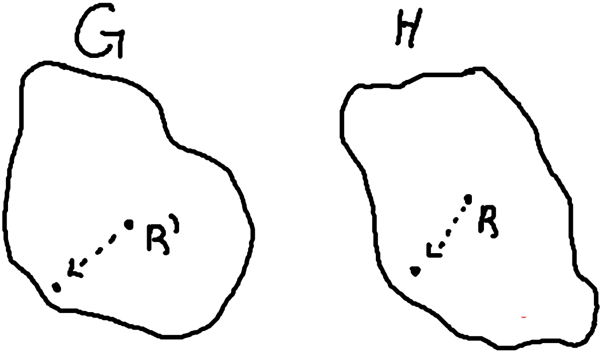


Figura: Todo movimento de R em H pode ser encarado como um movimento de R em G.

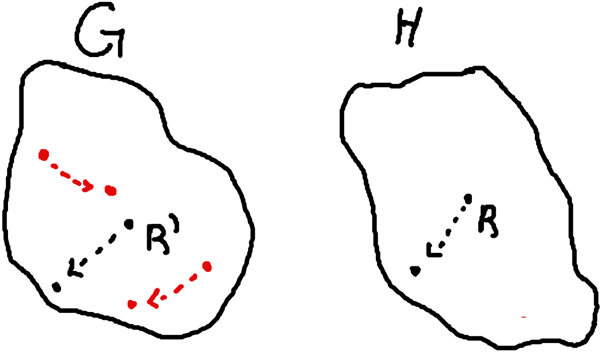


Figura: Todo movimento de R em H pode ser encarado como um movimento de R em G. Isso gera uma resposta dos Cops em G.

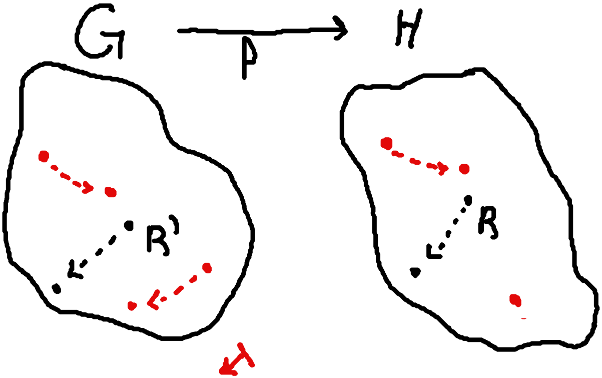


Figura: Todo movimento de R em H pode ser encarado como um movimento de R em G. Isso gera uma resposta dos Cops em G. Em H, vamos interpretar essa resposta via f.

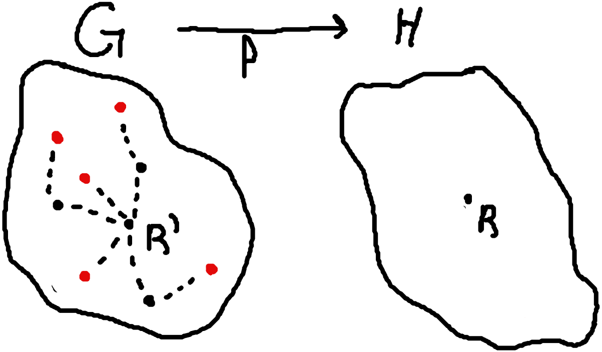


Figura: Em algum momento, o Robber estará na iminência de perder em G.

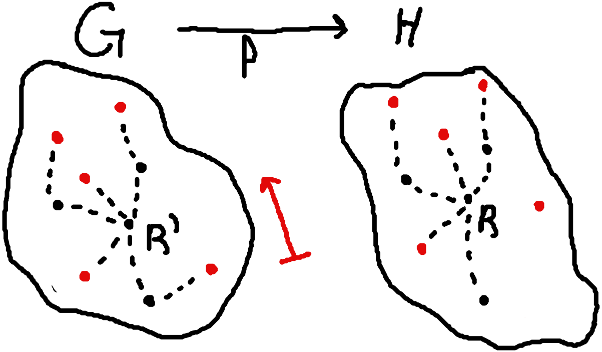


Figura: Em algum momento, o Robber estará na iminência de perder em G. E isso se traduz numa situação similar em H também. Certo?

