Colorindo a Reta Real

Thales Sarinho

ICMC - USP

Julho 2020

Introdução

O problema original é bem conhecido, ele consiste em achar a menor quantidade de cores para colorir todos os pontos do plano tais que quaisquer dois pontos que distam 1 entre si não possuam a mesma cor. Esse problema ainda está em aberto e sabemos apenas que o número de cores está entre 4 e 7.
Nesse contexto, ao tentar transpor o problema para a reta, obtemos um resultado razoavelmente simples e satisfatório, a quantidade de cores para que dois pontos quaisquer que distem 1 entre si não possuam a mesma cor é 2. Mas quantas cores são necessárias para evitar cobrir, com a mesma cor, pontos cuja distância está em um conjunto D?

Definições

Definição

Chamaremos de *Coloração Própria* uma coloração de vértices tal que quaisquer dois pontos adjacentes não possuem a mesma cor.

Definição

Chamaremos de *Número Cromático* o menor número de cores necessárias para termos uma coloração própria do grafo.

Definição

Para um conjunto de valores positivos D, definimos $G(\mathbb{R}, D)$ como o grafo cujos vértices são os pontos da reta, dizemos que $x, y \in \mathbb{R}$ são adjacentes se $|x - y| \in D$.

Intervalos fechados como conjunto distância

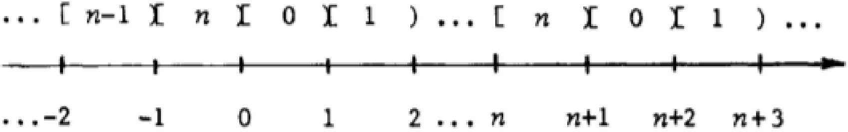
Vamos considerar $D = [1, \delta]$, $\delta > 1$. Denotaremos $\mathbb{R}(\delta)$ como $G(\mathbb{R}, D)$ e $\chi(\delta)$ seu número cromático

Lema

Se $1 \leq \delta \leq n$, então $\chi(\delta) \leq n + 1$, para $n \in \mathbb{N}$

Demonstração

Considere uma coloração com as cores $0, 1, ..., n$ de forma que, para cada $x \in \mathbb{R}$, temos $\lfloor x \rfloor \equiv i \pmod{n+1}$.



Suponha que não seja uma coloração própria de $\mathbb{R}(\delta)$, então existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $|x-y| \in [1,\delta] \subset [1,n]$ e $\lfloor x \rfloor \equiv i \pmod{n+1}$, $\lfloor y \rfloor \equiv i \pmod{n+1}$, para o mesmo $i \in \{1, ..., n\}$. Note que, dessa forma $|x-y| < 1$ e, portanto, $|x-y| \notin [1,\delta]$. Logo, essa é uma coloração própria para $\mathbb{R}(\delta)$ e assim, $\chi(\delta) \leq n+1$.

Teorema

Se $1 \leq \delta$ e $n-1 < \delta \leq n$, então $\chi(\delta) = n+1$, para $n \in \mathbb{N}$

Demonstração

Vamos demonstrar por indução. Para o caso $n = 1$, temos $\delta = 1$ e já sabemos que $\mathbb{R}(1)$ precisa de pelo menos 2 cores, pelo Lema anterior, temos $\chi(\delta) = 2$.

Suponha que $n \geq 2$ e $n-1 < \delta \leq n$, considere uma coloração própria de $\mathbb{R}(\delta)$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \delta - (n-1)$, podemos escolher $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $0 < y - x < \epsilon$ de forma que x e y possuam cores distintas. Defina $v_i = i + 1$, para $i \in \{1, ..., n-1\}$. Note que $v_i - y = i \leq n - 1 < \delta$, então $v_i - x < v_i - y + \epsilon = i + \epsilon$, como $i + \epsilon < n - 1 + \delta - (n-1) = \delta$, temos $v_i - x < \delta$, para $i \in \{1, ..., n-1\}$. Dessa forma, com exceção de x e y, como a distância entre quaisquer dois pontos do conjunto $\{x, y, v_1, ..., v_{n-1}\}$ é pelo menos 1 e menor que δ todos os pares do conjunto são adjacentes e devem ter cores distintas na coloração própria. Logo, $\chi(\delta) \geq n+1$ e já sabemos que $\chi(\delta) \leq n+1$, então $\chi(\delta) = n+1$.

