Conteúdo

Vetores

Objetivo

Apresentar uma definição formal de vetor e propriedades pertinentes. Aula 1

V1 Introdução

V1.1 Geometria Euclideana

Euclides de Alexandria ($\sim$ 330 a.c.):
- reconhecido como o primeiro a tentar abordar de uma maneira sistemática o estudo da Geometria Plana: escreveu o livro "Elementos";
- assumiu 5 postulados (axiomas) que não são completos.

David Hilbert (1862-1943, Hilbert's foundations of geometry):
- apresentou novo conjunto de axiomas para a geometria e organizou em cinco grupos:

I. Axiomas de incidência (1–7)
II. Axiomas de ordem (1–5)
III. Axioma das paralelas (de Euclides)
IV. Axiomas de congruência (1–6)
V. Axioma de Continuidade (de Archimedes)

Como definir "ponto", "reta" ou "plano"?

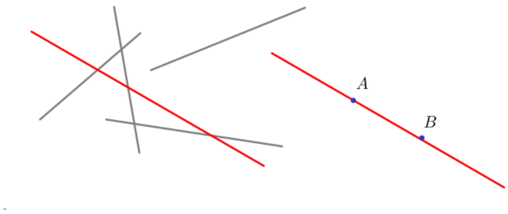
A geometria é baseada em:

Conceitos primitivos (ou termos indefinidos): ponto, reta, plano, pertence a, entre, congruente.

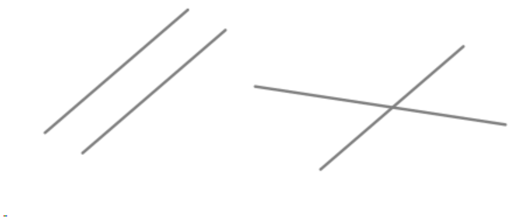
Axiomas: um conjunto simples, completo e independente de postulados.

Termos definidos e afirmações com demonstrações: definição, lema, proposição, teorema, corolário.

Exemplo V1.1.
Axioma I1. Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

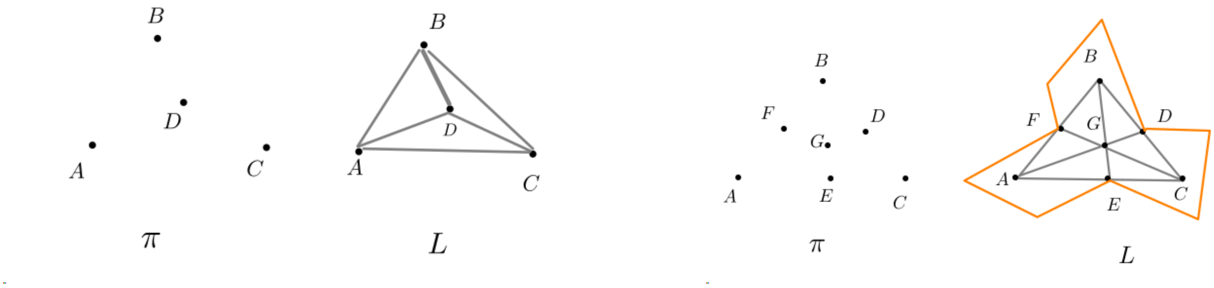


Proposição. *Duas retas distintas se intersectam em no máximo um ponto.*



Exemplo V1.2 (Modelos de planos e retas). O conjunto π com as retas L satisfazem o Axioma 1:

1. $\pi = \{A, B, C, D\}$ e $L = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$.
2. $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ e $L = \{AFB, BDC, CEA, AGD, BGE, CGF, DEF\}$.



Dizemos que um conjunto de pontos é **colinear** (ou os **pontos são colineares**) se existe uma reta que contém o conjunto.

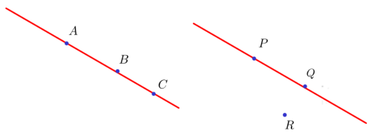
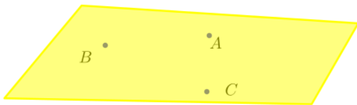
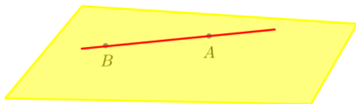


Figura 1: A, B, C são colineares, P, Q, R são não colineares

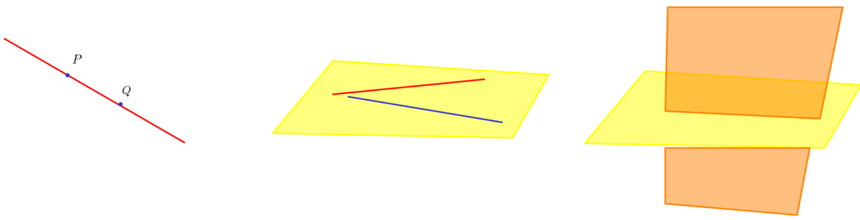
Exemplo V1.3.
Axioma I4. Dados três pontos não colineares, existe um único plano que os contém.



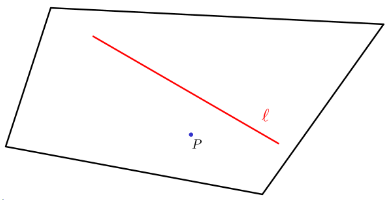
Axioma I5. Se dois pontos distintos pertencem a um plano π, então a única reta que os contém pertence a π.



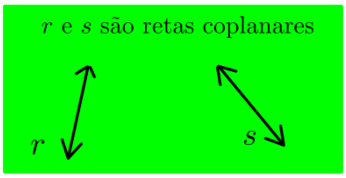
Axioma I7. Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos, e em todo plano existem pelo menos duas retas distintas. Existem pelo menos dois planos distintos no espaço.

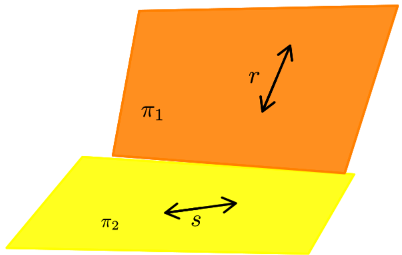


Proposição. *Sejam l uma reta e P um ponto que não pertence a l ($P \notin l$). Então existe um único plano que contém P e l.*



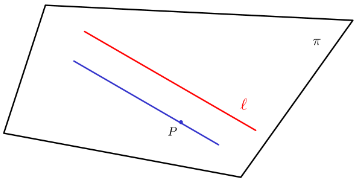
Dizemos que um conjunto de retas é **coplanar** (ou as **retas são coplanares**) se existe um plano que contém o conjunto.



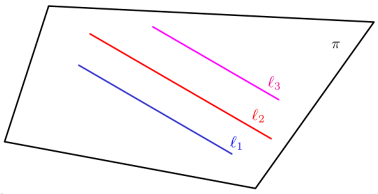


r e s não são coplanares: estão em planos diferentes

Exemplo V1.4. (**Postulado 5 de Euclides**[1])
Axioma das paralelas. Seja l uma reta, P um ponto com $P \notin l$ e π o único plano que os contém. Existe uma única reta em π que contém P e que é paralela a reta l.



Proposição. *Sejam l_1, l_2, l_3 três retas coplanares. Se l_1 é paralela a l_2 e e l_2 é paralela a l_3, então e l_1 é paralela a l_3.*



Nota: Se o Axioma das paralelas é removido, constrói-se outras Geometrias (não Euclideana), por exemplo[2]:

– Geometria esférica (onde não existem "retas" paralelas),
– Geometria Hiperbólica (onde "retas" paralelas se interceptam).

---

[1]Matemáticos tentaram mostrar que este axioma podia ser deduzido a partir dos outros axiomas.
[2]Bolyai e Lobachevsky

Exemplo V1.5.
Axioma da continuidade[3]**.** Sejam A e B dois pontos distintos e l a única reta que os contém. Existe uma régua sobre l tal que A corresponde ao número real 0 e B ao número 1.

Podemos identificar a reta (infinita) l com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$:

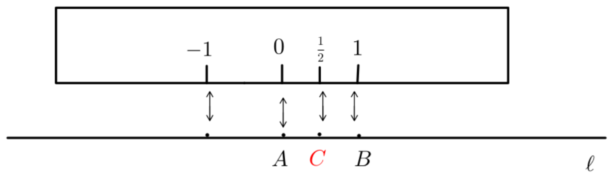


Figura 2: C é definido como o **ponto médio** de AB. $l \approx \mathbb{R}$.

Podemos identificar o plano Euclideano $\mathcal{G}$ com $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

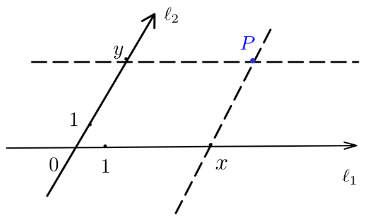
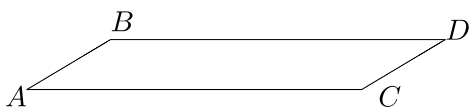


Figura 3: O ponto P está unicamente determinado pelo par (x, y): $\mathcal{G} \approx \mathbb{R}^2$

Dizemos que quatro pontos A, B, C, D formam um **paralelogramo** $ABDC$ se as retas AB e CD são paralelas e as retas BD e AC são paralelas.



---

[3] Hilbert mostrou que pode-se construir a Geometria Euclideana sem usar esse axioma. Mas pode-se mostrar que usando os números reais obtém-se a mesma geometria

V1.2 Geometria Analítica

Podemos usar as operações algébricas dos números reais para fazer cálculos sobre objetos geométricos.

Por exemplo, uma reta poderá ser representada por uma equação algébrica: o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ que sastisfazem uma relação do tipo

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

A **Geometria Analítica** é o estudo de "objetos":

retas, planos, curvas, superfícies,

ou no plano ou no espaço Euclideano usando a álgebra.

Neste curso vamos estudar:

1. Vetores
2. Retas e planos
3. Cônicas
4. Superfícies quádricas

Aula 2

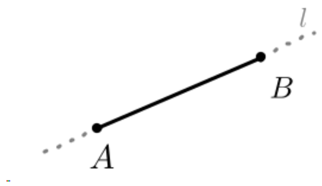
V2 Vetores

O **conjunto dos pontos no plano** será denotado por E^2.

O **conjunto dos pontos no espaço** será denotado por E^3.

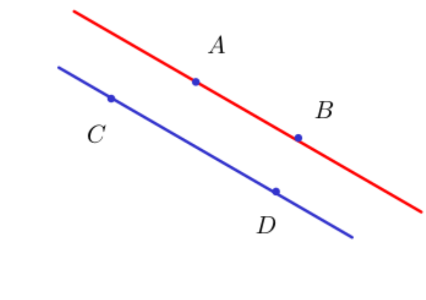
Sejam A, B, C e D pontos distintos em E^n ($n = 2$ ou $n = 3$).

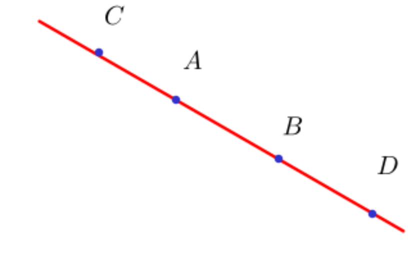
Um **segmento orientado** da reta l será representado por $\overline{AB}$, onde $A, B \in l$, A é a **origem** e B a **extremidade**. A reta l é chamada de **reta suporte**.



O **comprimento** de um segmento orientado $\overline{AB}$ é a distância $d(A, B)$ entre os pontos A e B.

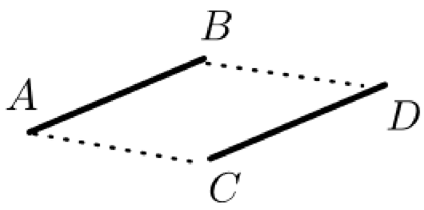
Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm **mesma direção** se suas retas suportes são *paralelas* (coplanares sem inters ou *coincidentes* (A, B, C, D são colineares).



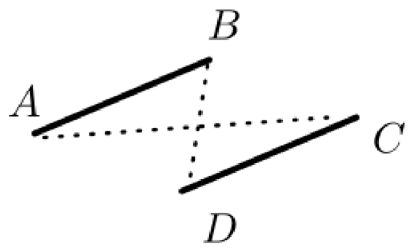


Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm a mesma direção e:

- as retas suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ **são paralelas**, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm **mesmo sentido** se os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não se interceptam. Caso contrário os segmentos têm sentidos opostos.

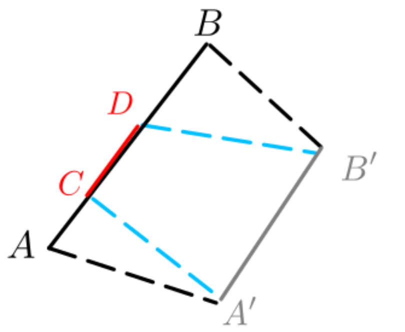


mesma direção e sentido

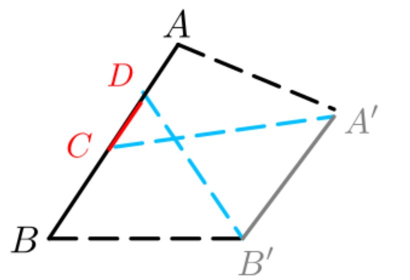


mesma direção, sentido oposto

- as retas suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ **são coincidentes**, então considere uma reta r paralela a reta que contém A, B, C, D, e tome A', B' pontos distintos em r tais que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ têm mesmo sentido. Dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm **mesmo sentido** se $\overline{CD}$ e $\overline{A'B'}$ têm mesmo sentido.



mesma direção e sentido



mesma direção, sentido oposto

No conjunto dos segmentos orientados, defina a **relação de equivalência**[4]:

dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são **equivalentes** (ou **equipolentes**), usualmente denotado por $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ se:

- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm o mesmo comprimento
- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm mesma direção
- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm mesmo sentido
- ou ambos são segmentos nulos, isto é, $A = B$ e $C = D$.

Definição V2.1. Um **vetor** $\vec{v}$ é uma classe de equivalência de segmentos orientados, ou seja, um conjunto de segmentos orientados que são equivalentes a um dado segmento orientado.

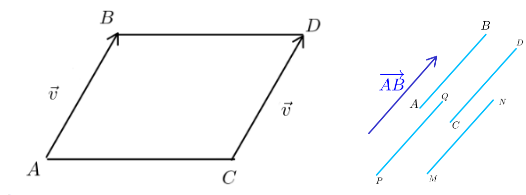
Dado segmento orientado $\overline{AB}$, a classe de equivalência de $\overline{AB}$, ou seja, o conjunto de todos os segmentos orientados equivalentes a $\overline{AB}$ é um vetor $\vec{v}$, usualmente denotado por $\overrightarrow{AB}$.

$\overline{AB}$ é um representante da classe de equivalência; $\overrightarrow{AB}$ é um representante do vetor $\vec{v}$
Dois vetores são iguais se possuem representantes equivalentes.

Nota:

1. Se $ABDC$ é um paralelogramo, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor $\vec{v}$.

   Na verdade, existem infinitos segmentos orientados que representam o mesmo vetor, o que motiva a expressão "**um vetor é livre**".



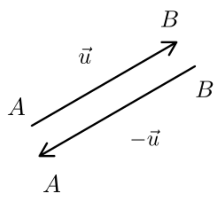
[4] é reflexiva ($a \sim a$), simétrica ($a \sim b \Rightarrow b \sim a$) e transitiva ($a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$)

Dado um vetor $\overrightarrow{u}$:

- A **norma** ou o **módulo** ou **comprimento** de $\vec{u}$ é o comprimento de qualquer um de seus representantes:
$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A,B);$$

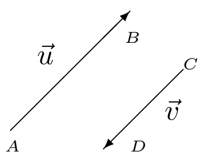
- a **direção** (resp. o **sentido**) de $\vec{u}$ é a direção (resp. sentido) de qualquer um de seus representantes;

- $-\vec{u}$ é um vetor com mesmo módulo e direção de $\vec{u}$ e sentido oposto de $\vec{u}$;

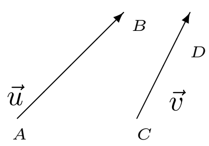


- o **vetor nulo,** $\vec{0}$, é o vetor representado por $\overrightarrow{AA}$ para qualquer ponto A do espaço[5].

- Dois vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ são **paralelos** se possuírem representantes com a mesma direção. Notação: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

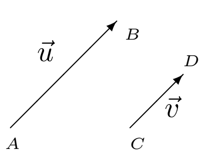


$\vec{u} \parallel \vec{v}$

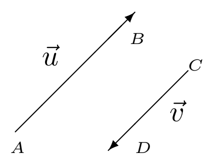


$\vec{u} \nparallel \vec{v}$

- Dois vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ paralelos possuem o **mesmo sentido** se possuírem representantes com o mesmo sentido. Caso contrário, dizemos que possuem **sentidos opostos**.



$\vec{u} \parallel \vec{v}$ com mesmo sentido



$\vec{u} \parallel \vec{v}$ com sentidos opostos

[5] $\|\vec{v}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{v} = \vec{0}$.

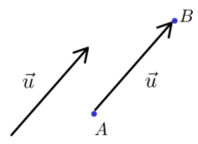
O **conjunto de todos os vetores em um plano** será denotado por V^2.

O **conjunto de todos os vetores no espaço** será denotado por V^3.