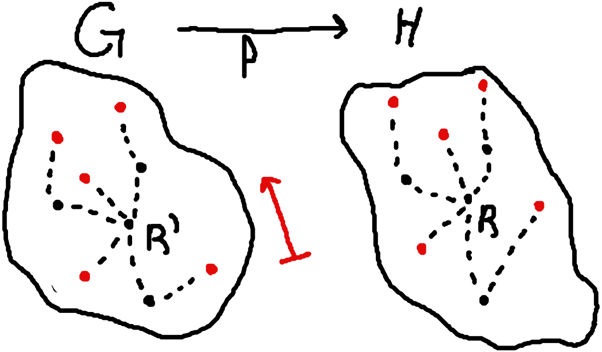


Figura: Certo!

Sempre que o Robber R fizer um movimento de R a um vértice v, em G a uma resposta com o posicionamento dos Cops em um conjunto C'. Portanto, responda em H com $f(C')$. Dada a estratégia vencedora dos Cops, em algum momento (em G) o Robber R estará em um vértice v em que todos os seus vizinhos são Cops ou são adjacentes a algum Cop. Mas, então, $f(v)$ é um Cop, todos os seus vizinhos são Cops ou todos os seus vizinhos são adjacentes a algum Cop, garantindo a vitória dos Cops em H. $\square$

Sempre que o Robber R fizer um movimento de R a um vértice v, em G a uma resposta com o posicionamento dos Cops em um conjunto C'. Portanto, responda em H com $f(C')$. Dada a estratégia vencedora dos Cops, em algum momento (em G) o Robber R estará em um vértice v em que todos os seus vizinhos são Cops ou são adjacentes a algum Cop. Mas, então, $f(v)$ é um Cop, todos os seus vizinhos são Cops ou todos os seus vizinhos são adjacentes a algum Cop, garantindo a vitória dos Cops em H. $\square$

Corolário

Se G é um grafo tal que $c(G) = 1$, então $c(H) = 1$ para todo retrato H de G

Um Cop é bem fácil

Agora, procuraremos pelas propriedades são necessárias e suficientes para que um grafo seja **cop-win**, isto é, para que apenas um Cop seja suficiente para garantir a derrota do Robber nesse grafo.

Um Cop é bem fácil

Agora, procuraremos pelas propriedades são necessárias e suficientes para que um grafo seja **cop-win**, isto é, para que apenas um Cop seja suficiente para garantir a derrota do Robber nesse grafo.

Lema

Todo grafo G cop-win possui (ao menos) uma esquina.

Um Cop é bem fácil

Agora, procuraremos pelas propriedades são necessárias e suficientes para que um grafo seja **cop-win**, isto é, para que apenas um Cop seja suficiente para garantir a derrota do Robber nesse grafo.

Lema

Todo grafo G cop-win possui (ao menos) uma esquina.

Demonstração: Considere G um grafo cop-win. Imediatamente antes do Robber perder o jogo, ele se encontra em um vértice no qual todos os seus vizinhos são vizinhos do vértice em que se encontra o Cop. Além disso, o Robber não possui opção de não se mover, de modo que o vértice em que se encontra deve ser também adjacente ao vértice em que o Cop se encontra. Logo, o vértice em que o Robber está posicionado nessa instância do jogo é uma esquina. $\square$

Corolário

Todo grafo cop-win finito G é desmanchável.

Corolário

Todo grafo cop-win finito G é desmanchável.

Demonstração: vamos fazer a prova por indução sobre a quantidade de vértices do grafo G.

Corolário

Todo grafo cop-win finito G é desmanchável.

Demonstração: vamos fazer a prova por indução sobre a quantidade de vértices do grafo G. Se ele possui um único vértice, não há o que fazer.

Corolário

Todo grafo cop-win finito G é desmanchável.

Demonstração: vamos fazer a prova por indução sobre a quantidade de vértices do grafo G. Se ele possui um único vértice, não há o que fazer.Se não, pelo resultado anterior, ele possui uma esquina u.

Corolário

Todo grafo cop-win finito G é desmanchável.

Demonstração: vamos fazer a prova por indução sobre a quantidade de vértices do grafo G. Se ele possui um único vértice, não há o que fazer.Se não, pelo resultado anterior, ele possui uma esquina u. Conforme discutimos anteriormente, $H := G \setminus u$ é então um retrato de G.