Subgrafos cromáticos

Vamos estudar que subgrafos de $\mathbb{R}(\delta)$ são responsáveis pelo seu número cromático.

Definição

Um *subgrafo cromático* é o menor subgrafo de um grafo G que possui o mesmo número cromático de G.

Definição

Chamamos de *grafo completo*, o grafo cujos vértices são adjacentes a qualquer outro vértice do grafo. Vamos denominar tais grafos por K_n, onde $n \in \mathbb{N}$ é a quantidade de vértices.

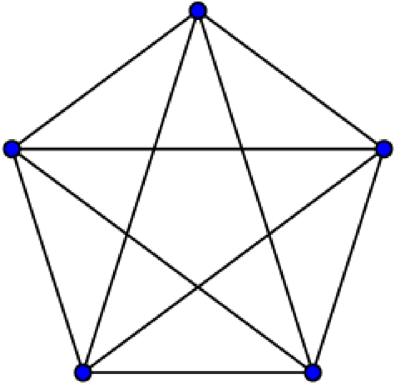


Figura: Grafo completo K_5

Teorema

Se $n \leq \delta < n+1$, então o maior grafo completo de $\mathbb{R}(\delta)$ é K_{n+1}.

Demonstração

Como $\delta \geq n$, os vértices $0, 1, ..., n$ induzem o grafo completo K_{n+1}. Por outro lado, suponha que $\mathbb{R}(\delta)$ contenha o grafo completo K_m, $m \in \mathbb{N}$. Considere os vértices $v_1 > v_2 > ... > v_m$, como $v_i - v_{i+1} \in [1, \delta]$ para $i \in \{1, ..., m-1\}$, então

$m - 1 \leq (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + ... + (v_{m-1} - v_m) = v_1 - v_m \leq \delta$.

Portanto, se $\mathbb{R}(\delta)$ contém K_m é necessário que $m - 1 \leq \delta$, como $\delta < n + 1$, ou seja, para qualquer $m > n + 1$, $\mathbb{R}(\delta)$ não pode conter K_m. Logo, K_{n+1} é o maior grafo completo de $\mathbb{R}(\delta)$.

Corolário

Se $\delta = n$, então o grafo completo K_{n+1} é o menor subgrafo cromático de $\mathbb{R}(\delta)$.

Definição

Chamamos de ciclo um grafo que está conectado numa rede fechada. Denotamos tal grafo por C_n, para $n \in \mathbb{N}$.

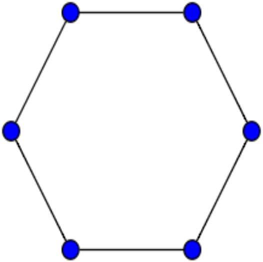


Figura: Ciclo C_6

Teorema

O menor ciclo ímpar em $\mathbb{R}(\delta)$ é C_3, quando $\delta \geq 2$. O menor ciclo ímpar é C_{2n+1}, quando $1 + \dfrac{1}{n} \leq \delta \leq 1 + \dfrac{1}{n-1}$, para $n \geq 2$.

Demonstração

Já sabemos pelo teorema anterior que, se $\delta \geq 2$, C_3 é um subgrafo de $\mathbb{R}(\delta)$. Suponha que $\mathbb{R}(\delta)$ contém um cíclo ímpar $C_{2n+1} \doteq v_0 v_1 ... v_{2n} v_0$ e note que $(v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + ... + (v_{2n-1} - v_{2n}) + (v_{2n} - v_0) = 0$, então a soma das distâncias entre os pontos do ciclo é zero. Como o ciclo é simétrico, podemos assumir, sem perda de generalidade, que pelo menos $n+1$ dessas distâncias são positivas. É claro que, a soma dessas distâncias que assumem valores positivos é maior ou igual que $n+1$, enquanto a soma das distâncias que assumem valores negativos, em valor absoluto, é no máximo $n\delta$. Portanto, $n + 1 \leq n\delta$ e assim, $\delta \geq 1 + \dfrac{1}{n}$