Nota: ($n = 2$ ou $n = 3$)

1. Seja $\vec{u} \in V^n$ e A um ponto de E^n. Então existe um único ponto B em E^n tal que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}.$$



2. O vetor nulo $\vec{0}$ é paralelo a qualquer outro vetor.

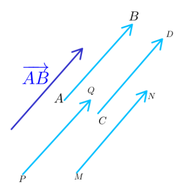
3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos. Temos que

$$\vec{u} = \vec{v}$$

se, e somente se,

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos,
- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem o mesmo sentido,
- $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

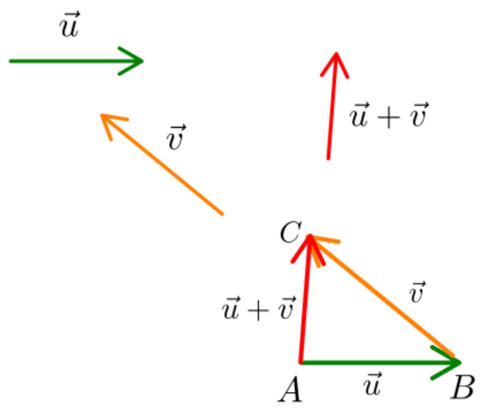


V2.1 Operações em V^n $(n = 2, 3)$

V2.1.1 Adição de vetores

Definição V2.2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores representados, resp., por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. O **vetor soma** denotado por $\vec{u} + \vec{v}$ é o vetor representado por $\overrightarrow{AC}$.

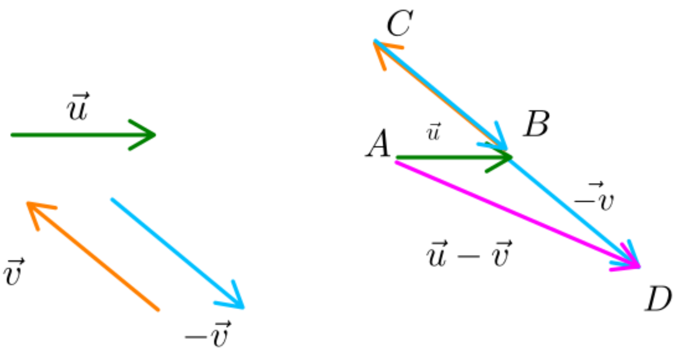
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$



Regra do triângulo

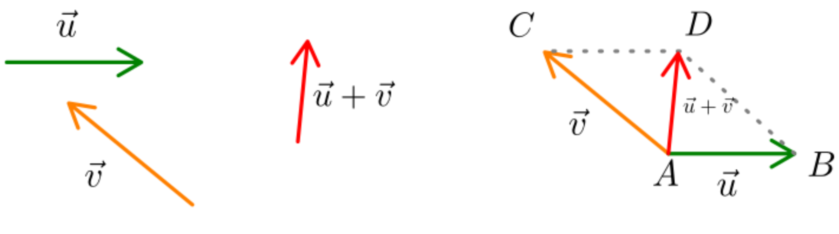
A **diferença, $\vec{u} - \vec{v}$**, é definida por:

$$\vec{u} - \vec{v} := \vec{u} + (-\vec{v})$$



Exemplo V2.3. (**Regra do paralelogramo**) Se representamos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ e } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$



Exemplo V2.4. Usando a Regra do Paralelogramo ($\vec{v} = \overrightarrow{AC}$) ou a Regra do Triângulo ($\vec{v} = \overrightarrow{BD}$), obtemos

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD} \qquad \text{e} \qquad \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB},$$

onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, respectivamente.

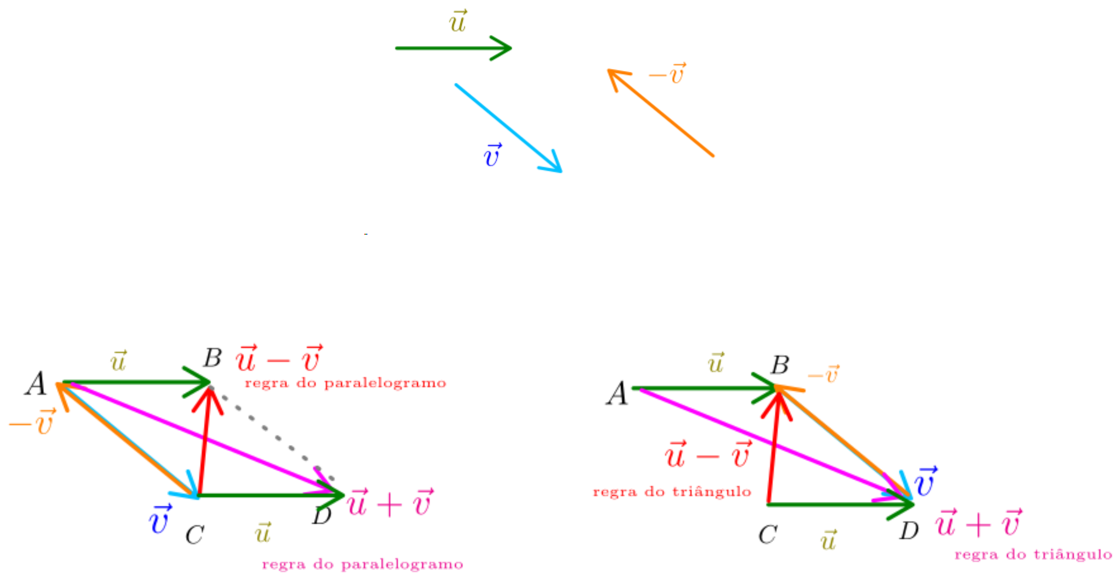


Figura 4: Pela regra do paralelogramo, os vetores soma e diferença são as diagonais de $ABDC$

Propriedades de adição de vetores

Teorema. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores em V^n. Então*

A1. **Associativa:**
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w});$$

A2. **Comutativa:**
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u};$$

A3. **Elemento Neutro:**
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u};$$

A4. **Elemento Oposto:** *para cada vetor $\vec{u}$, existe um vetor $-\vec{u}$ tal que*
$$\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}.$$

A adição de vetores tem as mesmas propriedades de adição de números reais, o que motiva usar o mesmo símbolo “+” para representar esta operação.

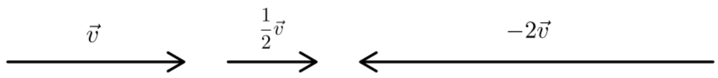
O conjunto V^n munido da adição “+”, ou seja $(V^n,+)$, é um **grupo abeliano (ou comutativo)** (Álgebra).

Exemplo V2.5. Ver Exercício 1 em Slide de Exercícios.

V2.1.2 Multiplicação por escalar

Definição V2.6. Sejam α um número real (um escalar) e $\vec{u}$ um vetor em V^n.

1. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ então $\alpha\vec{u} = \alpha.\vec{u} := \vec{0}$.
2. Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, o vetor $\alpha\vec{u}$ caracteriza-se por:
   (a) (direção) $\alpha\vec{u}$ é paralelo a $\vec{u}$
   (b) (sentido) $\begin{cases} \text{se } \alpha > 0, \ \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm mesmo sentido} \\ \text{se } \alpha < 0, \ \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm sentido oposto;} \end{cases}$
   (c) (comprimento) $\|\alpha\vec{u}\| := |\alpha|\|\vec{u}\|$.



Exemplo V2.7. Ver Exercício 2 em Slide de Exercícios.

Usualmente $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ é chamado **versor** de $\vec{v}$ e $\vec{u}$ de **vetor unitário**.

Propriedades de multiplicação de vetores por escalar

Teorema. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores em V^n e α, $\beta \in \mathbb{R}$. Então*

M1. **Associativa:**
$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u};$$

M2. **Elemento Neutro:**
$$1\vec{u} = \vec{u};$$

D1. **Distributiva:**
$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u};$$

D2. **Distributiva:**
$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

O conjunto V^n munido da adição "+" , e a multiplicação por escalar "." , ou seja $(V^n, +, \cdot)$, é um exemplo de **espaço vetorial real** (Álgebra Linear).

Corolário. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores em V^n e α, $\beta \in \mathbb{R}$. Então*

1. $\alpha\vec{u} = \beta\vec{v}$ *com* $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \vec{u} = \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\vec{v}$

2. $\alpha(-\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$

3. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

Exemplo V2.8. Ver Exercícios 3 a 9 em Slide de Exercícios.

Os Exercícios 8 e 9 em Slide de Exercícios nos induzem a um novo conceito: o de dependência linear.

Dependência Linear

Objetivo

Estudar quando dois ou três vetores são ou não linearmente dependentes, relacionando também tal conceito com o aspecto geométrico dos vetores. Aula 3

D1 Motivação

Resolver Exercício 9 (ver Slide de Exercícios).

- **Caso dois vetores:**

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores em V^n ($n = 2$ ou $n = 3$) não nulos e **paralelos**, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, a saber:

- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido: $\lambda = \dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ e portanto

$$\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v} = \vec{0};$$

- se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm sentidos opostos: $\lambda = -\dfrac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ e portanto

$$\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v} = \vec{0};$$

ou seja:

> se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e paralelos, então existem escalares α e β ambos não nulos tais que
>
> $$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Nota: Se $\vec{u}$ e/ou $\vec{v}$ é o vetor nulo (portanto paralelos), a equação $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ também é válida (por exemplo, $\vec{v} = \vec{0}$: $\alpha = 0, \beta = 1$).

D2 Dependência Linear

Proposição D2.1. *Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$ são paralelos se, e somente se, existem escalares α, β não ambos nulos tais que*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}. \tag{D2.1}$$

Nota:

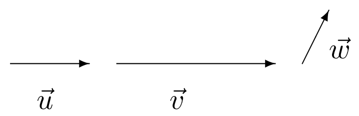
1. Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$ não são paralelos se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

2. A Equação (D2.1) diz que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ *dependem* um do outro. Usualmente dois vetores paralelos são ditos *(linearmente) dependentes* e caso contrário *(linearmente) independentes* (ver Definição D2.4).

3. Se $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, usualmente dizemos que $\vec{x}$ é *combinação linear* de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Exemplo D2.2. Considere os vetores:



(a) $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$?

(b) $\vec{u}$ é uma combinação linear de $\vec{v}$?

(c) $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$?

(d) $\vec{w}$ é uma combinação linear de $\vec{v}$?

(e) $\vec{v}$ é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{w}$?

Pergunta: Dados três vetores não nulos em V^n, um deles é sempre combinação linear dos outros dois?

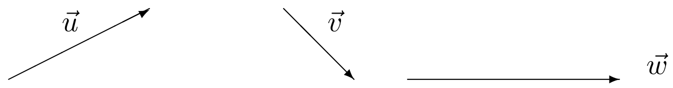


Figura em V^2 (lembrar Exercício 8 (ver Slide de Exercícios))

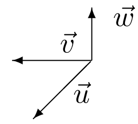


Figura em V^3

- **Caso três vetores:**

Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ três vetores não nulos em V^n.

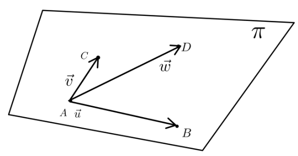
$\vec{u}, \vec{v}$ não paralelos

- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
- A, B, C determinam um único plano π (Axioma I4)
- $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ para algum ponto D

Temos duas possibilidades:

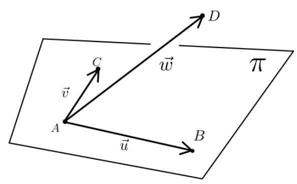
- **Caso (i):** $D \in \pi$

Neste caso dizemos que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são **coplanares** (existem representantes dos vetores que são paralelos a um mesmo plano de V^n)



- **Caso (ii):** $D \notin \pi$

Neste caso $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.



Vamos estudar o Caso (i): o Caso (ii) será uma consequência do Caso (i).

$\boxed{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanares}}$

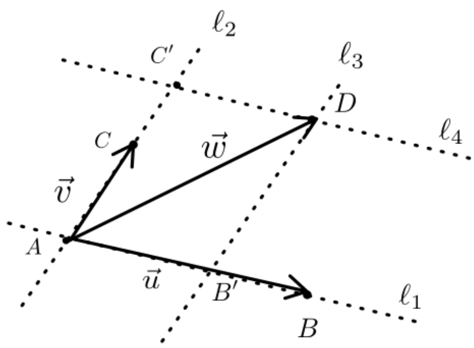


Figura 5: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanares

- l_1: única reta que contém A e B
- l_2: única reta que contém A e C
- l_3: única reta paralela a l_2 passando por D
- B': $l_1 \cap l_3$
- l_4: única reta paralela a l_1 passando por D
- C': $l_2 \cap l_4$
- $AB'DC'$ é um paralelogramo
- $\exists! \alpha, \beta$ não ambos nulos tais que $\boxed{\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}$
- $$\exists \alpha, \beta, \gamma \;\text{ não todos nulos tais que }\; \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0. \qquad (*)$$

$\boxed{\vec{u}, \vec{w} \text{ ou } \vec{v}, \vec{w} \text{ não são paralelos}}$: mesmo raciocínio e (*) vale!

$\boxed{\vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \textbf{ são paralelos}}$: (*) também vale! (verifique!)

Proposição D2.3. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$ três vetores tais que ou todos são paralelos entre si ou dois deles não são paralelos entre si. Então $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares se, e somente se, existem escalares α, β, γ não todos nulos tais que*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}. \tag{D2.2}$$

Nota:

1. Três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$ não são coplanares (Caso (ii)) se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. $n = 2$: Três vetores em V^2 sempre são coplanares.

D2.1 Dependência e independência linear (LD/LI)

Definição D2.4. Dizemos que um vetor $\vec{v} \in V^n$ é **combinação linear** dos (ou que é **gerado** pelos) vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in V^n$ se

$$\text{existem escalares } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ tais que}$$

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k.$$

Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são chamados de **coeficientes** da combinação linear.

Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in V^n$ são **linearmente dependentes**[6] (**LD**) se

$$\text{existem escalares } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ não todos nulos tais que}$$

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in V^n$ são **linearmente independentes** (**LI**) se

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Nota:

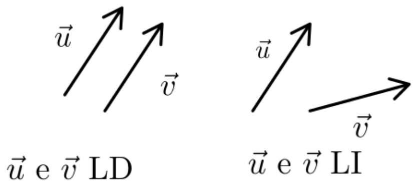
1. $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ é LD $\Longleftrightarrow \exists \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ não todos nulos; $\alpha\vec{v} + \alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$
$\Longleftrightarrow$ um dos vetores é combinação linear dos outros.

2. Se um dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ é o vetor nulo, então $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ são LD.

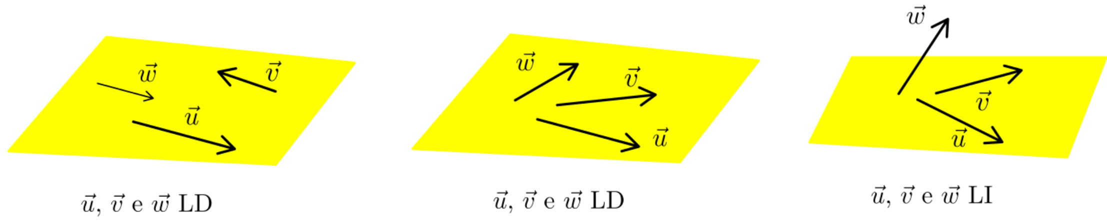
---

[6] Ou o **conjunto** $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ **é LD**.

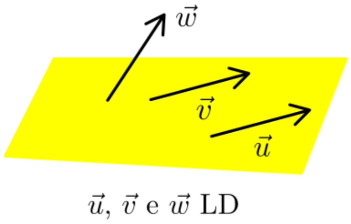
3. Pela Proposição D2.1, dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$ $(n = 2$ ou $n = 3)$ são LD se e somente se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.



4. Nas condições da Proposição D2.1, três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$ $(n = 2$[7] ou $n = 3$[8]$)$ são LD se e somente se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.



5. Cuidado: três vetores não coplanares podem ser LD !! (Veja figura abaixo) Por quê?



Exemplo D2.5. Ver Exercício 10 em Slide de Exercícios.

Proposição D2.6. *Se três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são LI, então quaisquer dois deles são LI.*[9]

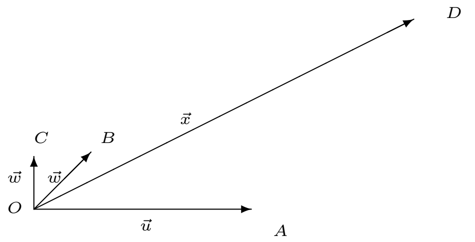
Exercício. Verifique que a recíproca da proposição acima não vale! (tarefa!)

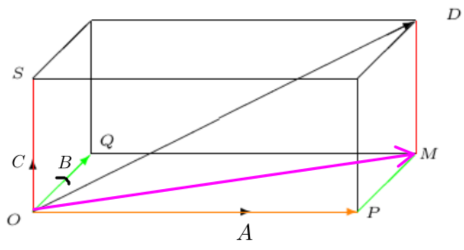
---

[7] Como três vetores em V^2 são sempre coplanares, segue que três vetores em V^2 são sempre LD!
[8] Segue que três vetores em V^3 são LI se e somente se não são coplanares.
[9] Segue que se três vetores são LI, então não pode quaisquer dois deles serem paralelos.

Exemplo D2.7. Ver Exercício 11 em Slide de Exercícios.

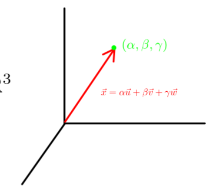
Proposição D2.8. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são LI, então qualquer vetor $\vec{x} \in V^3$ é combinação linear única de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.*





Nota: Como a combinação linear na proposição acima é única, vamos poder identificar o vetor $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ com a tripla (α, β, γ) de números reais.

