A função F é uma *primitiva* de f em I, quando $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

LEMBRE-SE:

substituição (mudança de variável):

$$\int f(g(x))g'(x)dx \underset{du=g'(x)dx}{\overset{u=g(x)}{=}} \int f(u)du$$

ALGUMAS PRIMITIVAS SIMPLES:

$$\int kdx = kx+c; \quad \int \sin x dx = -\cos x+c; \quad \int \cos x dx = \sin x+c; \quad \int e^x dx = e^x+c \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{-1\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c; \quad \alpha \neq -1, \quad \begin{cases} x \in [0,\infty), & \alpha = 1/p, \ \ p \text{ par} \\ x \in \mathbb{R}, & \alpha = 1/p, \ \ p \text{ ímpar} \\ x \in (0,\infty), & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(x) + c, & x \in (0,\infty) \\ \ln(-x) + c, & x \in (-\infty, 0) \end{cases} \qquad \therefore \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \ \ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x dx \overset{*}{=} \sec x + c; \qquad \int \sec^2 x dx \overset{*}{=} \operatorname{tg} x + c \quad (\text{* em apropriados intervalos})$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, \quad x \in (-1,1); \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + c \quad x \in (-1,1);$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + c, \quad x > 1;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = senh^{-1}x + c \quad x \in \mathbb{R}; \quad senh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = cosh^{-1}x + c, \quad x > 1; \quad cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$$

$$\int \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = sech^{-1}x + c, \quad 0 < x < 1; \quad sech^{-1}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = tgh^{-1}x + c \quad |x| < 1; \quad tgh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1;$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = cotgh^{-1}x + c, \quad |x| > 1; \quad cotgh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) \quad |x| > 1$$

NOTE:

$$\arcsin x + c_1 \overset{x\in(-1,1)}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x\in(-1,1)}{=} -\arccos x + c_2,$$

De fato,

a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é contínua em $(-1,1)$;

portanto integrável em qualquer subintervalo fechado de $[-1,1]$.

Além disso ambas funções $\arcsin x$ e $-\arccos x$ são primitivas de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ em $(-1,1)$ e vale:

$$\arcsin x = -\arccos(x) + c$$

pois:

$\star$ $y = \arcsin x \iff x = \sin y$

$\star$ $z = -\arccos x \iff x = \cos(-z)$

o que implica $\sin y = \cos z$ ou seja $y = z + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ASSIM, por exemplo (você aprenderá no curso SMA354-Cálculo 2):

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(1/2) - \arcsin(-1/2) = -\arccos(1/2) - (-\arccos(-1/2));$$

$$tgh^{-1}(x) + c_1 \overset{|x|<1}{=} \int \frac{1}{1-x^2}dx \overset{|x|>1}{=} cotgh^{-1}(x) + c_2,$$

pois:

- a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$;

- a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ é contínua em qualquer subintervalo fechado de $(-1,1)$ ou de $(-\infty,1)$ ou de $(1,\infty)$.

portanto:

- a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ é integrável em qualquer subintervalo fechado de $(-1,1)$ ou de $(-\infty,1)$ ou de $(1,\infty)$.

- a função $tgh^{-1}(x)$ é uma primitiva de f em $(-1,1)$, enquanto a função $cotgh^{-1}(x)$ é uma primitiva de f em $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

MAS, neste caso, não faz sentido compararmos as funções tgh^{-1} com $cotgh^{-1}$ pois elas possuem domínios distintos!

ASSIM, por exemplo (você aprenderá no curso SMA354-Cálculo 2):

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2}dx = tgh^{-1}(1/2) - tgh^{-1}(-1/2); \quad \int_{2}^{3} \frac{1}{1-x^2}dx = cotgh^{-1}(3) - cotgh^{-1}(2)$$