Agora, defina para $n \geq 2$

- $u_i \doteq i(\delta - 1)$, quando $i \in \{0, ..., n-1\}$
- $u_i \doteq 2$, quando $i = n$
- $w_i \doteq u_i - 1$, quando $i \in \{0, ..., n\}$

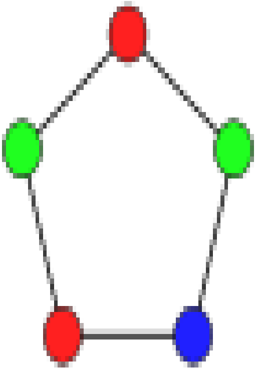
Portanto, temos $u_i - w_i = 1$, u_i e w_i são adjacentes em $\mathbb{R}(\delta)$.
Analogamente, u_0 e w_n são adjacentes, já que $u_0 - w_n = 1$. Também podemos escrever $u_i - w_{i-1} = i(\delta - 1) - [(i-1)(\delta - 1) - 1] = \delta$, indicando que u_i e w_{i-1} são adjacentes. Note que, supondo que u_n e u_{n-1} são adjacentes, temos um ciclo com $2n+1$ vértices e podemos escrevê-lo como $C_{2n+1} = u_0 w_0 u_1 w_1 ... u_{n-1} w_{n-1} u_n w_n u_0$.
A condição necessária para que u_n e u_{n-1} sejam adjacentes é $u_n - u_{n-1} \in [1, \delta]$, ou seja,

$$1 \leq u_n - u_{n-1} = 2 - (n-1)(\delta - 1) \leq \delta \implies \delta \leq 1 + \frac{1}{n-1}$$

Logo, $1 + \frac{1}{n} \leq \delta \leq 1 + \frac{1}{n-1}$.

Corolário

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o ciclo ímpar C_{2n+1} é o subgrafo cromático de menor ordem quando $\delta = 2$, para $n = 1$, ou quando $1 + \frac{1}{n} \leq \delta \leq 1 + \frac{1}{n-1}$, para $n \geq 2$.



Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, definimos $G(m,n)$ como o grafo que contém $m+1$ vértices distintos $u_0, u_1, ..., u_m$ e m subgrafos distintos $H_1, H_2, ..., H_m$, cada um, cópia de K_n tal que u_0 é adjacente a u_m e, ainda, cada vértice de H_i é adjacente a u_{i-1} e u_i, para $i \in \{1, ..., m\}$.

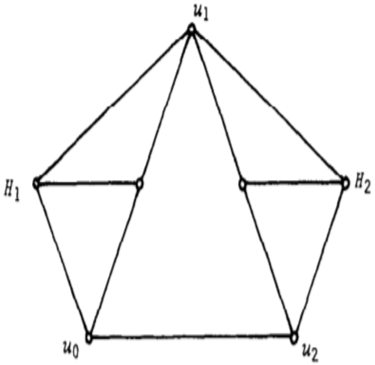


Figura: O grafo $G(2,2)$

Grafos Cor-crítico de $\mathbb{R}(\delta)$

Definição

Chamaremos um grafo de *Cor-crítico* se seu único subgrafo cromático é ele mesmo.

Lema

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, o grafo $G(m, n)$ é cor-crítico, com número cromático $n + 2$

Demonstração

Suponha que exista uma coloração própria para $G(m, n)$ com $n + 1$ cores. Suponha, sem perda de generalidade, que o vértice u_0 tem cor 0, e os vértices $h_1, h_2, ..., h_n$ de H_1 tem as cores $1, 2, ..., n$, respectivamente. Por definição, o vértice u_1 é adjacente a todos os vértices de H_1, então u_1 precisa ter cor 0.