$\vec{x} \approx (\alpha, \beta, \gamma)$; $V^3 \approx \mathbb{R}^3$



Fortemente recomendado: revisar matrizes e sistemas lineares.

relembre quando um sistema linear tem: solução única (possível determinado), infinitas soluções (possível indeterminado), não tem solução (indeterminado)

Base

Objetivo

Apresentar o conceito de base e coordenadas de um vetor em relação a uma base para auxiliarem no cálculo entre vetores. $\boxed{\text{Aula 4}}$

B1 Base

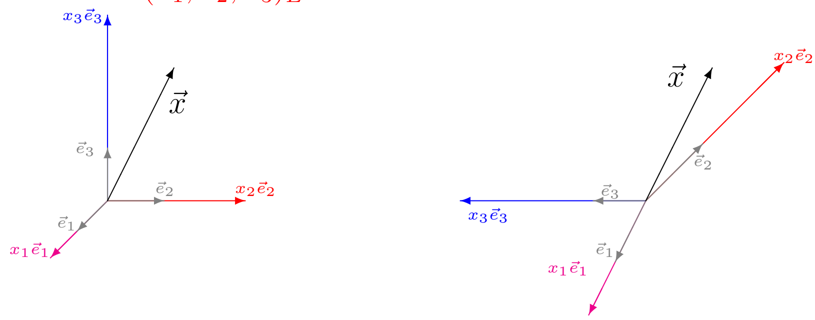
Definição B1.1. Uma n-upla ordenada $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ de n vetores LI de V^n chama-se **base** de V^n.

Vimos que (Proposição D2.8 - Slide 2) um qualquer $\vec{x} \in V^3$ é combinação linear única dos elementos $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ de uma base E, ou seja:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \tag{B1.1}$$

onde os escalares x_1, x_2, x_3 são únicos para cada vetor $\vec{x}$.

Definição B1.2. Chamamos a terna (x_1, x_2, x_3) de números reais em (B1.1) de **coordenadas** do vetor $\vec{x}$ na base E. Escrevemos $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E$. [10]



Exemplo B1.3.

(a) $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E \iff u_1 = v_1,\ u_2 = v_2$ e $u_3 = v_3$.

(b) $\vec{0} = (0, 0, 0)_E$.

B1.1 Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas

Propriedades:

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

(a) $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_E$

(b) $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)_E$.

[10] Mais adiante introduziremos "sistema de coordenadas" (ver Slide 6)

Dependência linear de dois vetores:

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V^3 são LD/LI através de suas coordenadas

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E :$$

$$\vec{u}, \vec{v} \ \text{ LD} \iff \exists \alpha, \beta \text{ não ambos nulos tais que } \ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \exists \alpha, \beta \, \text{não ambos nulos;} \, (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)_E = (0,0,0)_E$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{tem mais de uma solução (nula e não nula, SPI}^{1}\text{)}$$

Proposição B1.4. *Dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ são LD se e somente se*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Corolário. *Se um dos determinantes acima é não nulo, então os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são LI.*

Exemplo B1.5. Ver Exercícios 12 e 13 em Slide de Exercícios.

Dependência linear de três vetores:

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em V^3 são LD/LI através de suas coordenadas

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E, \qquad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E :$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \ \text{ LD} \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \text{ não todos nulos tais que } \ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = 0 \end{cases} \quad \text{tem mais de uma solução (nula e não nula)}$$

[1] Sistema Possível e Indeterminado

Proposição B1.6. *Três vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$ são LD se e somente se*

$$\begin{array}{r} \\ \textit{coordenadas de } \vec{u} \rightarrow \\ \textit{coordenadas de } \vec{v} \rightarrow \\ \textit{coordenadas de } \vec{w} \rightarrow \end{array} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \end{array} = 0.$$

Corolário. *Os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$ são LI o determinante acima é não nulo.*

Exemplo B1.7. Ver Exercícios 14 a 16 em Slide de Exercícios.

Nota:

- Em V^3, uma base é formada por 3 vetores LI. As bases não são únicas!!
- Conhecendo-se uma base, um qualquer vetor pode ser representado de de maneira única por uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar V^3 com $\mathbb{R}^3$.
- Todas as propriedades de vetores podem ser reescritas usando coordenadas.
- Computacionalmente é mais fácil e prático realizar as operações sobre vetores usando as coordenadas.

B1.2 Mudança de base

Aula 5

Já sabemos que V^3 não possui uma única base.

Dado um vetor $\vec{u}$ em V^3 e duas bases E e F de V^3, qual a relação entre as coordenadas de $\vec{u}$ na base E com as coordenadas de $\vec{u}$ na base F?

Motivação:

- Reescreva o sistema da resolução do Exercício 16-(b) em forma matricial.

$\vec{f_1} = (2, -1, 0)_E, \vec{f_2} = (1, -1, 2)_E, \vec{f_3} = (1, 0, 1)_E,\ \vec{u} = (1, 1, 1)_E,\ \vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)_F$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma & = 1 \\ -\alpha - \beta & = 1 \\ 2\beta + \gamma & = 1 \end{cases}$$

Mudança de base:

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ bases de V^3
- Dado um $\vec{u} \in V^3$ com coordenadas $(x_1, x_2, x_3)_E$ e $(y_1, y_2, y_3)_F$, temos

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{u} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3.$$

- Cada vetor de F pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base E, ou seja, existem escalares α_{ij} tais que

$$\begin{aligned}
\vec{f}_{\mathbf{1}} &= \alpha_{\mathbf{1}1}\vec{e}_1 + \alpha_{\mathbf{2}1}\vec{e}_2 + \alpha_{\mathbf{3}1}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_{\mathbf{2}} &= \alpha_{1\mathbf{2}}\vec{e}_1 + \alpha_{2\mathbf{2}}\vec{e}_2 + \alpha_{3\mathbf{2}}\vec{e}_3 \\
\vec{f}_{\mathbf{3}} &= \alpha_{1\mathbf{3}}\vec{e}_1 + \alpha_{2\mathbf{3}}\vec{e}_2 + \alpha_{3\mathbf{3}}\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

$$\alpha_{ij}$$

o coeficiente de $\vec{e}_i$ o índice de $\vec{f}_j$

- Logo,

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 \\
&= y_1(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3) + y_2(\alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3) \\
&\quad + y_3(\alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3) \\
&= (\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3)\vec{e}_1 + (\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3)\vec{e}_2 \\
&\quad + (\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3)\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

- Pela unicidade das coordenadas,

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\
x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\
x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3.
\end{aligned}$$

Escrevendo as equações acima na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_E}_{(\vec{u})_E} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}_{M_{EF}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_F}_{(\vec{u})_F}, \tag{B1.2}$$

- $(\vec{u})_E$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u na base E;
- $(\vec{u})_F$: é a matriz coluna $n \times 1$ formada pelas coordenadas de u na base F;
- M_{EF}: é a matriz quadrada $n \times n$ na qual a coluna 1 é formada pelas coordenadas de $\vec{f_1}$ na base E; a coluna 2 é formada pelas coordenadas de $\vec{f_2}$ na base E e a coluna 3 é formada pelas coordenadas de $\vec{f_3}$ na base E.

Definição B1.8. A matriz M_{EF} é chamada **matriz de mudança da base E para a base F.**
Notações:

$$(\vec{u})_E = M_{EF}(\vec{u})_F; \qquad (\ )_E = M_{EF}(\ )_F. \tag{B1.3}$$

Nota: Como $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$ são LI (pois F é uma base), temos que o determinante de M_{EF} é não nulo. Portanto, a matriz mudança de base possui matriz inversa $(M_{EF})^{-1}$ e vale

$$M_{EF}(M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1}M_{EF} = Id,$$

onde Id é a matriz identidade:

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo B1.9. Ver Exercícios 17 a 19 em Slide de Exercícios.

Existe alguma relação entre M_{EF} e M_{FE}??

Proposição B1.10. *Sejam E, F, G três bases de V^3. Então,*

$$M_{EF}M_{FG} = M_{EG}.$$

Corolário B1.11. *Sejam E e F bases de V^3. Então,*

$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$

B7

Exemplo B1.12. Ver Exercício 20 em Slide de Exercícios.

Produto escalar, projeção ortogonal, base ortonormal

Objetivo

Definir o conceito de produto escalar entre dois vetores e sua relação com ortogonalidade.

Construir base ortonormal: o cálculo com vetores com coordenadas em relação a base ortonormal se torna mais simples.

P1 Produto Escalar

Aula 6

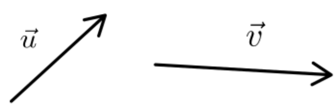
Para definir produto escalar precisamos responder as seguintes duas perguntas:

1. Como definir a medida do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do espaço?

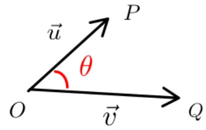
2. Como "calcular" a medida do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do espaço?

P1.1 Ângulo entre dois vetores não nulos de V^3

Considere os seguintes vetores não nulos de V^3:



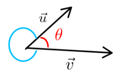
Considere os pontos O, P e Q tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.



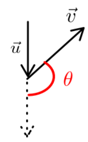
Definição P1.1. A **medida angular** (ou a **medida do ângulo**) entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é a medida θ do ângulo $P\widehat{O}Q$ com $0 \leq \theta \leq \pi$. Escrevemos

$$\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$$

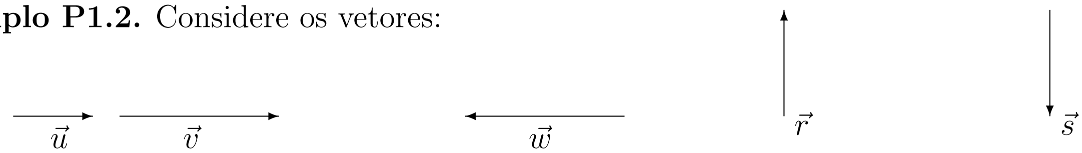
Nota: Existem duas escolhas para definir a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Nossa escolha é aquela de modo que a medida está entre 0 e π.



Nota: Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ devem ter a mesma origem:



Exemplo P1.2. Considere os vetores:

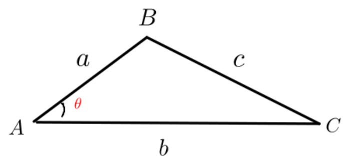


- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{r}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{s}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{r}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{s}$?
- Qual a medida do ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$?

Se os vetores não são tão "bem comportados", como calcular o ângulo?

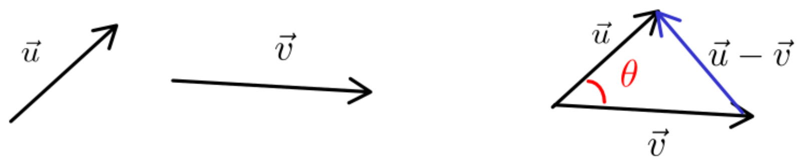
Lei dos cossenos: Sejam ABC um triângulo como na figura abaixo, a o comprimento do segmento $\overline{AB}$, b o comprimento do segmento $\overline{AC}$, c o comprimento do segmento $\overline{BC}$ e θ o ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.
Então (tarefa!),

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$



Considere dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e pontos O, P e Q tais que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{u} \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{OQ} = \vec{v}$$



Pela Lei dos Cossenos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta, \quad \theta = ang(\vec{u}, \vec{v}). \tag{P1.1}$$

Nota:

1. A equação acima diz que podemos calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conhecendo os valores: $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ e $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

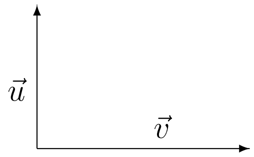
2. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. Então,

$$\theta = ang(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \iff \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta = 0.$$

Definição P1.3. Dizemos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** se:

- ou um deles é o vetor nulo;
- ou ambos são não nulos e a medida do ângulo entre eles é $\pi/2$.

Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.

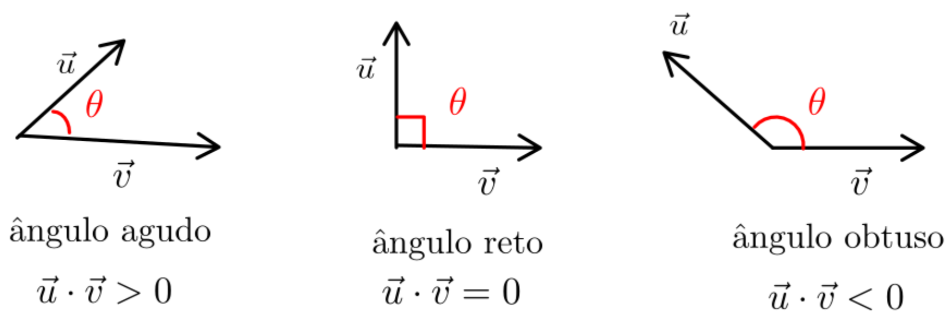


P1.2 Produto escalar

Definição P1.4. O **produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de V^n**, indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ou $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, é o número real tal que

- Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é o vetor nulo, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} := 0$.
- Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos e θ é a medida do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$,

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$



Proposição P1.5.

$(P1)$ *Se* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são não nulos e* $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$, *então*

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

$(P2)$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

$(P3)$ $\vec{u}\perp\vec{v}$ *se e somente se* $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$(P4)$ *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer que sejam* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *em* V^3,

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

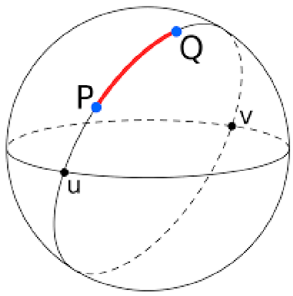
A igualdade vale se, e somente se, $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são LD.*

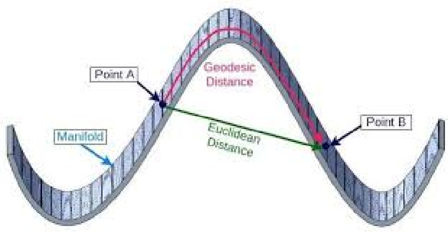
Curiosidade: Quando $x, y \in S_1(0)$ (esfera de raio 1), a função ângulo

$$\theta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||}\right) = \arccos(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$$

é a **distância geodésica** entre os pontos x e y, usualmente dita a função que determina a "distância real"na Terra ("variedades"), veja **Geodésica**.

(a) Delfim Moreira-MG, 2019





(b) Ilustração distância geodésica: fonte internet

Nota: As propriedades P1 e P2 da Proposição P1.5 dizem que podemos calcular o ângulo entre dois vetores conhecendo o produto interno entre vetores.

MAS...

- Não sabemos CALCULAR a norma de um vetor...
- Não sabemos CALCULAR o produto interno entre vetores...
- Tudo o que foi feito é **geométrico**...

- Vamos retomar as coordenadas de vetores e base do espaço!
- Para termos propriedades **analíticas**!

P2 Base Ortonormal

Definição P2.1. Uma **base** $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V^3 é uma **base ortogonal** quando os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são dois a dois ortogonais, isto é,

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2.$$

Definição P2.2. Uma **base ortogonal** $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de V^3 é uma **base ortonormal** quando os vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ além de dois a dois ortogonais são unitários, isto é,

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2,$$

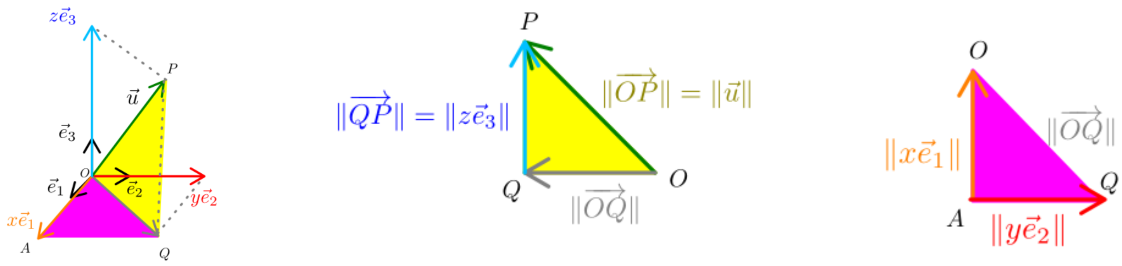
e

$$\|\vec{e}_1\| = 1, \quad \|\vec{e}_2\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{e}_3\| = 1.$$

Teorema P2.3. *Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3.*
Se $\vec{u} = (x, y, z)_E$ e $\vec{v} = (a, b, c)_E$, então

1. $$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};}$$

   Segue do fato dos vetores serem ortogonais e unitários, observando que :



2. $$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xa + yb + zc.}$$

Nota.

1. As fórmulas acima valem somente quando a base E é **ortonormal**.
2. As fórmulas acima valem para **qualquer** base ortonormal.

Exemplo P2.4. Ver Exercícios 21 a 23 em Slide de Exercícios.

Proposição P2.5. *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ de V^3 e qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:*

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; *(distributiva)*
2. $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; *(comutativa)*
4. *Se* $\vec{u} \neq \vec{0}$, *então* $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Demonstração. Tarefa! (use as coordenadas dos vetores em uma fixada base ortonormal). □

Nota.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$?
- Faz sentido as expressões: $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ e $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$?
- Se sim, vale $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$? (é associativa?)

Aula 7

Exemplo P2.6. Sejam $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. Prove que:

(a) $\vec{w} \notin T$;

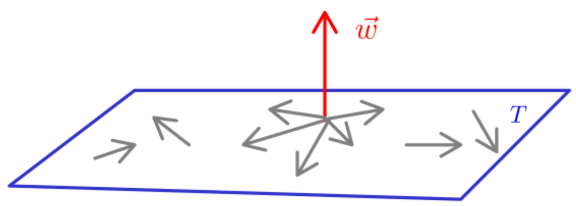
(b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T;

(c) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI;

(d) Três vetores quaisquer de T são LD; *e portanto 3 vetores quaisquer de T são coplanares ("existem representantes que estão em um mesmo plano")*

(e) Se $\vec{u}, \vec{v} \in T$ são LI, então $\vec{u}, \vec{v}$ geram T, isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

T é chamado **plano ortogonal** a $\vec{w}$.



