1 Conjuntos numéricos

- **Números naturais**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

– Soma e produto definidos naturalmente. Problemas nas operações inversas!

- **Números inteiros**

$$\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

– Podemos definir a inversa da soma, não do produto.

- **Números racionais**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{N}; \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \Leftrightarrow ad = cb \right\}$$

– Soma, produto e ordem definidos assim:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$0 \leq \frac{a}{b} \text{ se } a \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ se } 0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

(e $a \geq b$ significa $b \leq a$)

– Podemos definir a inversa da soma e do produto:

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é um **Corpo ordenado**....

♡

.... mas $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ não é "**completo**"!

$$\sqrt{2} \in ?????$$

– Note: Podemos identificar $\mathbb{Z}$ com um subconjunto de $\mathbb{Q}$ de maneira compatível com as operações e a ordem:

$$\mathbb{Z} \ni a \mapsto \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}.$$

– Precisamos: de um conjunto que "estenda"de modo natural $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ e que seja "completo".

$\heartsuit$

2 Definição de Corpo

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$, isto é, um conjunto $\mathbb{K}$ com uma operação $+$ dita *soma* e outra operação $\cdot$ dita *produto*, é um **Corpo** se valem as propriedades:

(S1) (associativa da soma) $(x+y)+w = x+(y+w)$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$;

(S2) (comutativa da soma) $x + y = y + x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;

(S3) (elemento neutro da soma) existe $z \in \mathbb{K}$ tal que $x+z = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$;

(S4) (oposto da soma) para todo $x \in \mathbb{K}$ existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = z$;

(P1) (associativa do produto) $(x \cdot y) \cdot w = x \cdot (y \cdot w)$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$;

(P2) (comutativa do produto) $x \cdot y = y \cdot x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;

(P3) (elemento neutro do produto) existe $u \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) (inverso do produto) para todo $x \in \mathbb{K}$ com $x \neq z$, existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = u$;

(D) (distributiva) $(x + y) \cdot w = x \cdot w + y \cdot w$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$.

$\boxed{\text{Algumas propriedades que seguem das propriedades de corpo:}}$

(a). os neutros são únicos (logo indicaremos com 0 e 1);

(b). oposto e inverso são únicos (logo indicaremos com $\overline{x}$ e x^{-1});

(c). $x \cdot 0 = 0$ e $\overline{x} = \overline{1} \cdot x$

(d). (cancelamento da soma) $x + w = y + w$ implica $x = y$;

(e). (cancelamento do produto) $x \cdot w = y \cdot w$ sendo $w \neq 0$ implica $x = y$;

(f). (anulamento do produto) $x \cdot w = 0$ implica $x = 0$ e/ou $w = 0$;

Exemplos: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$ (corpo)
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_4$ (não corpo)

3 Definição de Corpo ordenado

$(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$, isto é, um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ com uma relação $\leq$ dita *ordem*, é dito **Corpo ordenado** se

- valem S1,..S4,P1,..,P4,D e também

(O0) (totalidade da ordem) para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, vale $x \leq y$ e/ou $y \leq x$;

(O1) (reflexividade da ordem) para qualquer $x \in \mathbb{K}$, vale $x \leq x$;

(O2) (antissimetria da ordem) se $x, y \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(O3) (transitividade da ordem) se $x, y, w \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $y \leq w$ então $x \leq w$;

(OS) (relação soma-ordem) se $x, y, w \in \mathbb{K}$ e $x \leq y$ então $x + w \leq y + w$;

(OP) (relação produto-ordem) se $x, y, w \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $w \geq 0$ então $x \cdot w \leq y \cdot w$;

$\boxed{\text{Algumas propriedades que seguem das propriedades de corpo ordenado:}}$

(a). $x \leq y$ e $z \leq w$ implica $x + z \leq y + w$

(b). $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq z \leq w$ implica $x \cdot z \leq y \cdot w$

(c). $w \geq 0$ se e só se $\overline{w} \leq 0$;

(d). $x \leq y$ e $w \leq 0$ implica $x \cdot w \geq y \cdot w$

(e). $0 \leq 1$

Algumas outras propriedades que seguem das propriedades de corpo ordenado (aqui $x < y$ significa $x \leq y$ com $x \neq y$)

(f). $x < y$ e $z \leq w$ implica $x + z < y + w$

(g). $z > 0$ e $x < y$ implica $x \cdot z < y \cdot z$

(h). $z < 0$ e $x < y$ implica $x \cdot z > y \cdot z$

(i). $0 < x < y$ implica $0 < y^{-1} < x^{-1}$ e $\overline{y} < \overline{x} < 0$