Corolário

Todo grafo cop-win finito G é desmanchável.

Demonstração: vamos fazer a prova por indução sobre a quantidade de vértices do grafo G. Se ele possui um único vértice, não há o que fazer.Se não, pelo resultado anterior, ele possui uma esquina u. Conforme discutimos anteriormente, $H := G \setminus u$ é então um retrato de G. Visto que $c(G) = 1$ e H é um retrato de G, temos que $c(H) = 1$.

Corolário

Todo grafo cop-win finito G é desmanchável.

Demonstração: vamos fazer a prova por indução sobre a quantidade de vértices do grafo G. Se ele possui um único vértice, não há o que fazer.Se não, pelo resultado anterior, ele possui uma esquina u. Conforme discutimos anteriormente, $H := G \setminus u$ é então um retrato de G. Visto que $c(G) = 1$ e H é um retrato de G, temos que $c(H) = 1$. Como H é cop-win e finito, ele é desmanchável por hipótese indutiva. Desse modo, por ser um retrato por um ponto de G, G é desmanchável. $\square$

E vale a volta...

Proposição

Se G é um grafo finito e desmanchável, então $c(G) = 1$.

E vale a volta...

Proposição

Se G é um grafo finito e desmanchável, então $c(G) = 1$.

Demonstração: Novamente, a prova será por indução no número de vértices de G. Se o grafo possui apenas um vértice, não há o que fazer.

E vale a volta...

Proposição

Se G é um grafo finito e desmanchável, então $c(G) = 1$.

Demonstração: Novamente, a prova será por indução no número de vértices de G. Se o grafo possui apenas um vértice, não há o que fazer. Se não, suponha que o resultado é válido para todo grafo finito e desmanchável com $n \in \mathbb{N}$ vértices e considere G um grafo finito e desmanchável com $n + 1$ vértices.

E vale a volta...

Proposição

Se G é um grafo finito e desmanchável, então $c(G) = 1$.

Demonstração: Novamente, a prova será por indução no número de vértices de G. Se o grafo possui apenas um vértice, não há o que fazer. Se não, suponha que o resultado é válido para todo grafo finito e desmanchável com $n \in \mathbb{N}$ vértices e considere G um grafo finito e desmanchável com $n + 1$ vértices. Como G é desmanchável, considere u uma esquina do grafo.

E vale a volta...

Proposição

Se G é um grafo finito e desmanchável, então $c(G) = 1$.

Demonstração: Novamente, a prova será por indução no número de vértices de G. Se o grafo possui apenas um vértice, não há o que fazer. Se não, suponha que o resultado é válido para todo grafo finito e desmanchável com $n \in \mathbb{N}$ vértices e considere G um grafo finito e desmanchável com $n + 1$ vértices. Como G é desmanchável, considere u uma esquina do grafo. Então, $G \setminus u$ possui n vértices e é desmanchável, sendo cop-win por hipótese.

Figura: Como o vértice u é uma esquina de G, existe um vértice v de G tal que $N[u] \subset N[v]$

Figura: A estratégia vencedora do Cop em $G \setminus u$ nos determina uma configuração inicial para esse policial. Em G, então, começaremos o jogo dispondo o Cop no mesmo vértice.

Figura: Com a resposta do Robber em G, o posicionaremos no respectivo vértice de $G \setminus u$.

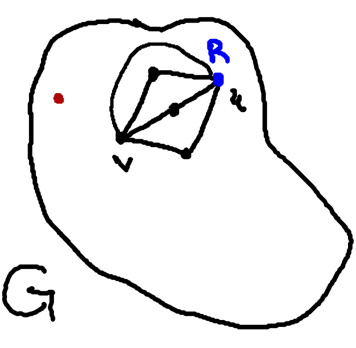


Figura: Se R se posicionar em u, considere sua cópia em v, de maneira que seus próximos movimentos permitidos em G serão permitidos em $G \setminus u$.