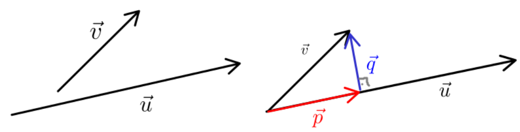
P2.1 Projeção Ortogonal

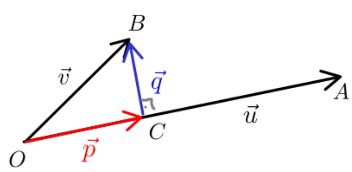
Motivação: A projeção será usada na construção de base ortonormal.

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em V^3, é possível decompor o vetor $\vec{v}$ como soma de dois vetores $\vec{p}, \vec{q}$,

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q},$$

de forma que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{q}$ seja ortogonal a $\vec{u}$?





- O, A, B tais que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

- C: ponto de intersecção da reta perpendicular à reta OA que passa por B
- Por construção (geométrica), os vetores

$$\vec{p} := \overrightarrow{OC}, \qquad \vec{q} := \overrightarrow{CB}$$

satisfazem:

$$\vec{p} \parallel \vec{u}, \qquad \vec{q} \perp \vec{u}, \qquad \vec{v} = \vec{p} + \vec{q}.$$

Definição P2.7. Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo em V^3. Dado um vetor $\vec{v}$, a **projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$** é o vetor $\vec{p}$, denotado por $proj_{\vec{u}}\vec{v}$, que satisfaz as condições:

$$\vec{p} \parallel \vec{u} \qquad \text{e} \qquad (\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}.$$

Sempre existe o vetor projeção ortogonal de um vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u} \neq \vec{0}$?

Ele é único?

No caso de existir, temos uma expressão analítica para o vetor projeção $\vec{p}$?

Proposição P2.8. *Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo em V^3. Para qualquer vetor $\vec{v}$, existe uma única projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ dada por*

$$\boxed{proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u},}$$

cuja norma é

$$\|proj_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemplo P2.9. Ver Exercício 26 em Slide de Exercícios.

Vimos como é fácil calcular o produto escalar de dois vetores e, portanto, é fácil calcular:

- a norma de vetores, $(\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})$

- a medida angular entre vetores, $(\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|})$

- a projeção ortogonal, $(proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u})$

quando as coordenadas dos vetores são em relação a uma **base ortonormal**.

- E se a base não é ortonormal? 

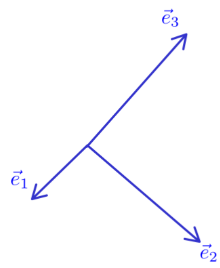
Se $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base de V^3 que **não é ortonormal**, então é possível construir uma **base ortonormal** $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ a partir de E!

Como??

Nota. Obtendo a base B, podemos fazer a mudança de base de E (não ortonormal) para B (ortonormal) e trabalhar sempre com as coordenadas dos vetores em relação à base ortonormal B, onde é fácil fazermos os cálculos!!

P2.2 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

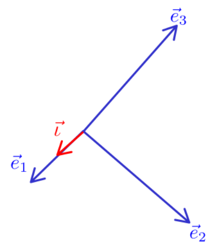


- **Construção de $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ ortonormal a partir de E:**

  Ver uma simulação no Wikipedia.

1. Escolher $\vec{\imath}$ como o versor $\vec{e}_1$:

$$\boxed{\vec{\imath} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}.}$$

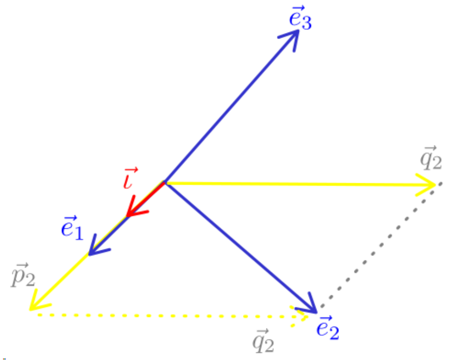


Claro que

$$\|\vec{\imath}\| = 1.$$

2. Decompor $\vec{e}_2$ em dois vetores $\vec{p}_2$ e $\vec{q}_2$ tais que:

- $\vec{e}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$
- $\vec{p}_2 \parallel \vec{\imath}$
- $\vec{q}_2 \perp \vec{\imath}$.



Sabemos que

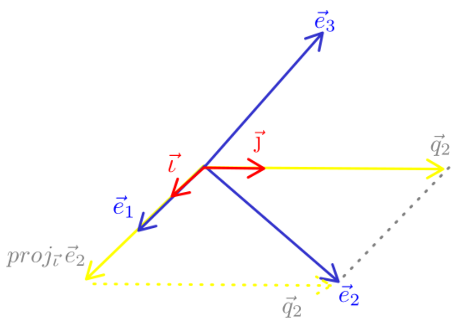
$$\vec{p}_2 \quad = \quad proj_{\vec{\imath}}\vec{e}_2 = \left(\frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{\imath}}{\|\vec{\imath}\|^2}\right)\vec{\imath} = (\vec{e}_2 \cdot \vec{\imath})\vec{\imath} \quad \text{e} \qquad \vec{q}_2 = \vec{e}_2 - \vec{p}_2.$$

Logo,

$$\vec{q}_2 = \vec{e}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \vec{\imath})\vec{\imath}.$$

Escolha[12][13],

$$\vec{\jmath} = \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}.$$



Claro que

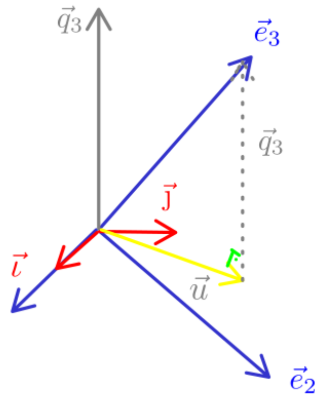
$$\|\vec{\jmath}\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \vec{\jmath} \perp \vec{\imath}.$$

[12] $\vec{q}_2 \neq \vec{0}$ pois $\{\vec{e}_2, \vec{\imath}\}$ é LI.

[13] $\vec{\imath}$ é paralelo a $\vec{e}_1$ e $\vec{\jmath}$ é combinação linear de $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$

3. Decompor $\vec{e}_3$ em dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{q}_3$ tais que:

- $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$
- $\vec{u}$, $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são coplanares;
- $\vec{q}_3$ é ortogonal a $\vec{\imath}$ e a $\vec{\jmath}$.



$\vec{u}$ é a projeção ortogonal de $\vec{e}_3$ sobre plano gerado por $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$

Como $\vec{u}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$ são coplanares, segue do Exemplo P2.6-(e)[a] que

$$\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}, \quad \text{para algum } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Temos

- $\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u}$;
- $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$;
- $\vec{q}_3$ é ortogonal a $\vec{\imath} \Longrightarrow \vec{\imath}\cdot\vec{q}_3 = 0$;
- $\vec{q}_3$ é ortogonal a $\vec{\jmath} \Longrightarrow \vec{\jmath}\cdot\vec{q}_3 = 0$.

Logo,

$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u} = \vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath} - \beta\vec{\jmath}$$

e

$$\vec{\imath}\cdot\vec{q}_3 = 0 \Longleftrightarrow \vec{\imath}\cdot(\vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath} - \beta\vec{\jmath}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\imath}\cdot\vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\vec{\imath}\cdot\vec{e}_3}{\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}}$$

e

$$\vec{\jmath}\cdot\vec{q}_3 = 0 \Longleftrightarrow \vec{\jmath}\cdot(\vec{e}_3 - \alpha\vec{\imath} - \beta\vec{\jmath}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\jmath}\cdot\vec{e}_3 - \beta\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac{\vec{\jmath}\cdot\vec{e}_3}{\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}}.$$

Logo,

$$\boxed{\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{\imath}\cdot\vec{e}_3)\vec{\imath} - (\vec{\jmath}\cdot\vec{e}_3)\vec{\jmath}.}$$

[a] $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ LI

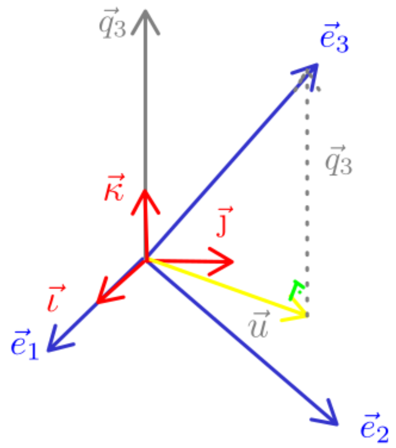
Escolha[14],

$$\boxed{\vec{\kappa} = \frac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}.}$$

Claro que

$$\|\vec{\kappa}\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \vec{\kappa} \perp \vec{\imath},\ \vec{\kappa} \perp \vec{\jmath}.$$

A base $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ é ortonormal!



Nota. A matriz de mudança de base E para B é uma matriz triangular superior:

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix}.$$

Exemplo P2.10. Ver Exercícios 27 - 29 em Slide de Exercícios.

[14] $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$ pois pelo Exemplo P2.6-(c) temos que $\{\vec{e}_3, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ é LI.

Aula 8

ALGUMA PROPRIEDADE A MAIS SOBRE A RELAÇÃO ENTRE M_{EB} E M_{BE}?

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ base e $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ base ortonornal de V^3
- $\vec{e}_1 = (a, b, c)_B$; $\vec{e}_2 = (d, e, f)_B$; $\vec{e}_3 = (g, h, i)_B$;
- $M_{BE} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
- $$(M_{BE})^t M_{BE} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

Proposição P2.11. *Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base e $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal de V^3. Então, E é ortonormal se, e somente se,*

$$(M_{BE})^t M_{BE} = Id. \tag{P2.1}$$

Corolário P2.12. *Se B e E são bases ortonormais de V^3, então* [15]

$$M_{EB} = (M_{BE})^{-1} = (M_{BE})^t$$

e

$$\det M_{BE} = 1 \quad ou \quad \det M_{BE} = -1.$$

Nota.

1. É muito mais fácil encontrar a matriz transposta que a matriz inversa de uma matriz.
2. Matrizes M que satisfazem a condição (P2.4), isto é,

$$M^t M = Id,$$

   são chamadas **matrizes ortogonais**.

3. Dada uma matriz M, ela pode ser pensada como uma matriz de mudança M_{BE} de uma base ortonormal B para uma base E e

   M é ortogonal se, e somente se E é ortonormal.

   Portanto, M é ortogonal se, e somente se,

   - Cada coluna de M constitui um vetor unitário.
   - Duas a duas de quaisquer colunas (distintas) de M constituem vetores ortogonais.

Exemplo P2.13. Ver Exercício 30 em Slide de Exercícios.

[15] Veja Nota na pág. B9

Orientação, produto vetorial, produto misto

Objetivo

Definir o produto vetorial entre dois vetores e o produto misto de três vetores.

Estudar suas propriedades e aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

Estudar a relação de produto vetorial com ortogonalidade.

Estudar a relação de produto misto com o conceito de base.

Para isso necessitamos do conceito de "orientação" em V^3.

Aula 8

OPv1 Orientação em V^3

Definição OPv1.1. Sejam E e F duas bases de V^3. Dizemos que a base E é **equivalente a** (ou concordante com) F, e escrevemos $E \sim F$, se

$$\det(M_{EF}) > 0.$$

Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as bases de V^3.

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{B}$, ou seja, satisfaz as três seguintes propriedades:

1. $\sim$ é reflexiva: $E \sim E$ para todo $E \in \mathcal{B}$:
$$M_{EE} = Id.$$
2. $\sim$ é simétrica: se $E \sim F$, então $F \sim E$:
$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$
3. $\sim$ é transitiva: se $E \sim F$ e $F \sim G$, então $E \sim G$:
$$M_{EG} = M_{EF}M_{FG}.$$

Seja E uma base de V^3.

Definimos a **classe de equivalência de** E, denotada por $\overline{E}$ como sendo o conjunto de todas as bases equivalentes a E, ou seja,

$$\overline{E} = \{\, F \in \mathcal{B} \mid F \sim E \,\} = \{\, F \in \mathcal{B} \mid \det(M_{EF}) > 0 \,\}.$$

Proposição. *Existem apenas duas classes de equivalência em* $\mathcal{B}$, *ou seja,*

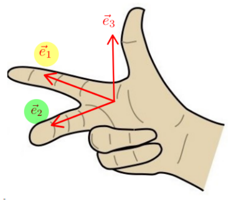
$$\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}, \quad \overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset.$$

Definição OPv1.2. Cada classe de equivalência de $\mathcal{B}$ chama-se **orientação**[16] de V^3.

Uma vez escolhida e fixada uma classe de equivalência, diz-se que V^3 está **orientado**. Neste caso cada base da orientação escolhida é chamada **base positiva**, e cada base da outra orientação é chamada **base negativa**.

Convenção:

Uma base $E = (\boxed{\overrightarrow{e_1}}, \boxed{\overrightarrow{e_2}}, \vec{e}_3)$ de V^3 obedece a regra da mão direita se podemos representar os vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ na seguinte forma



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Regra_da_m%C3%A3o_direita.jpg

Orientamos V^3 com uma base que obedece a regra da mão direita.

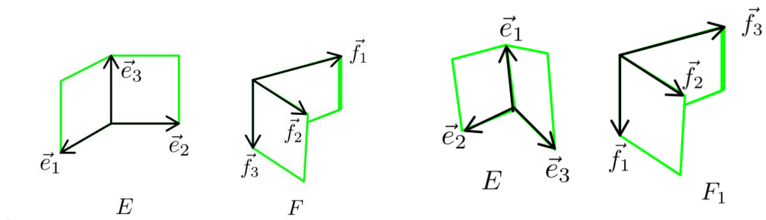
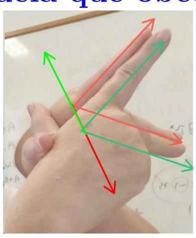
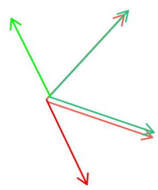


Figura 7: E e F obedecem a regra da mão direita, F_1 não obedece.

Uma base positiva em V^3 é aquela que obedece a regra da mão direita.

relógio na direita!





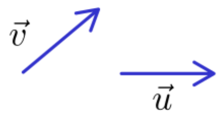
"verde" é base positiva!

[16] Para uma explicação geométrica da palavra "orientação", leia, por exemplo, Apêndice O do livro Geometria Analítica - Paulo Boulos.

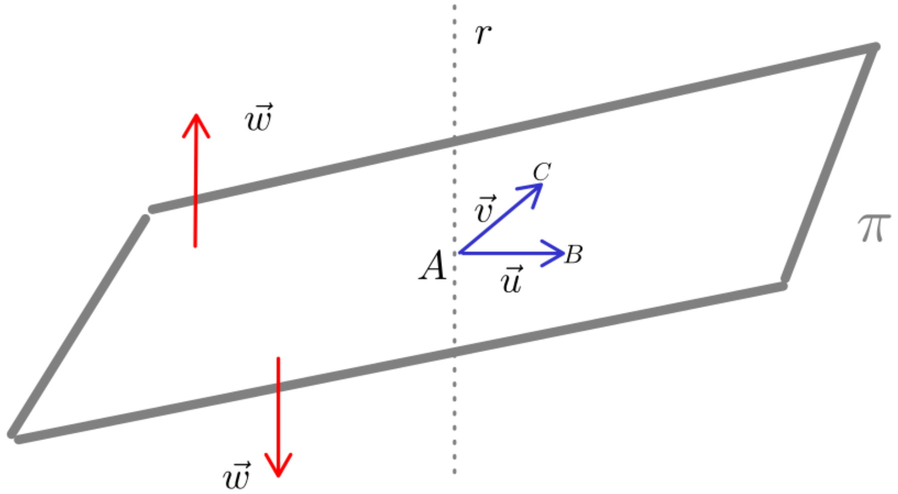
OPv2 Produto Vetorial

Motivação

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores LI de V^3.



Então[17], existe um vetor não nulo $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$:



Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, os pontos A, B e C determinam um único plano π.

Existe uma única reta r perpendicular ao plano π.

A direção de $\vec{w}$ é dada pela reta r, portanto, é única.

O sentido e o módulo de $\vec{w}$ não são únicos.

Como escolher de modo único um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$?

Definição OPv2.1. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores de V^3.
O **produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$** é o vetor, denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ou $\vec{u} \times \vec{v}$), tal que:

1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD, então $\vec{u} \wedge \vec{v} := \vec{0}$.

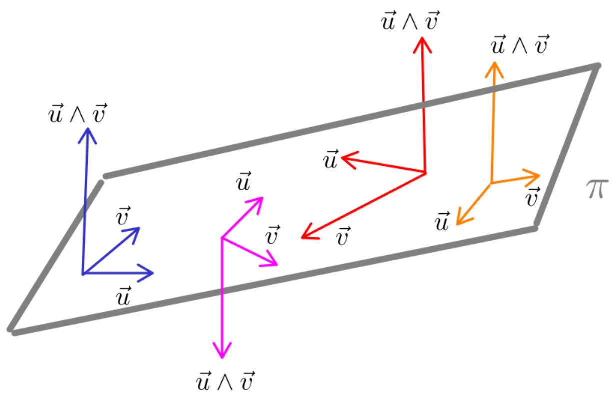
[17] Fizemos exercício para determinar $\vec{w}$, conhecendo as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal. Veja Exercício 23 em Slide de Exercícios.

2. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, então

   (a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$

   (b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$, onde $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$

   (c) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ é uma base positiva.



Nota.