(j). $y < x < 0$ implica $x^{-1} < y^{-1} < 0$ e $0 < \overline{x} < \overline{y}$

(k). $x < 0 < y$ implica $x^{-1} < 0 < y^{-1}$

(l). $0 < 1$

Exemplos: $\mathbb{Q}$

♡

4 Definição de inf, sup e completeza

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $A \subseteq \mathbb{K}$

- ▪ se $x \in \mathbb{K}$ é tal que $x \geq a\ \forall\, a \in A$ então x é dito **cota superior de A**
  ▪ se $x \in \mathbb{K}$ é tal que $x \leq a\ \forall\, a \in A$ então x é dito **cota inferior de A**
- ▪ se existir uma cota superior de A então dizemos que A é **limitado superiormente**
  ▪ se existir uma cota inferior de A então dizemos que A é **limitado inferiormente**
  ▪ se ambas as anteriores acontecem dizemos que A é **limitado**
- ▪ **supremo de A** é a menor das cotas superiores de A (se existir)
  ▪ **ínfimo de A** é a maior das cotas inferiores de A (se existir)

Exemplo (em $\mathbb{Q}$): $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$; $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \text{ e } q^2 < 2\}$; $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 2\}$

Dizemos que o corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é **completo** se todo subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{K}$ e todo subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{K}$.

5 Cortes de Dedekind

Um **corte** é um subconjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ tal que

- $\alpha \neq \emptyset$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$ (*faz com que os cortes sejam limit. sup.*)
- se $p \in \alpha$ e $q \in \mathbb{Q}$, $q < p$, então $q \in \alpha$ (*todos os racionais a esquerda de p estão em α*)
- se $p \in \alpha$, então existe $q \in \alpha$ tal que $p < q$ (*α não contém o maior elemento*).

Exemplos:
1. $\alpha = \{p \in \mathbb{Q} : p < 2\}$ é corte
2. $\beta = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 2\}$ não é corte
3. $\gamma = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq 0 \text{ ou } p^2 < 2\}$ é corte

O conjunto de todos os cortes será denotado por $\mathbb{R}$.

Em $\mathbb{R}$ precisamos definir as operações de soma, produto e uma relação de ordem:

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos:

- **relação de ordem** $\leq$:
  $\alpha \leq \beta$ se, e somente se, $\alpha \subseteqq \beta$
- **soma** $+$:
  $\alpha + \beta := \{p = q + r : q \in \alpha, r \in \beta\}$,
  - $\alpha_0 := \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ (elemento neutro)
- **produto** $\cdot$:
  - se $\alpha, \beta > \alpha_0$, então
    $$\alpha \cdot \beta := \{p \in \mathbb{Q} : p < 0 \textit{ ou } p = qr \textit{ com } q \in \alpha,\ r \in \beta \ \textit{ e } q, r \geq 0\}$$
  - se $\alpha > \alpha_0$ e $\beta < \alpha_0$, então $\alpha \cdot \beta := \overline{\alpha \cdot \overline{\beta}} = -(\alpha(-\beta))$
  - se $\alpha < \alpha_0$ e $\beta > \alpha_0$, então $\alpha \cdot \beta := \overline{\overline{\alpha} \cdot \beta}$
  - se $\alpha < \alpha_0$ e $\beta < \alpha_0$, então $\alpha \cdot \beta := \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$

Números reais: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ será um **Corpo ordenado completo**.

– Podemos identificar $\mathbb{Q}$ com um subconjunto de $\mathbb{R}$ de maneira compatível com as operações e a ordem:

$$\mathbb{Q} \ni r \mapsto \alpha_r := \{q \in \mathbb{Q} : q < r\} \in \mathbb{R}$$

6 Definição e notação de intervalos

Sejam $a < b$ números reais: chamamos de **intervalos em $\mathbb{R}$** os seguintes conjuntos:

- intervalos limitados:
  - $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: **interv. limitado fechado**
  - $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: **interv. limitado aberto**
  - $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$: **interv. limitado semifechado (ou semiaberto)**
  - $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$: **interv. limitado semifechado (ou semiaberto)**
- intervalos não limitados:
  - $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$: **semireta fechada**
  - $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$: **semireta aberta**
  - $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$: **semireta fechada**
  - $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$: **semireta aberta**
  - $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$: **reta real**

Exemplos (em $\mathbb{R}$): determine o $\sup A$ e o $\inf A$, caso existam.

1. $A = [1,9]$
2. $A = (-2,1)$
3. $A = (-\infty,0)$
4. $A = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
5. $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0 \ e \ q^2 < 2\}$
6. $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$