Repetindo o argumento, sabemos que u_m tem cor 0, contradizendo a nossa hipótese de que tinhámos uma coloração própria. Portanto, uma coloração própria de $G(m, n)$ exige pelo menos $n + 2$ cores. Para ver que $n + 2$ cores é suficiente, note que podemos colorir o conjunto $H_i u_i u_{i-1}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ com $n + 2$ cores, agora basta cobrir esses conjuntos para todo i. Dessa forma, obtemos uma coloração própria para $G(m, n)$ com $n + 2$ cores. Logo, o número cromático de $G(m, n)$ é $n + 2$.
Para finalizar, note que se retirarmos qualquer aresta de $G(m, n)$, então o número de cores necessárias para colorir o grafo propriamente cai para $n + 1$. Assim, $G(m, n)$ é cor-crítico.

Teorema

Se $m, n \geq 2$ e $n + \dfrac{1}{m} \leq \delta < n + \dfrac{1}{m-1}$, então $G(m,n)$ é um subgrafo cromático de $\mathbb{R}(\delta)$.

Demonstração

Vamos mostrar o caso $n = 2$. A hipótese em δ implica que $\delta > 2$, defina

- $u_i \doteq i(\delta - 2)$, para $i \in \{0, \ldots, m-1\}$
- $u_i \doteq 1$, para $i = m$
- $v_i \doteq u_i - 1$, para $i \in \{1, \ldots, m-1\}$
- $v_i \doteq 2$, para $i = m$
- $w_i \doteq u_i - 2$, para $i \in \{1, \ldots, m-1\}$
- $w_i \doteq 3$, para $i = m$

Esses vértices são todos distintos, dado que $u_{m-1} < u_m$ e $v_{m-1} < u_0$, isso nos dá $(m-1)(\delta-2) < 1 \implies \delta < 3 + \dfrac{1}{m-1}$, que é garantido já que, por hipótese, $\delta < 2 + \dfrac{1}{m-1}$.

Note que v_i e w_i são adjacentes, pois $v_i - w_i = 1$. Esses pares induzem o grafo completo H_i, uma cópia de K_2, para todo $i \in \{1, ..., m\}$. Note também que $u_i - v_i = 1$ e $u_i - w_i = 2$, então u_i é adjacente a v_i e w_i, ou seja u_i é adjacente a H_i, para $i \in \{1, ..., m\}$. Também $u_m - u_0 = 1$, então u_m e u_0 são adjacentes. Como $u_{i-1} - v_i = \delta - 1$ e $u_{i-1} - w_i = \delta - 2$, temos u_{i-1} adjacente a H_i, para $i \in \{1, ..., m-1\}$.
Finalmente, os vértices que definimos pertencem ao grafo $G(m, 2)$, dado que u_{m-1} seja adjacente a H_m, para que essa condição seja satisfeita é necessário que

$$1 \leq v_m - u_{m-1} = 2 - (m-1)(\delta - 2) \text{ e } \delta \geq w_m - u_{m-1} = 3 - (m-1)(\delta - 2)$$

Assim, como $(m-1)(\delta-2) < 1$, é necessário que $\delta \leq 2 + \dfrac{1}{m-1}$ e $\delta > 2$ e já sabemos que essas duas condições são válidas. Podemos ver que $2 < \delta \leq 3$, então o número cromático de $\mathbb{R}(\delta)$ é 4 e, pelo lema, $G(m, 2)$ é subgrafo cromático de $\mathbb{R}(\delta)$.

Corolário

Para qualquer $\delta \geq 1$, existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $G(m, n)$ é um subgrafo cromático de $\mathbb{R}(\delta)$.

Demonstração

Basta notar que se $\delta = n$, então para $m = 1$, $G(1, n)$ é o grafo completo K_{n+2}. Caso $1 < \delta < 2$, para $n = 1$, $G(m, 1)$ é o ciclo ímpar C_{2n+1} e o resultado segue. Os demais casos seguem do último teorema.