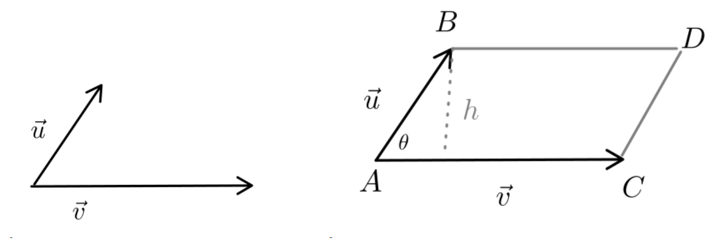
1. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI, as propriedades (a), (b) e (c) da definição determinam unicamente o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2. O produto vetorial é um **vetor**.
3. O produto escalar é um **número real**.
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD.

OPv2.1 Área de paralelogramo

Aula 9

Aplicação de produto vetorial:
A área A_{ABDC} do paralelogramo $ABDC$ gerado por dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ LI de V^3 é dada por:

$$A_{ABDC} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$



Como calcular $\vec{u} \wedge \vec{v}$?

Lembre-se da condição para dois vetores serem LD/LI: Proposição B1.4.

Teorema OPv2.2. *Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Se $\vec{u} = (x, y, z)_E$ e $\vec{v} = (a, b, c)_E$, então*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x & z \\ a & c \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \vec{\kappa} =: \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Exemplo OPv2.3. Ver Exercício 31 em Slide de Exercícios.

OPv2.2 Propriedades de produto vetorial

Proposição OPv2.4. *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ em V^3 e escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, vale:*

1. $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$. *(não é comutativa)*
2. $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

3. $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$. *(distributiva à esquerda)*

4. $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$. *(distributiva à direita)*

Demonstração. Seguem das propriedades de determinante. (tarefa!) □

Nota.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \vec{0}$?

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{w}$?

- $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$?

- Faz sentido $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$?

  - Se sim, vale $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$? (é associativa?)

QUAIS PROPRIEDADES PRODUTO VETORIAL DUPLO SATISFAZ?

Aula 10

Proposição OPv2.5. *Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, valem:*

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$*:*
2. $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

Demonstração. Tarefa! □

Corolário (Identidade de Jacobi).

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Exemplo OPv2.6. Ver Exercício 32 em Slide de Exercícios.

Corolário OPv2.7. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores LI. Então,*

1. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ *é uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, para todo vetor $\vec{w} \in V^3$;*
2. $F = (\vec{u}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ *é uma base ortogonal positiva de V^3.*

Corolário OPv2.8. *Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores LI. Então, $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ onde*

$$\vec{\imath} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{\jmath} = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}}{\|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}\|}, \quad \vec{\kappa} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|},$$

é uma base ortonormal positiva de V^3.

Nota. Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores LI, a específica base ortonormal positiva dada no Corolário OPv2.8, $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$, é tal que seus vetores satisfazem as propriedades:

- $\vec{\imath}$ é paralelo a $\vec{u}$,
- $\vec{\jmath}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e de $\vec{v}$.

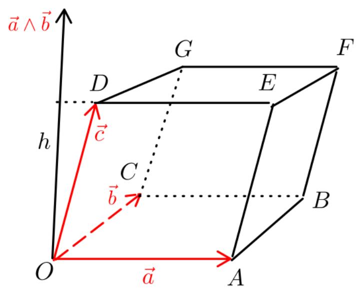
Exemplo OPv2.9. Ver Exercícios 33 a 36 em Slide de Exercícios.

OPv3 Produto Misto

A definição do produto misto de três vetores LI no espaço é motivada pelo cálculo do volume de um paralelepípedo gerado por tais vetores.

OPv3.1 Volume de paralelepípedo e tetraedro

Calcular o volume V_P do paralelepípedo $P = OABCDEFG$ determinado por três vetores LI $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ de V^3.



- $V_P = (\text{área da base})(\text{altura}) = (\text{área paralelogramo } OABC)h$

- área da base $= area(OABC) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$

- $h = \|proj_{\vec{a}\wedge\vec{b}}\, \vec{c}\,\| \overset{Prop. P2.8}{=} \dfrac{|\vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})|}{\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|}$

- Portanto,

$$\boxed{V_P = |\vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})| = |(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c}|}$$

Definição OPv3.1. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de V^3.

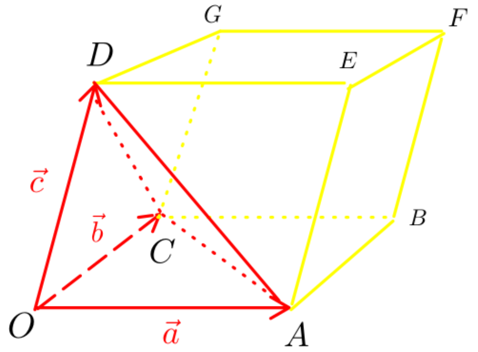
O **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, **nessa ordem**, é o número real $\vec{u}\wedge\vec{v}\cdot\vec{w}$, denotado por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] := (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}.$$

Nota. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores LI de V^3:

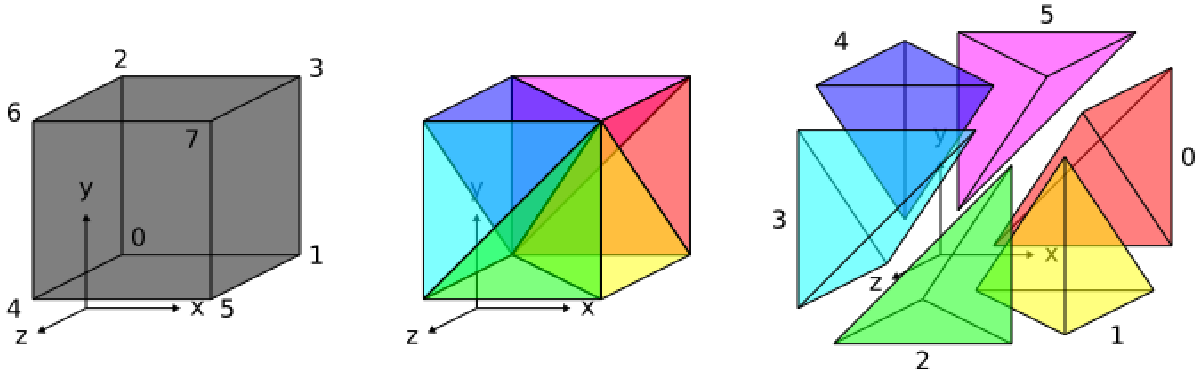
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OD}.$$

Estes vetores definem também um tetraedro (figura em vermelho):



O volume do tetraedro é:

$$V_T = \frac{1}{6}(\text{volume do paralelepípedo determinado por } \vec{a},\, \vec{b} \text{ e } \vec{c}).$$



Fonte: https://www.dune-project.org/doxygen/2.6.0/classDune_1_1GridFactoryInterface.html

$$V_T = \frac{1}{6}\,|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6}\,\left|\,[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\,\right|.$$

COMO CALCULAR DE MANEIRA MAIS RÁPIDA O PRODUTO MISTO?

Proposição OPv3.2. *Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Se*

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E, \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E, \quad \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_E,$$

então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \textit{coordenadas de } \vec{u} \\ \longleftarrow \textit{coordenadas de } \vec{v}\cdot \\ \longleftarrow \textit{coordenadas de } \vec{w} \end{array}$$

OPv3.2 Relações entre produto misto e bases

Corolário OPv3.3. *Sejam $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva e $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de V^3.*

1. *os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD se e somente se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$;*

2. *os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *são LI se e somente se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

Corolário OPv3.4. *Seja* $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ *uma base ortonormal positiva.*
Se $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *e* $G = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *são bases quaisquer de* V^3, *então*

1. $\det M_{EF} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
2. $\det M_{FG} = \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$.

Corolário OPv3.5. *Seja* $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ *uma base ortonormal positiva,* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *três vetores de* V^3 *e* $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

1. *Se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, *então* F *não é base.*
2. *Se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$, *então* F *é base;*
   (a) *se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$, *então* F *é base positiva;*
   (b) *se* $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$, *então* F *é base negativa.*

OPv3.3 Propriedades do produto misto

Proposição OPv3.6.
Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i \in V^3$, $i = 1, 2$.

1. *O produto misto é tri-linear:*
   (a) $[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$;
   (b) $[\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}]$;
   (c) $[\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2]$.

2. *O produto misto é alternado:*

$$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] \\ &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].\end{aligned}$$

3. *Se os vetores* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$ *são combinações lineares de* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, *ou seja,*

$$\vec{a} = a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}, \quad \vec{b} = a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}, \quad \vec{c} = a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w},$$

então:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]. \tag{OPv3.1}$$

Demonstração. Tarefa!

□

Aula 11

Fazer Exercícios 32-(c)-(d) e 36.

Exemplo OPv3.7. Ver Exercícios 37 e 38 em Slide de Exercícios.

Retas e planos

Objetivo

Introduzir um sistema de coordenadas no espaço Euclideano E^3.

Apresentar as diferentes formas de equação de reta:

- vetorial ou paramétrica ou simétrica,

e de equação de plano:

- vetorial ou paramétrica ou geral.

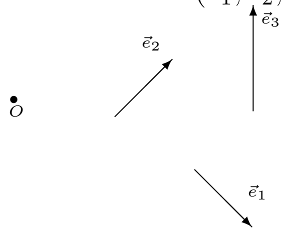
Estudar as posições relativas entre tais objetos.

R1 Sistema de coordenadas

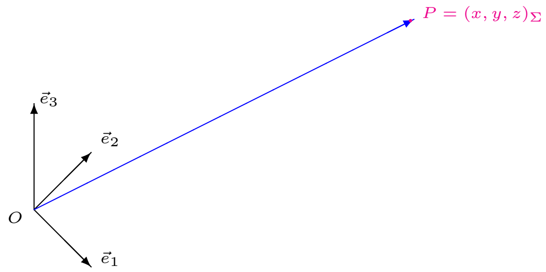
Aula 12

O sistema de coordenadas fornecerá um método para descrever pontos do espaço Euclideano E^3 através de números reais (ternas).

Sejam um ponto O de E^3 e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.



O par $\Sigma = (O, E)$ é chamado **sistema de coordenadas** em E^3, de **origem** O e base E.

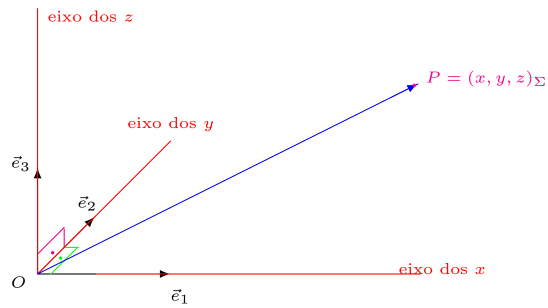


O sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$ é dito **ortogonal** se a base E é **ortonornal**.

As **coordenadas do ponto** P em E^3 **no sistema de coordenadas** Σ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base E. Escrevemos:

$$P = (x, y, z)_\Sigma \iff \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_E. \tag{R1.1}$$

As retas que passam por O e são paralelas aos vetores $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ são chamadas **eixos coordenados**.
Cada um dos planos determinados por dois eixos coordenados chama-se **plano coordenado**.



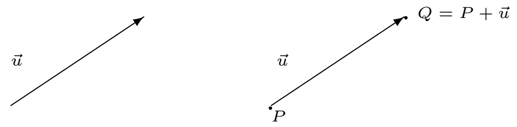
Exemplo R1.1. [18] Ver Exercício 39 em Slide de Exercícios.

[18] Lembrar como somar vetores: Definição V2.2 e Lei do Paralelogramo (Exemplo V2.3)

R1.1 Soma de ponto com vetor

Sejam P um ponto em E^3 e $\vec{u}$ um vetor em V^3.
A **soma de P com $\vec{u}$** é o (único) ponto[19] Q em E^3 tal que $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$:

$$P + \vec{u} = Q \iff \vec{u} = \overrightarrow{PQ}. \tag{R1.2}$$



A seguir obtemos algumas propriedades utilizando as coordenadas de vetor e as coordenadas de ponto[20].

Proposição R1.2.
Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em E^3. Se

$$A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma, \quad B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma, \quad e \quad \vec{u} = (a, b, c)_E,$$

então

1. $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E$;
2. $A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma$, *onde* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Lembre: a distância, $d(A, B)$, entre dois pontos A e B é o número real

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Proposição R1.3. *Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3. Se*

$$A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma, \quad B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma,$$

então

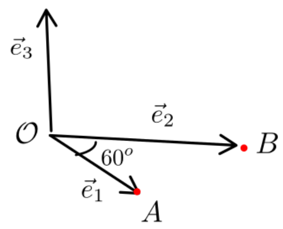
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

[19] Veja Nota 1 em Slide 1
[20] Rever Seção B1.1: Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas

Demonstração. Segue da Proposição R1.2 e do Teorema P2.3. □

Atenção: E se o sistema de coordenadas **não é ortogonal**?

Considere o sistema $\Sigma = (O, E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$, onde:



- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são vetores unitários,
- $\vec{e}_3$ é ortogonal a $\vec{e}_1, \vec{e}_2$;
- $ang(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \pi/3$.

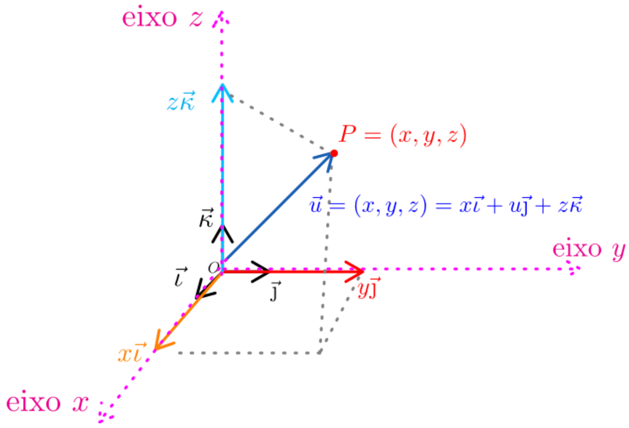
Se $(x_1, y_1, z_1)_\Sigma = A = O + \vec{e}_1$ e $(x_2, y_2, z_2)_\Sigma = B = O + \vec{e}_2$, então

$$d(A, B) = 1,$$

enquanto

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{2}.$$

Quando o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$ for *ortogonal* e a base E (ortonormal) for *positiva*, indicaremos $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$, chamada de **base canônica** de $V^3 \approx \mathbb{R}^3$ (p. D11).



Fixado um **sistema ortogonal com base positiva**, usualmente não se escreve na notação de coordenadas de vetor ou de ponto os índices que indicam a base ou o sistema: assim a notação

$$(x, y, z)$$

pode representar as coordenadas do ponto

$$P = (x, y, z)_\Sigma$$

ou as coordenadas do vetor

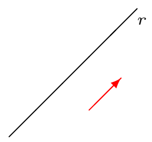
$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa} = (x, y, z)_E.$$

Cuidado para não confundir Ponto com Vetor!

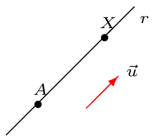
R2 Retas

Objetivo: Dada uma reta r em E^3, encontrar uma equação para r.

Um vetor não nulo paralelo à reta r é chamado de **vetor diretor** de r.



R2.1 Equação Vetorial



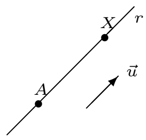
- $\vec{u}$ um vetor diretor de r
- A um ponto de r ($A \in r$)
- $$\begin{aligned} X \neq A,\ X \in\ r \iff & \overrightarrow{AX} \text{ e } \vec{u} \text{ são paralelos} \\ \iff & \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R} \\ \overset{Eq.(\text{R1.2})}{\iff} & X = A + \lambda\vec{u} \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A equação:

$$r\colon X = A + \lambda\vec{u}, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{R2.1}$$

é chamada **equação vetorial da reta** r. O escalar λ é chamado **parâmetro** da reta.

Para as próximas equações da reta, considere fixado $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em E^3.



- $X = (x, y, z)_\Sigma$
- $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma \in r$
- $\vec{u} = (a, b, c)_E \neq \vec{0}$ vetor diretor

R2.2 Equações paramétricas

- Escrevendo a equação vetorial em coordenadas:

$$r\colon (x,y,z)_\Sigma = (\mathbf{x_0},\mathbf{y_0},\mathbf{z_0})_\Sigma + \lambda(a,b,c)_E,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

O sistema:

$$r\colon \begin{cases} x = \mathbf{x_0} + \lambda a \\ y = \mathbf{y_0} + \lambda b, \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z = \mathbf{z_0} + \lambda c \end{cases} \tag{R2.2}$$

é chamado **sistema de equações paramétricas da reta** r (*equações paramétricas da reta* r.)

R2.3 Equações simétricas

- $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0 \Longrightarrow$ é possível isolar λ nas equações em (R2.2)

Se $a\neq 0$, $b\neq 0$ e $c\neq 0$, o sistema:

$$r\colon \frac{x-\mathbf{x_0}}{a} = \frac{y-\mathbf{y_0}}{b} = \frac{z-\mathbf{z_0}}{c} \tag{R2.3}$$

é chamado **sistema de equações simétricas da reta** r (*equações simétricas da reta* r.)

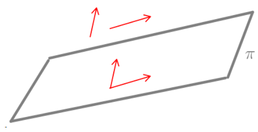
Exemplo R2.1. Ver Exercício 40 em Slide de Exercícios.

R3 Plano

Aula 13

Objetivo: Dado um plano π em E^3, encontrar uma equação para π.

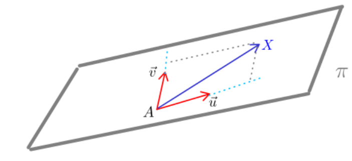
Dois vetores LI paralelos ao plano π são chamados **vetores diretores** de π.