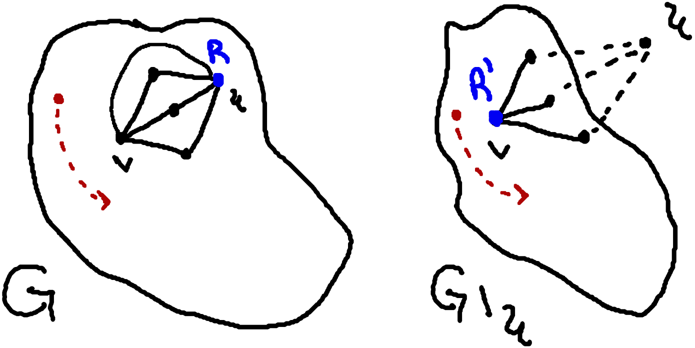


Figura: Cada movimento do Robber em $G \setminus u$ nos determina um posicionamento do Cop mediante sua estratégia vencedora. Realize o mesmo movimento em G.

Figura: Em algum momento, o Robber estará prestes a perder o jogo em $G \setminus u$ (pois estamos usando a estratégia vencedora do Cop nesse grafo). Isso significa que todos os seus vizinhos são vizinhos do Cop (ou o próprio Cop) nesse grafo.

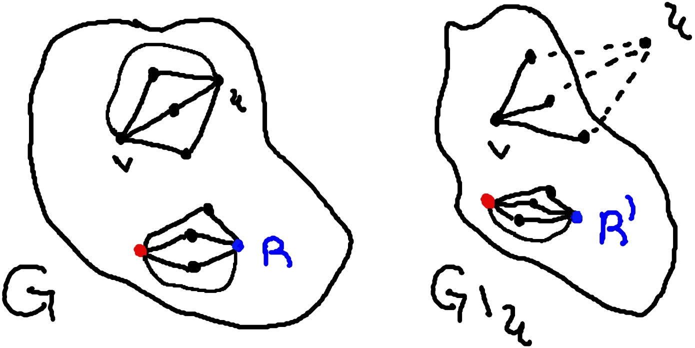
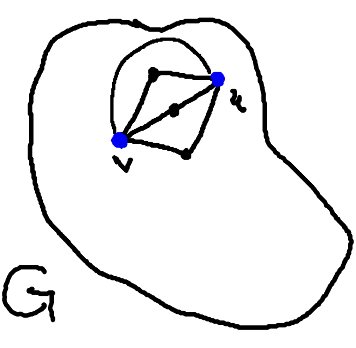


Figura: Se o Robber não se encontra em v no grafo $G \setminus u$, todos os vizinhos do Robber serão vizinhos do Cop em G. Isto é, o Cop garantiu sua vitória.



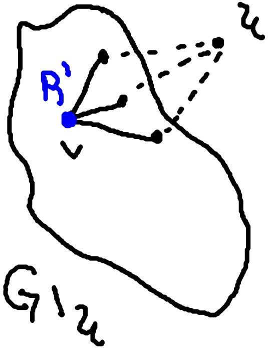


Figura: Se o Robber se encontra em v no grafo $G \setminus u$, não sabemos sua posição no grafo G: ele pode estar no vértice v ou no vértice u.

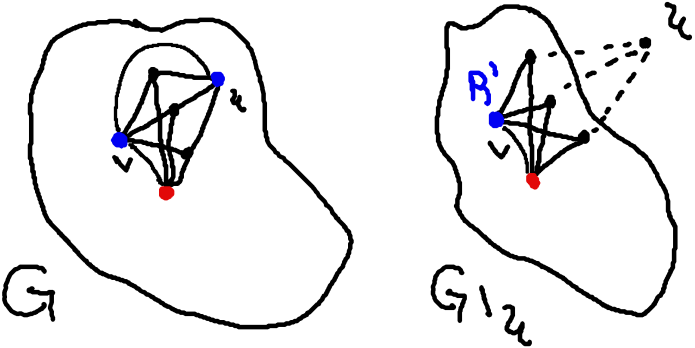


Figura: Mas isso não importa. Qualquer movimento que o Robber fizer, o Cop consegue capturá-lo ou capturá-lo após mais uma rodada ao se mover para v.

Ou seja...

Proposição ([1])

Um grafo finito é cop-win se, e somente se, é desmanchável.

Proposição ([1])

Um grafo finito é cop-win se, e somente se, é desmanchável.

Em particular, um Cop ganha o jogo no seguinte grafo:

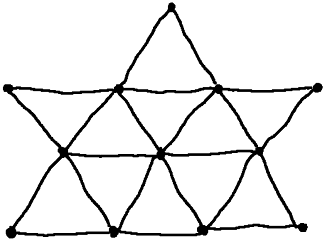


Figura: Um grafo desmanchável (e portanto cop-win).