Intervalos abertos como conjunto distância

Vamos considerar $D = (1, \delta)$, $\delta > 1$. Denotaremos $\mathbb{R}_0(\delta)$ como $G(\mathbb{R}, D)$ e $\chi_0(\delta)$ seu número cromático.
Se $\delta = 1$, então $D = \emptyset$, então $\mathbb{R}_0(1)$ não possui arestas e $\chi_0(1) = 1$.

Teorema

Se $1 \leq \delta$ e $n - 1 < \delta \leq n$, então $\chi_0(\delta) = n + 1$, para $n \in \mathbb{N}$

Demonstração
Como $\mathbb{R}_0(\delta)$ é subgrafo próprio de $\mathbb{R}(\delta)$, temos $\chi_0(\delta) \leq \chi(\delta) = n + 1$.
Resta mostrar que $\chi_0(\delta) \geq n + 1$.
Considere $n - 1 < \delta' < \delta$, já sabemos que existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $G(r, s)$ é subgrafo cromático de $\mathbb{R}(\delta')$. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $1 < c \leq \dfrac{\delta}{\delta'}$.

Agora, multiplicamos todos os vértices de $G(r,s)$ por c, dessa forma, o novo grafo mantém sua forma e cada aresta tem tamanho entre c e $c\delta^{'}$. Portanto, o tamanho de suas arestas está estritamente entre 1 e δ, ou seja, $G(r,s)$ aumentado pelo fator c é subgrafo de $\mathbb{R}_0(\delta)$ e assim, $\chi_0(\delta) \geq \chi(\delta^{'}) = n+1$.

Lema

Seja $d \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que o grafo finito G é subgrafo de $\mathbb{R}(\delta)$, quando $\delta > d$. Se $\delta > d$, então G é subgrafo de $\mathbb{R}_0(\delta)$.

Demonstração

Para qualquer $\delta > d$, escolha $d < \delta^{'} < \delta$. Assim, $\mathbb{R}(\delta^{'})$ contém o subgrafo finito G. Agora, seguindo os mesmos passos na demonstração do teorema passado, basta trocarmos $G(r,s)$ por G, dessa forma, G será um subgrafo de $\mathbb{R}_0(\delta)$.

Teorema

Seja $d \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\mathbb{R}(\delta)$ contém um subgrafo isomorfo ao grafo finito G, quando $\delta > d$, mas não quando $\delta < d$. Então $\mathbb{R}_0(\delta)$ tem um subgrafo isomorfo a G se, e somente se, $\delta > d$.

Demonstração

Se $\delta > d$, pelo lema anterior temos o resultado.
Reciprocamente, suponha que $\mathbb{R}_0(\delta)$ contenha um subgrafo isomorfo a G.
Seja δ' a maior distância que uma aresta de G assume, claramente $\delta' < \delta$.
No entanto, note que esse subgrafo está contido em $\mathbb{R}(\delta')$, então $\delta' \geq d$.
Portanto, $\delta > d$.

Corolário

Se $\delta > 1$, nenhum grafo completo é subgrafo cromático de $\mathbb{R}_0(\delta)$.

Demonstração

Já sabemos que K_{n+1} é um subgrafo completo de $\mathbb{R}(\delta)$ quando $\delta \geq n$, o último teorema garante que K_{n+1} é subgrafo de $\mathbb{R}_0(\delta)$ quando $\delta > n$. Logo, como $\chi_0(\delta) > n + 1$ quando $\delta > n$, temos o que queríamos.

Teorema

Se $m \geq 2$, $n \geq 1$ e $n + \dfrac{1}{m} < \delta \leq n + \dfrac{1}{m-1}$, então $G(m, n)$ é um subgrafo cromático de $\mathbb{R}_0(\delta)$.

Corolário

Seja $\delta > 1$, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $G(m, n)$ é um subgrafo cromático de $\mathbb{R}_0(\delta)$.

Referências

EGGLETON, R. B; ERDÖS, P; SKILTON, D. K. Colouring the Real Line. Journal of combinatorial theory, Australia, Series B 39, 86-100, February, 1984.