A seguir deduzimos equações do plano π determinado pelos vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e pelo ponto **A** $\in \pi$.

R3.1 Equação Vetorial

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π



- A um ponto de π
-

$$X \neq A,\ X \in \ \pi \overset{pag.D4}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{AX}, \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são coplanares}$$

$$\underset{\vec{u},\vec{v} LI, base\, de\, V^2}{\overset{pag.D5}{\Longleftrightarrow}} \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ para algum } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \text{ para algum } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

A equação:

$$\pi\colon X = \mathbf{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \qquad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{R3.1}$$

é chamada **equação vetorial do plano** π. Os escalares λ e μ são chamados **parâmetros** do plano.

Para as próximas equações do plano π, considere fixado $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas em E^3.

- $X = (x, y, z)_\Sigma$
- $\mathbf{A} = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$
- $\vec{u} = (r, s, t)_E, \quad \vec{v} = (m, n, p)_E$

R3.2 Equações paramétricas

- Equação vetorial em coordenadas:

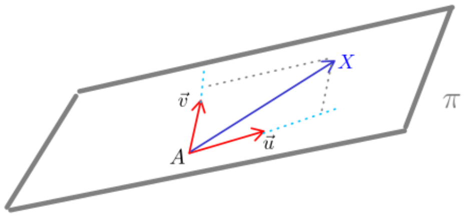
$$\pi\colon (x, y, z)_\Sigma = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma + \lambda(r, s, t)_E + \mu(m, n, p)_E, \qquad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}.$$

O sistema:

$$\pi\colon \begin{cases} x = \mathbf{x_0} + \lambda\, r + \mu\, m \\ y = \mathbf{y_0} + \lambda\, s + \mu\, n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = \mathbf{z_0} + \lambda\, t + \mu\, p \end{cases} \tag{R3.2}$$

é chamado **sistema de equações paramétricas do plano** π (*equações paramétricas do plano* π.)

R3.3 Equação Geral



$$X \in \pi \overset{pag.D4}{\iff} \overrightarrow{AX}, \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são coplanares} \overset{Nota4-Slide2}{\iff} \overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v} \text{ são LD}$$

$$\overset{Prop.B1.6}{\iff} \boxed{\begin{vmatrix} x - \mathbf{x_0} & y - \mathbf{y_0} & z - \mathbf{z_0} \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0}$$

$$\iff \underbrace{(sp - tn)}_{\mathbf{a}} x + \underbrace{(mt - rp)}_{\mathbf{b}} y + \underbrace{(rn - sm)}_{\mathbf{c}} z + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{\mathbf{d}} = 0.$$

A equação[21]:

$$\pi\colon ax + by + cz + d = 0, \tag{R3.3}$$

onde

$$a = \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}, \quad b = -\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}, \quad d = -(ax_0 + by_0 + cz_0),$$

com $(x_0, y_0, z_0)_\Sigma \in \pi$ e $(r, s, t)_E$ e $(m, n, p)_E$ vetores diretores de π.

é chamada **equação geral do plano** π.

Exemplo R3.1. Ver Exercícios 41 a 43 em Slide de Exercícios.

---

[21]Os números reais a, b, c não se anulam simultaneamente: veja Proposição B1.4.

Resumindo:

$$\begin{cases} A=(x_0,y_0,z_0)\in\pi, \quad \vec{u}=(r,s,t)_E, \vec{v}=(m,n,p)_E \text{ vetores diretores de } \pi \\ \\ a:=\begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}, \quad b:=-\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}, \quad c:=\begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} \quad d:=-(ax_0+by_0+cz_0) \\ \\ ax+by+cz+d=0 \text{ é } \textbf{uma}^{22} \text{ equação geral de } \pi \end{cases}$$

$$\overset{Prop.B1.4}{\Longrightarrow} \begin{cases} a,b,c \text{ não se anulam simultaneamente } {\scriptstyle (\text{pois } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são LI})} \\ \\ ax+by+cz+d=0 \text{ é uma equação de } 1^o \text{ grau em } x,y,z \end{cases}$$

Pergunta: Dada uma equação de 1^o grau em três incógnitas x, y, z,

$$ax+by+cz+d=0,$$

ela é equação geral de algum plano?

Aula 14

Proposição R3.2. *Fixado um sistema de coordenadas $\Sigma=(O,E)$, toda equação de 1^o grau em três incógnitas, i.e.,*

$$ax+by+cz+d=0, \tag{R3.4}$$

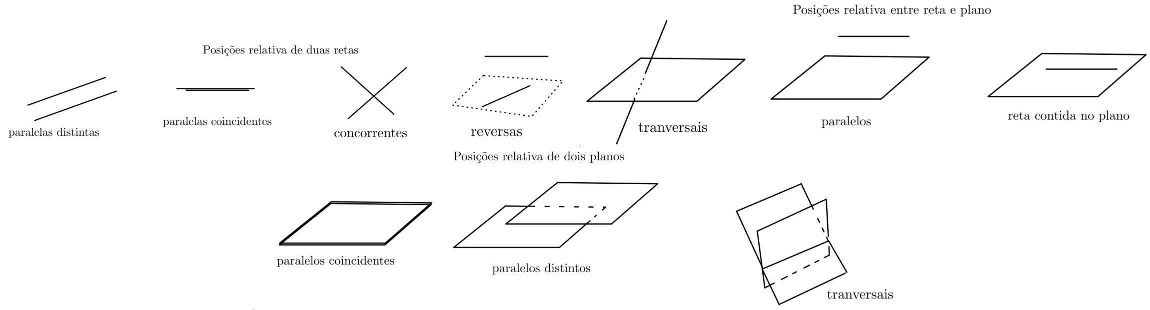
onde a, b e c são números reais que não se anulam simultaneamente, é equação geral de um plano.

Exemplo R3.3. Ver Exercícios 44 a 46 em Slide de Exercícios.

[22] $\alpha(ax+by+c+d)=0$ para qualquer $\alpha\neq 0$ também é uma equação geral de π pois: $\vec{u},\alpha\vec{v}$ OU $\alpha\vec{u},\vec{v}$ são LI, OU mais genericamente $\alpha\vec{u},\beta\vec{v}$ $(\beta\neq 0)$ são LI e $\alpha\beta(ax+by+c+d)=0$ é uma equação geral de π.

R4 Posição relativa entre retas e planos

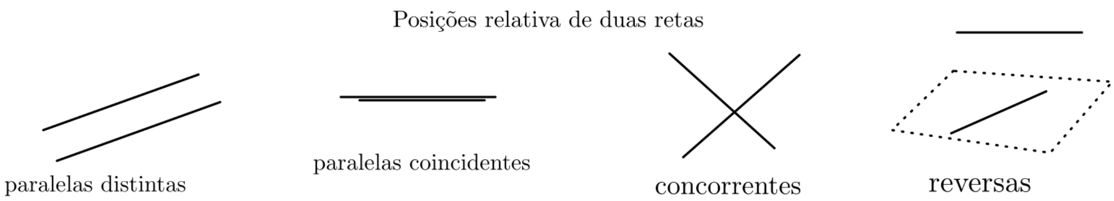
Objetivo: Conhecendo equações de retas r, s e de planos π, π_1, obter um critério para analisar a posição relativa entre tais objetos.



R4.1 Posição relativa entre duas retas

Sejam r e s duas retas em E^3. Existem quatro possibilidades para as posições relativas de r e s

- paralelas[23] coincidentes
- paralelas distintas
- concorrentes: se interceptam num ponto
- reversas: existe um plano π que contém a reta s e que é paralelo à reta r com $r \not\subseteq \pi$



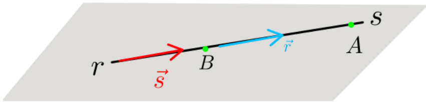
Objetivo: Obter um critério para analisar a posição relativa das retas r e s através de suas equações.

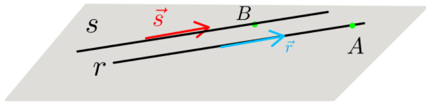
Proposição R4.1. *Suponha que*

$$r\colon X = A + \lambda\vec{r},\ \lambda \in \mathbb{R} \qquad e \qquad s\colon X = B + \mu\vec{s},\ \mu \in \mathbb{R}$$

[23] duas retas são paralelas se possuem vetores diretores paralelos

1. *Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LD*[24]*, então*

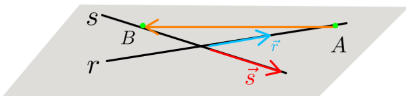


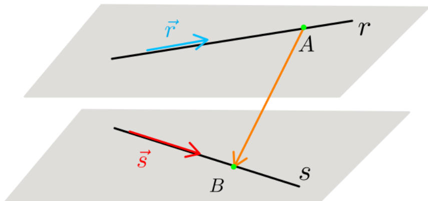


   (a) *r e s são paralelas coincidentes $\iff A \in s$ (ou $B \in r$).*

   (b) *r e s são paralelas distintas $\iff A \notin s$.*

2. *Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI, então*





   (a) *r e s são concorrentes $\iff \vec{r}, \vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são LD*[25]*.*

   (b) *r e s são reversas $\iff \vec{r}, \vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são LI.*

Se r e s são concorrentes e $\vec{r} \perp \vec{s}$, dizemos que r e s são **perpendiculares**.

Se r e s são reversas e $\vec{r} \perp \vec{s}$, dizemos que r e s são **ortogonais**.

Exemplo R4.2. Ver Exercícios 47 e 48 em Slide de Exercícios.

R4.2 Posição relativa entre retas e planos

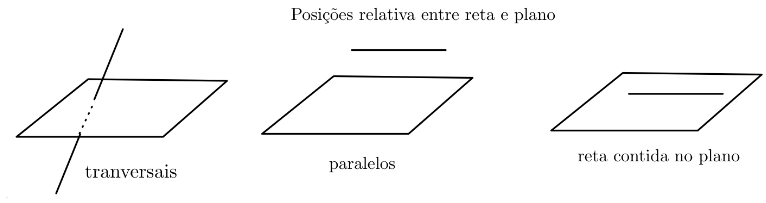
Aula 15

Sejam r uma reta e π um plano em E^3. Existem três possibilidades para a posição relativas de r e π

· r e π são transversais: se interceptam num ponto (vetor diretor de r não é paralelo ao plano)

[24]Lembre-se da Proposição B1.4.
[25]Lembre-se da Proposição B1.6.

- r é paralela ao plano π: **vetor** diretor de r é **paralelo ao plano** π e $r \not\subseteq \pi$
- r está contida no plano π



Objetivo: Conhecendo equações de r e π, obter um critério para analisar a posição relativa.

Proposição R4.3. *Sejam $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano π, $\vec{n} := (a,b,c)_E$*[26] *e $\vec{u} = (m,p,q)_E$ um vetor. Então, $\vec{u}$ é paralelo a π se, e somente se,*

$$am + bp + cq = 0 \quad \overset{\text{s.c.o}}{\Longleftrightarrow}{}^{27} \quad \vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$$

Corolário R4.4. *Sejam $ax+by+cz+d=0$ uma equação geral de um plano π, $\vec{n} = (a,b,c)_E$, A um ponto de uma reta r e $\vec{r} = (m,p,q)_E$ um vetor diretor de r. Então,*

1. *r e π são transversais $\Longleftrightarrow am + bp + cq \neq 0 \overset{\text{s.c.o}}{\Longleftrightarrow} \vec{n} \cdot \vec{r} \neq 0$;*
2. *r é paralela a π $\Longleftrightarrow am + bp + cq = 0$ e $A \notin \pi \overset{\text{s.c.o}}{\Longleftrightarrow} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ e $A \notin \pi$;*
3. *r está contida em π $\Longleftrightarrow am + bp + cq = 0$ e $A \in \pi \overset{\text{s.c.o}}{\Longleftrightarrow} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ e $A \in \pi$.*

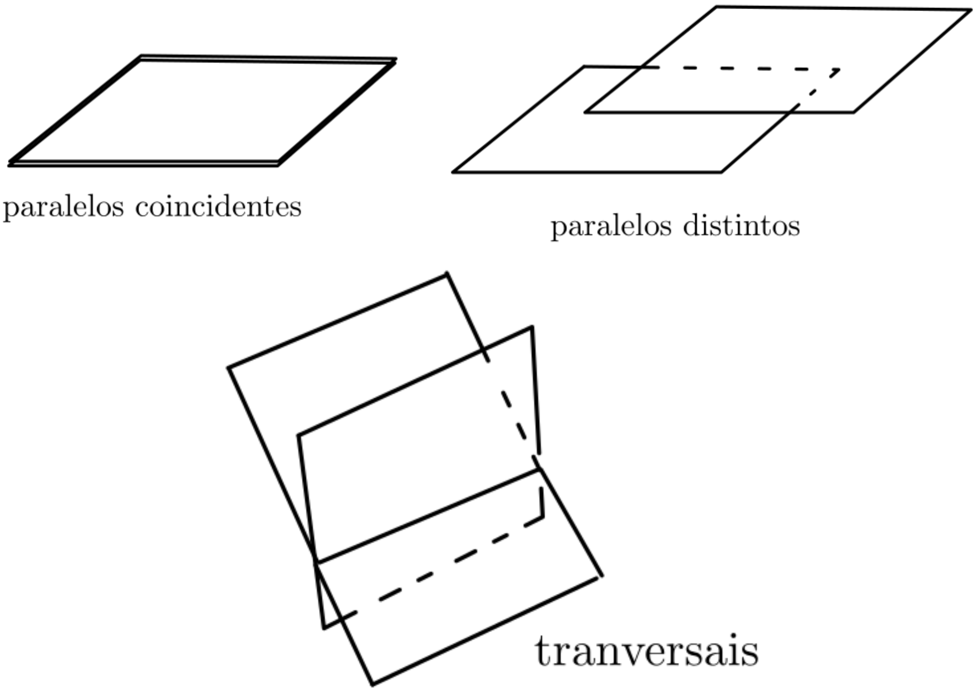
Exemplo R4.5. Ver Exercícios 49 e 50 em Slide de Exercícios.

R4.3 Posição relativa entre dois planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos em E^3. Sabemos que existem três possibilidades para a posição relativas.

- paralelos coincidentes
- paralelos distintos
- concorrentes/transversais: se interceptam numa reta.

Posições relativa de dois planos



Objetivo: Conhecendo as equações dos planos π_1 e π_2, obter um critério para analisar a posição relativa.

---

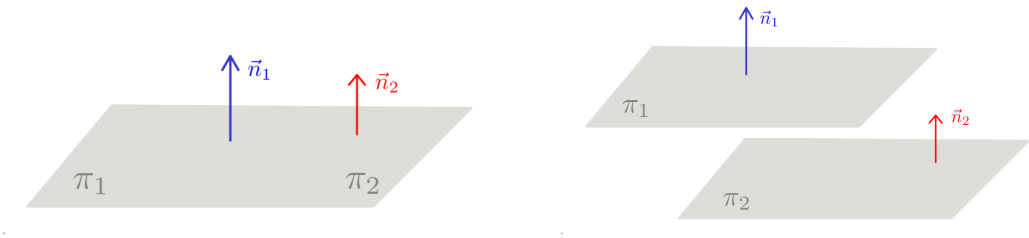
[26] O vetor $\vec{n}$ será um **vetor normal ao plano** π (ver Slide 7).
[27] **s.c.o**: um sistema de coordenadas ortogonal foi fixado. Ver Teorema P2.3

Proposição R4.6. *Considere os planos π_1 e π_2 com equações gerais*

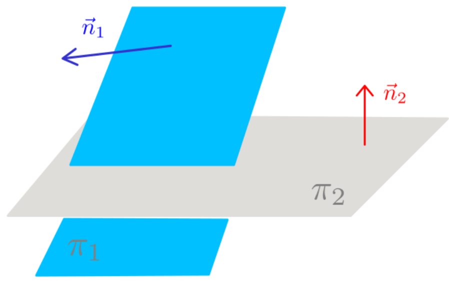
$$\pi_1\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \qquad e \qquad \pi_2\colon a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

e $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)_E$. Então,

1. *π_1 e π_2 são paralelos $\iff$ existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\vec{n}_1 = k\,\vec{n}_2$.*[28]
   (a) *são coincidentes se $d_1 = kd_2$.*
   (b) *são distintos se $d_1 \neq kd_2$.*



2. *π_1 e π_2 são transversais $\iff$ $\vec{n}_1 \neq k\,\vec{n}_2$ para qualquer $k \in \mathbb{R}$.*[29]



Demonstração. Tarefa! (veja Boulos, p. 196) □

Exemplo R4.7. Ver Exercício 51 em Slide de Exercícios.

R4.3.1 Equação de reta: forma planar

Se os vetores $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)_E$ e $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)_E$ são LI, então o sistema

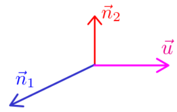
$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

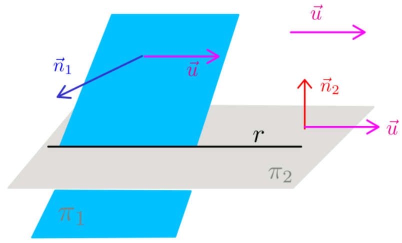
[11] $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1, \vec{n}_2$ são LD.
[29] $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1, \vec{n}_2$ são LI.

descreve uma reta (pois é a intersecção de dois planos transversais) e é chamado **sistema de equações na forma planar** de r .