☕ Se G é um grafo planar, sabe-se que $c(G) \leq 3$. Há uma conjectura de que, se G é um grafo mergulhado em uma supérficie de genus g sem que haja intersecção de suas arestas, então $c(G) \leq g + 3$. A melhor estimativa até o momento é $c(G) \leq \lfloor \frac{3g}{2} \rfloor + 3$.

Menu de Problemas em Aberto

☕ Se G é um grafo planar, sabe-se que $c(G) \leq 3$. Há uma conjectura de que, se G é um grafo mergulhado em uma supérficie de genus g sem que haja intersecção de suas arestas, então $c(G) \leq g + 3$. A melhor estimativa até o momento é $c(G) \leq \lfloor \frac{3g}{2} \rfloor + 3$.

☕ Se G é um grafo finito conexo com n vértices, pergunta-se se $c(G) = O(\sqrt{n})$. Isto é, se n é suficientemente grande, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $c(G) \leq d\sqrt{n}$. Essa é a **conjectura de Meyniel**, proposta em 1985.

Menu de Problemas em Aberto

- Se G é um grafo planar, sabe-se que $c(G) \leq 3$. Há uma conjectura de que, se G é um grafo mergulhado em uma supérficie de genus g sem que haja intersecção de suas arestas, então $c(G) \leq g + 3$. A melhor estimativa até o momento é $c(G) \leq \lfloor \frac{3g}{2} \rfloor + 3$.
- Se G é um grafo finito conexo com n vértices, pergunta-se se $c(G) = O(\sqrt{n})$. Isto é, se n é suficientemente grande, existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $c(G) \leq d\sqrt{n}$. Essa é a **conjectura de Meyniel**, proposta em 1985.
- Existem grafos infinitos que sejam cop-wins mas "não-triviais", isto é, que não sejam árvores com ramos de comprimento limitado ou grafos que possuem um vértice adjacente a todos os demais?

Menu de Variantes do Jogo

☕ Aproximando-se mais do Jogo Interpol, é possível estudar quais estratégias os Cops devem desenvolver quando a localização do Robber não é precisa, mas existem alarmes espalhados pelo grafo [2].

- Aproximando-se mais do Jogo Interpol, é possível estudar quais estratégias os Cops devem desenvolver quando a localização do Robber não é precisa, mas existem alarmes espalhados pelo grafo [2].
- O Jogo *Firefighter*, um bombeiro deve proteger vértices de um incêndio que assola o grafo. Ele pode escolher quais vértices proteger, exceto os que estão pegando fogo. Vértices já queimados não sofrem novamente com o incêndio. O jogo pode ser utilizado para simular contágio de doenças [3].

Menu de Variantes do Jogo

- Aproximando-se mais do Jogo Interpol, é possível estudar quais estratégias os Cops devem desenvolver quando a localização do Robber não é precisa, mas existem alarmes espalhados pelo grafo [2].
- O Jogo *Firefighter*, um bombeiro deve proteger vértices de um incêndio que assola o grafo. Ele pode escolher quais vértices proteger, exceto os que estão pegando fogo. Vértices já queimados não sofrem novamente com o incêndio. O jogo pode ser utilizado para simular contágio de doenças [3].
- Na versão quântica do jogo de Cops and Robber, podemos ter o uso de informação perfeita, mas ainda assim alguns grafos deixam de ser cop-win [4].

Referências Bibliográficas

- Anthony Bonato e Richard Nowakowski. *The Game of Cops and Robbers on Graphs*. Set. de 2011. DOI: 10.1090/stml/061.
- Nancy Clarke e Richard Nowakowski. "Cops, Robber, and Photo Radar.". Em: *Ars Comb.* 56 (jul. de 2000).
- Stephen Finbow e Gary Macgillivray. "The Firefighter Problem: A survey of results, directions and questions". Em: *The Australasian Journal of Combinatorics [electronic only]* 43 (fev. de 2009).
- Adam Glos e Jarosław Miszczak. "The role of quantum correlations in Cop and Robber game". Em: *Quantum Studies: Mathematics and Foundations* (fev. de 2017). DOI: 10.1007/s40509-017-0148-4.