Proposição R4.8. *Um vetor* $\vec{u} = (m, p, q)_E$ *é paralelo à reta*

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$





se, e somente se,

$$a_1m + b_1p + c_1q = 0 \text{ e } a_2m + b_2p + c_2q = 0 \quad \overset{\text{s.c.o.}}{\iff} \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0 \text{ e } \vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0$$

$$\underset{\text{base positiva}}{\overset{\text{s.c.o.}}{\iff}} \quad \vec{u} \parallel \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

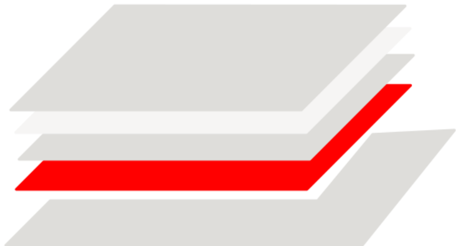
Nota: Em um **sistema de coordenadas ortogonal com base positiva**, um vetor diretor da reta r obtida pela intersecção de dois planos é o produto vetorial de "vetores normais"aos planos.

A seguir apresentaremos uma técnica específica para resolução de alguns tipos de problemas, a qual:
- auxilia em reduzir o número de incógnitas no problema
- eficiente em problemas que envolvem ângulos e distâncias

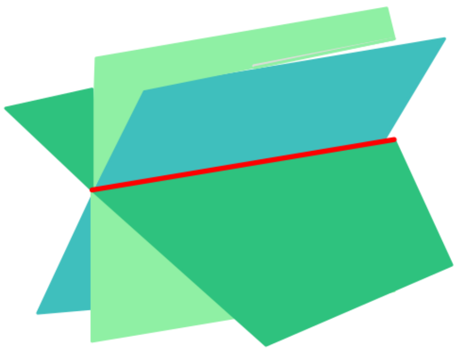
A técnica é chamada "técnica do feixe", onde feixe significa o conjunto de todos objetos de E^3 com uma dada propriedade.

Trataremos de dois casos:

- **Feixe de planos paralelos a um plano** π: conjunto de todos os planos de E^3 que são paralelos a π



- **Feixe de planos que contém uma reta** r: conjunto de todos os planos de E^3 que contém r



R4.4 Feixe de planos paralelos a um plano π

Objetivo: Conhecendo a equação do plano π, obter um critério para determinar todos os planos paralelos a π.

- $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$
- $\pi_1\colon a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
- $a_1 =?$, $b_1 =?$, $c_1 =?$, $d_1 =?$ de modo que $\pi_1 \parallel \pi$

- $\pi_1 \parallel \pi \overset{Prop.R4.6}{\iff} (a_1, b_1, c_1) = k(a, b, c)$ para algum $k \neq 0$:

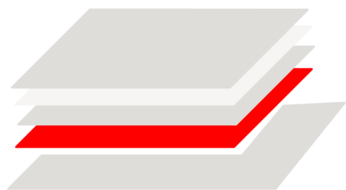
$$\pi_1\colon kax + kby + kcz + d_1 = 0 \iff \pi_1\colon ax + by + cz + \frac{d_1}{k} = 0$$

- $\pi_1 \parallel \pi \iff \pi_1\colon ax + by + cz + \alpha = 0$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$

Proposição R4.9. *Dado o plano $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$, a equação*

$$ax + by + cz + \alpha = 0$$

quando α percorre $\mathbb{R}$ descreve o feixe de planos paralelos a π.



Exemplo R4.10. O feixe de planos paralelos ao plano

$$\pi : x + y + 2z - 1 = 0$$

é dado por

$$\pi_\alpha : x + y + 2z + \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

R4.5 Feixe de planos que contém uma reta r

Objetivo: Conhecendo a equação de r, obter um critério para obter todos os planos que contém r.

- eq. planares de r : $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ com

$$\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1) \quad \text{e} \quad \vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2) \quad \text{LI}$$

- $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ contém r
- $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ contém r
- $\pi : ax + by + cz + d = 0$ plano qualquer que contenha r;
- $\vec{n} := (a, b, c)$;
- $a =?$, $b =?$, $c =?$, $d =?$

-

$$r \in \pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 \iff \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ ax + by + cz = -d \end{cases} \quad \begin{array}{c}\text{é S.P.I.} \\ \text{(infinitas soluções)}\end{array}$$

$$\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \iff \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n} \quad \text{são LD}$$

$$\iff \exists \alpha_1, \beta_1, \gamma \in \mathbb{R} \ \text{ não todos nulos}; \alpha_1\vec{n}_1 + \beta_1\vec{n}_2 + \gamma\vec{n} = \vec{0}$$

$$\underset{\alpha_1,\beta_1,\gamma \text{ não todos nulos}}{\overset{\vec{n}_1,\vec{n}_2 LI}{\Longrightarrow}} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\text{(não ambos nulos)}}; \vec{n} = \alpha\vec{n}_1 + \beta\vec{n}_2$$

$$\therefore \quad (\star) \quad \begin{cases} a = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ b = \alpha b_1 + \beta b_2 \\ c = \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases}$$

- $P = (x_0, y_0, z_0) \in r \cap \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi \iff$
$$\iff \begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0 & (\times\alpha) \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 = 0 & (\times\beta) \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 & (\times -1) \end{cases}$$
$\iff d = \alpha d_1 + \beta d_2$

- $\pi : \alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$

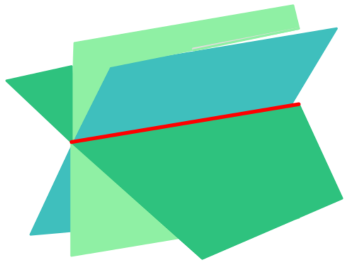
Proposição R4.11. *Seja r a reta cujas equações planares são:*

$$r\colon \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

O feixe de planos que contém r é descrito pela equações

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

onde α, $\beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.



Exemplo R4.12. Ver Exercício 52 em Slide de Exercícios.

Perpendicularismo, medida angular, distância

Objetivo

Aula 16

Estudar ortogonalidade e perpendicularismo de retas e planos do espaço Euclideano E^3.

Obter a medida angular entre retas ou entre planos ou entre reta e plano e a distância entre pontos, retas e planos.

Lembre-se:

Para usarmos as fórmulas para o cálculo de distância entre pontos ou de produto escalar entre vetores precisamos de uma **base ortonormal** e portanto de um **sistema de coordenadas ortogonal**: veja Teorema P2.3.

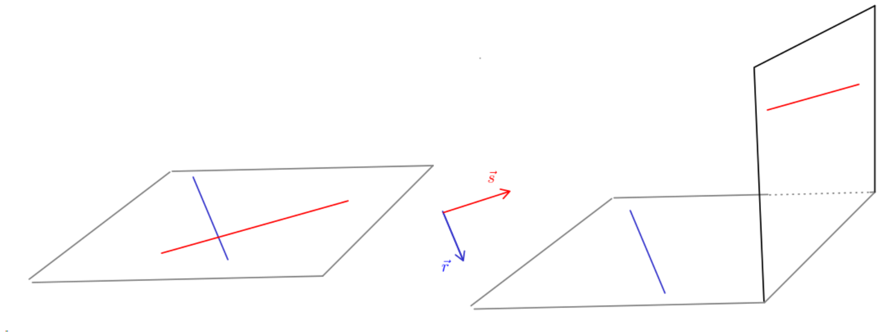
Para usarmos as fórmulas para o cálculo de produto vetorial entre vetores precisamos de uma **base ortonormal positiva**: veja Teorema OPv2.2.

Sempre que usarmos tais fórmulas estaremos considerando um sistema de coordenadas ortogonal com base positiva.

Pad1 Ortogonalidade e perpendicularismo

Vimos na Proposição R4.1 que duas retas r e s no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas e que: se os vetores diretores são ortogonais, $\vec{r} \perp \vec{s}$, e

- r e s são concorrentes, então r e s são **perpendiculares**.
- r e s são reversas, então r e s são **ortogonais**.



Quando uma reta é perpendicular a um plano?

Quando dois planos são perpendiculares?

Pad1.1 Vetor Normal

Seja π um plano em E^3. Um **vetor normal** a π é qualquer vetor não nulo $\vec{\eta}$ ortogonal a π.

Consequência Pad1.1. *Outras formas equivalentes de definir vetor normal:*

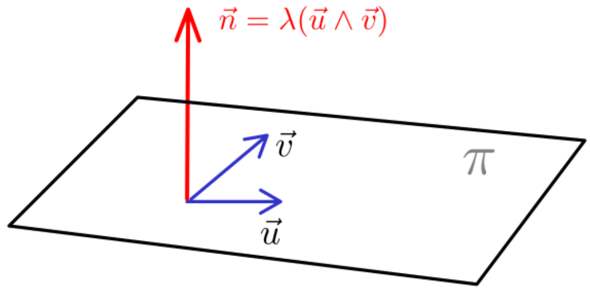
1. *Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a qualquer vetor paralelo ao plano.*
2. *Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a quaisquer vetores diretores do plano.*
3. *Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a dois vetores diretores do plano.*

Como encontrar um vetor normal a π?

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores diretores de π.

- $$\vec{\eta} \text{ não nulo é normal a } \pi \iff \vec{\eta} \text{ é ortogonal a } \vec{u} \text{ e a } \vec{v}$$
  $$\underset{Def.OPv2.1}{\overset{\vec{u},\vec{v}LI}{\iff}} \quad \vec{\eta} \text{ e } \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ são paralelos.}$$

- $\vec{\eta} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ é **um** vetor normal a π



QUAL A RELAÇÃO ENTRE VETOR NORMAL E EQUAÇÃO GERAL DE π?

- $\pi : ax + by + cz + d = 0$ com a, b, c não todos nulos
- $$\vec{u} = (m, n, p) \parallel \pi \quad \underset{\textbf{base orton.}}{\overset{Prop.R4.3}{\iff}} \quad (a, b, c) \cdot (m, n, p) = 0$$
  $$\underset{\textbf{base orton.}}{\overset{Prop.P2.3}{\iff}} \quad \vec{\eta} = (a, , b, c) \perp \vec{u}$$
- Por Pad1.1-(1), $\vec{\eta} = (a, , b, c) \neq \vec{0}$ é vetor normal a π

A recíproca também vale:

Proposição Pad1.2. *Considere em E^3 um sistema de coordenadas* **ortogonal**. *Então $\vec{\eta} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ é um vetor normal a π se, e somente se, π possui equação geral da forma*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Nota. A proposição acima **não é válida** se o sistema de coordenadas não é ortogonal.

Exemplo Pad1.3. Sejam $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ outra base onde

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath}, \quad \vec{e}_2 = \vec{\jmath}, \quad \vec{e}_3 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{\kappa}.$$

Considere o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$. Obtenha um vetor normal ao plano π de equação $z = 0$ no sistema Σ.

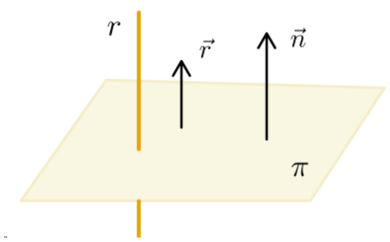
Consequência:

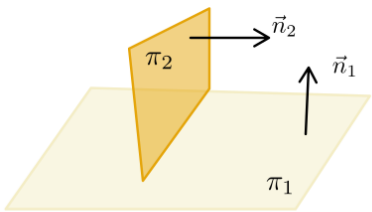
1. Se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais, respectivamente, aos planos π_1 e π_2 e $\vec{r}$ é um vetor diretor da reta r, então

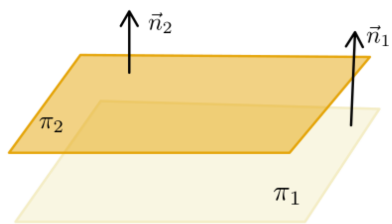
   (a) r e π são perpendiculares se e somente se $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são paralelos;

   (b) π_1 e π_2 são perpendiculares se e somente se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais;

   (c) π_1 e π_2 são paralelos se e somente se $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são paralelos.







Exemplo Pad1.4. Ver Exercícios 53 e 54 em Slide de Exercícios.

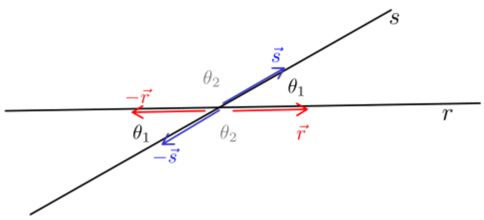
Pad2 Medida Angular

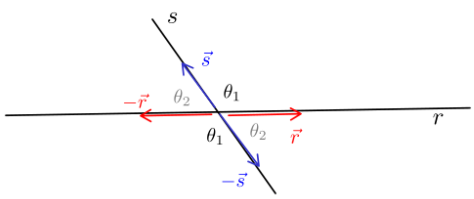
Pad2.1 Medida angular entre retas

Sejam r e s duas retas com vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$[30].

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre r e s** é a menor medida entre as medidas angulares dos vetores diretores de r e de s:

$$\min\{ang(\vec{r},\vec{s}) = ang(-\vec{r},-\vec{s}), ang(\vec{r},-\vec{s}) = ang(-\vec{r},\vec{s}),\}$$





Denotamos por $ang(r,s)$ a medida angular entre r e s e temos

$$0 \leq ang(r,s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

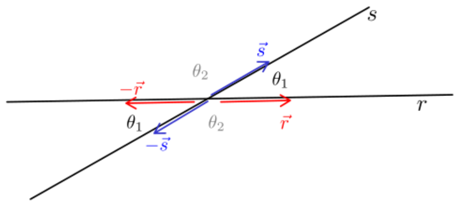
- se $ang(r,s) = 0$ então r e s são paralelas
- se $ang(r,s) = \frac{\pi}{2}$ então r e s são ortogonais (podem ser concorrentes ou reversas)

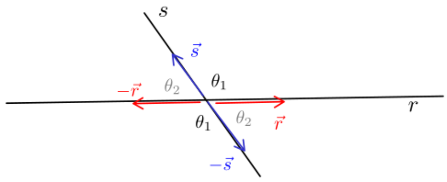
Como calcular o ângulo entre duas retas?

---

[30] $-\vec{r}$ e $-\vec{s}$ também são vetores diretores

- $\theta_1 = ang(\vec{r}, \vec{s})$
- $\theta_2 = ang(-\vec{r}, \vec{s})$





- $\theta_2 = \pi - \theta_1 \Longrightarrow \cos\theta_2 = -\cos\theta_1$
- $\cos(ang(r,s)) = \begin{cases} \cos\theta_1, & \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos\theta_2 = -\cos\theta_1, & \theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} = |\cos\theta_1|$
- Pela Proposição P1.5, temos que $\cos\theta_1 = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}$

Portanto,

se r e s são duas retas em E^3, então

$$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|}, \tag{Pad2.1}$$

onde $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores diretores de r e s, respectivamente.

Exemplo Pad2.1. Ver Exercício 55 em Slide de Exercícios.

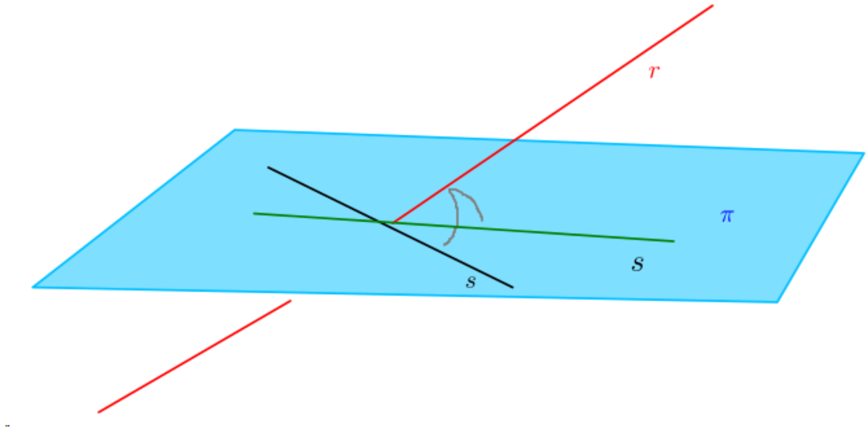
Aula 17: Prova 1

Pad2.2 Medida angular entre reta e plano

Aula 18

Sejam r uma reta transversal a um plano π em E^3.

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre r e π** é a menor medida dentre todas as medidas angulares entre r e retas s contidas em π.

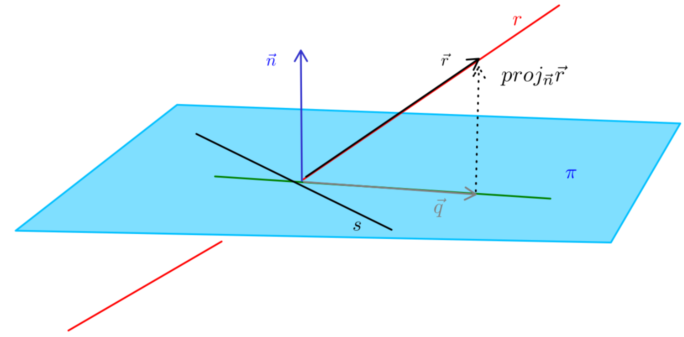


COMO CALCULAR O ÂNGULO ENTRE UMA RETA E UM PLANO?

- $\vec{r}$ um vetor diretor da reta r
- s uma reta qualquer em π

QUANDO O ÂNGULO ENTRE r E s É MÍNIMO?

- $\vec{n}$ um vetor normal ao plano π.
- $\vec{q}$ a projeção ortogonal de $\vec{r}$ ao plano π:

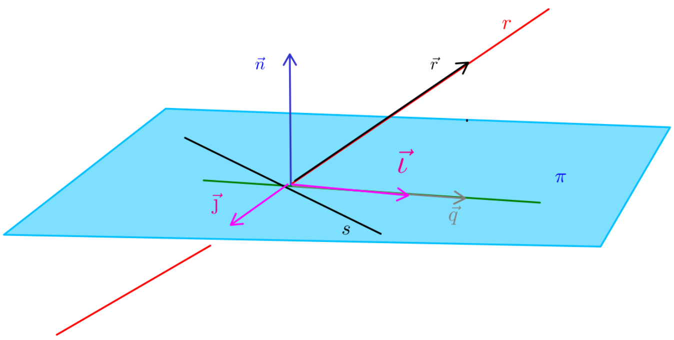


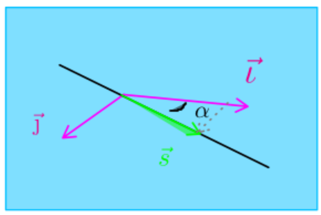
$$proj_{\vec{n}}\vec{r} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{r} \qquad \text{(Proposição P2.8)}$$

$$\vec{r} = proj_{\vec{n}}\vec{r} + \vec{q} \Longrightarrow \vec{q} = \vec{r} - proj_{\vec{n}}\vec{r} \Longrightarrow \boxed{\vec{q} = \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}}$$

$\vec{s}$ =??

- $\vec{\imath} = \dfrac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}, \quad \vec{\jmath} = \vec{\imath} \wedge \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$
  $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ são vetores diretores de π, unitários e ortogonais





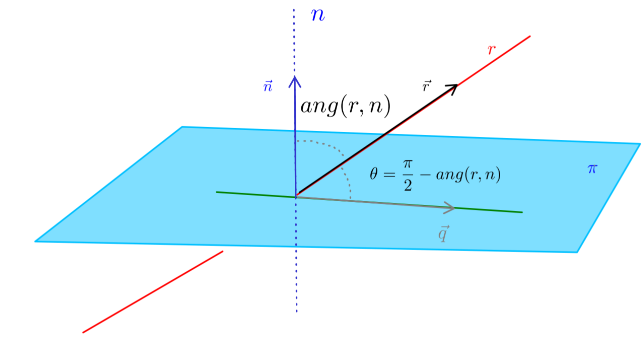
- $\vec{s} = \cos\alpha\vec{\imath} + \sin\alpha\vec{\jmath}$ é um vetor diretor unitário de s, $\alpha = ang(\vec{s}, \vec{\imath})$

$$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\vec{r}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{r}\|\|\vec{s}\|} =??$$

- $\vec{r}\cdot\vec{s} = (\cos\alpha)\vec{r}\cdot\vec{\imath} + (\sin\alpha)\vec{r}\cdot\vec{\jmath}$

- $\vec{\jmath} \perp \vec{q}$ e $\vec{\jmath} \perp \vec{n}$ e $\boxed{\vec{q} = \vec{r} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}} \Longrightarrow \vec{r}\cdot\vec{\jmath} = 0$

- $\vec{r} \cdot \vec{s} = (\cos\alpha)\vec{r} \cdot \vec{\iota}$
- $$\cos(ang(r,s)) = \frac{|\cos\alpha\vec{r} \cdot \vec{\iota}|}{\|\vec{r}\|} = \frac{|\cos\alpha||\vec{r} \cdot \vec{\iota}|}{\|\vec{r}\|} = \frac{|\cos\alpha|\|\vec{r}\|\|\vec{\iota}\|}{\|\vec{r}\|} = |\cos\alpha|$$
- $ang(r,s)$ é mínimo $\overset{\text{arccos } dec.}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{\alpha = 0}$ $\Longleftrightarrow$ s é a projeção ortogonal de r em π



Proposição Pad2.2. *A medida angular entre uma reta r transversal a um plano π é dada por*

$$\mathbf{ang}(\mathbf{r}, \pi) = \frac{\pi}{2} - ang(r,n),$$

onde n é uma reta ortogonal a π.

- $\sin(ang(r,\pi)) = \sin(\frac{\pi}{2} - ang(r,n)) = \cos(ang(r,n))$

Por (Pad2.1),

se r é uma reta transversal ao plano π, então

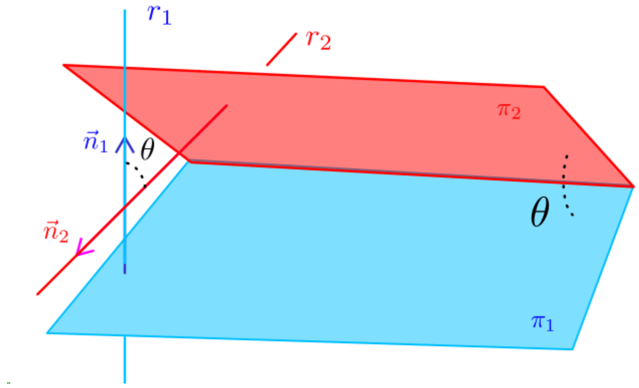
$$\sin(ang(r,\pi)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{r}\|\|\vec{n}\|}, \qquad \text{(Pad2.2)}$$

onde $\vec{n}$ é um vetor normal a π.

Pad2.3 Medida angular entre planos

Sejam π_1 e π_2 dois planos transversais em E^3.

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre** π_1 **e** π_2 é a medida angular entre duas retas quaisquer r_1 e r_2 perpendiculares a π_1 e π_2, respectivamente.



Como calcular o ângulo entre dois planos?

- $\vec{n}_1$ um vetor normal ao plano π_1
- $\vec{n}_2$ um vetor normal ao plano π_2
- $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ são vetores diretores de r_1 e r_2
- $\cos(ang(\pi_1, \pi_2)) = \cos(ang(r_1, r_2))$

Por (Pad2.1),

se π_1 e π_2 são planos transversais, então

$$\cos(ang(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}, \tag{Pad2.3}$$

onde $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2, respectivamente.

Exemplo Pad2.3. Ver Exercícios 56 e 57 em Slide de Exercícios.

Pad3 Distância

Pad3.1 Entre dois pontos

A **distância entre dois pontos** $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$ e $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$ de E^3 é o número real

$$\mathbf{d(A, B)} = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Se Σ é um sistema de coordenadas ortogonal, $d(A, B)$ pode ser calculada por (ver Proposição R1.3):

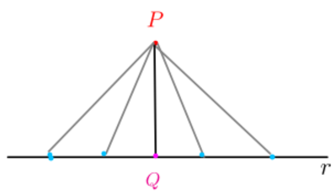
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{Pad3.1}$$

Exemplo Pad3.1. Ver Exercício 58 em Slide de Exercícios.

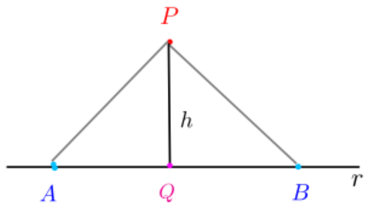
Pad3.2 Entre um ponto e uma reta

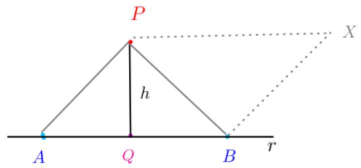
Sejam P um ponto e r uma reta em E^3 tais que P não pertença a r.

Definição Pad3.2. A **distância entre o ponto P e a reta r**, denotada por $d(P, r)$, é a menor das distâncias entre P e os pontos de r: é a distância de P ao ponto Q da projeção ortogonal de P a r.



Como calcular $d(P, Q)$?





- A e B pontos distintos de r
- Q a projeção ortogonal de P a r $\big(Q = r \cap s$, s única reta perpendicular a r passando por $P\big)$
- $h = d(P, Q) =?$
- área do triângulo ABP é:

$$\frac{1}{2}h\|\overrightarrow{AB}\|$$

- área do paralelogramo $ABPX$ é $\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|$

$$area(\Delta ABP) = \frac{1}{2}area(paralelogramo\_ABXP)$$

Como $r := \overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor de r, temos

se P é um ponto não pertencente a uma reta r em E^3, então

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}, \tag{Pad3.2}$$

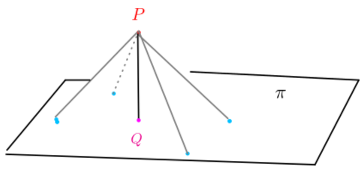
onde $\vec{r}$ é um vetor diretor de r e A um ponto de r quaisquer.

Exemplo Pad3.3. Ver Exercício 59 em Slide de Exercícios.

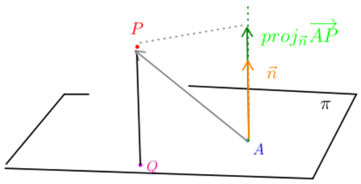
Pad3.3 Entre um ponto e um plano

Sejam P um ponto e π um plano em E^3 tais que P não pertença a π.

Definição Pad3.4. A **distância entre o ponto P e o plano π**, denotada por $d(P, \pi)$, é a menor das distâncias entre P e os pontos de π: é a distância de P ao ponto Q da projeção ortogonal de P a π.



COMO CALCULAR $d(P, Q)$?



- A ponto qualquer de π
- Q a projeção ortogonal de P a π
- $d(P, \pi) = d(P, Q) = \|proj_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\,\|$

Pela Proposição P2.8,

se P é um ponto não pertencente a um plano π em E^3, então

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{n}\,\|}, \tag{Pad3.3}$$

onde $\vec{n}$ é um vetor normal a π e A um ponto de π quaisquer.

Em particular:

Se $\pi\colon ax + by + cz + d = 0$, $P = (x_0, y_0, z_0)$ e $A = (x_1, y_1, z_1)$, então

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo Pad3.5. Ver Exercício 60 em Slide de Exercícios.

Pad3.4 Entre retas

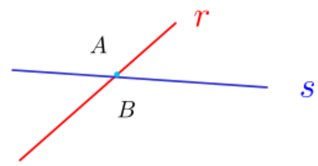
Sejam r e s duas retas em E^3.

Definição Pad3.6. A **distância entre a reta r e a reta s**, denotada por $d(r,s)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de r e os pontos B de s.

- **Caso 1:**

Se r e s são concorrentes ou paralelas idênticas, então

$$d(r,s) = 0.$$

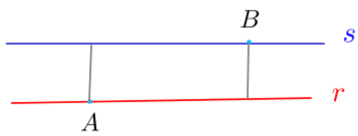


- **Caso 2:**

Se r e s são paralelas distintas, então

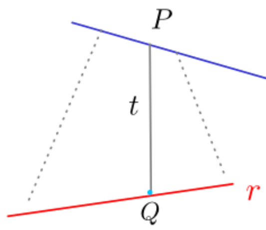
$$d(r,s) = d(A,s) = d(B,r) \overset{Eq.Pad3.2}{=} \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|},$$

onde $A \in r$ e $B \in s$.

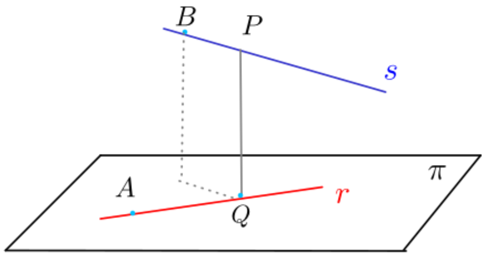


- **Caso 3:**

Se r e s são reversas, então $\mathbf{d(r,s)}$ é a distância $d(P,Q)$, onde P e Q são os pontos de intersecção de r e s, respectivamente, com uma reta t perpendicular a r e s.

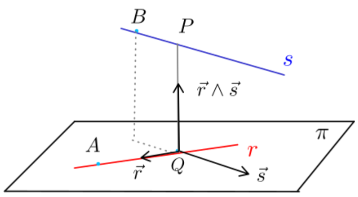


SE r E s SÃO REVERSAS, COMO CALCULAR $d(r, s) = d(P, Q)$?



- π plano que contém r e é paralelo a s
- B um ponto qualquer de s
- $d(P, Q) = d(B, \pi)$

  PRECISAMOS DE UM PONTO EM π E UM VETOR NORMAL A π
- A um ponto qualquer de r ($\therefore A \in \pi$)
- $\vec{r}$ vetor diretor de r
- $\vec{s}$ vetor diretor de s
- $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI (c.c., as retas seriam paralelas)
- $\vec{r} \wedge \vec{s}$ é vetor normal a π



Pela Equação Pad3.3,

se r e s são retas reversas, então

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}, \tag{Pad3.4}$$

onde $\vec{r}, \vec{s}$ são vetores diretores, A, B são pontos quaisquer de r e s, resp..

Exemplo Pad3.7. Ver Exercício 61 em Slide de Exercícios.

Pad3.5 Entre reta e plano

Sejam r uma reta e π um plano em E^3.

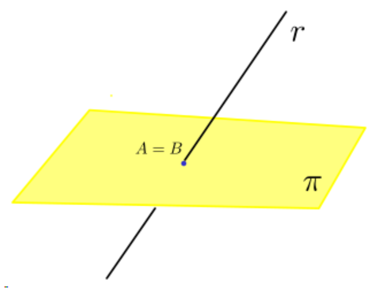
Definição Pad3.8. A **distância entre a reta r e o plano π**, denotada por $d(r,\pi)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de r e os pontos B de π.

Como calcular $d(r,\pi)$?

- $\vec{r}$ vetor diretor de r e $\vec{n}$ vetor normal a π:
- **Caso 1:**

  Se r é transversal a π ($\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$), então

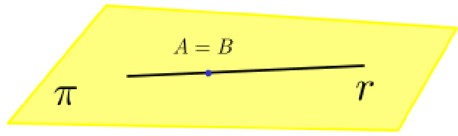
  $$d(r,\pi) = 0.$$



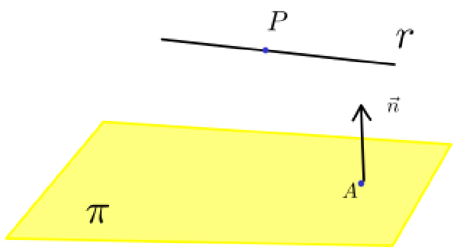
- **Caso 2:**

Se r está contida em π ($\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$), então

$$d(r, \pi) = 0.$$



- **Caso 3:**
  Se r é paralela a π e $r \not\subseteq \pi$ ($\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$), então $d(r, \pi) = d(P, \pi)$, onde $P \in r$.



Pela Equação (Pad3.3),

se r é paralela a π e $r \not\subseteq \pi$, então

$$d(r, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{n}\,\|}, \tag{Pad3.5}$$

onde A é um ponto de π, $\vec{n}$ é vetor normal a π e P é um ponto de r .

Pad3.6 Entre planos

Sejam π_1 e π_2 planos em E^3.

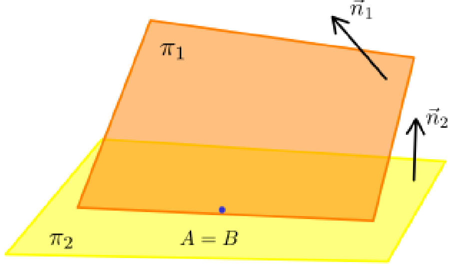
Definição Pad3.9. A **distância entre os planos π_1 e π_2**, denotada por $d(\pi_1, \pi_2)$, é a menor das distâncias entre os pontos A de π_1 e os pontos B de π_2.

Como calcular $d(\pi_1, \pi_2)$?

- $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ vetores normais a π_1 e π_2:
- **Caso 1:**

Se π_1 e π_2 são transversais ($\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ LI), então

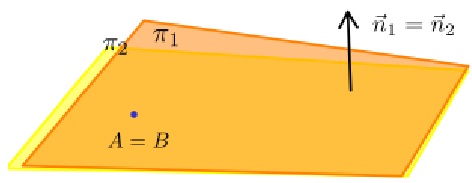
$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$



- **Caso 2:**

Se π_1 e π_2 são idênticos ($\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ LD), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$

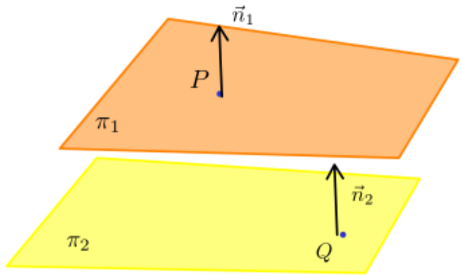


- **Caso 3:**
  Se π_1 e π_2 são paralelos distintos ($\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ LD), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = d(Q, \pi_1),$$

  para quaisquer $P \in \pi_1$ ou $Q \in \pi_2$.
  Pela Equação (Pad3.3),

> se π_1 e π_2 são paralelos distintos, então
>
> $$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}\,|}{\|\vec{n}\,\|}, \tag{Pad3.6}$$
>
> onde $\vec{n}$ é um vetor normal a π_1 (ou π_2), P é um ponto de π_1 e Q um ponto de π_2 quaisquer.



Em particular (Tarefa!):

Se $P = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de π_1 e

$$\pi_1 \colon ax + by + cz + d_1 = 0, \qquad \pi_2 \colon ax + by + cz + d_2 = 0,$$

então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemplo Pad3.10. Ver Exercícios 62 a 65 em Slide de Exercícios.

$\boxed{\text{Aula 19}}$: Revisão da P1

Mudança de coordenadas: translações e rotações

Objetivo

Aula 20

Tratar sobre a mudança de sistema de coordenadas:

- estudar como mudar as coordenadas de um ponto em um sistema de coordenadas para coordenadas em um outro sistema de coordenadas;

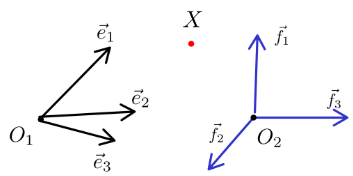
- estabelecer relações entre as coordenadas de um ponto dado num sistema com as coordenadas do outro sistema.

Estudar os casos particulares de translação e rotação:
serão utilizados no estudo de cônicas.

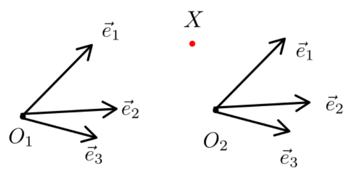
M1 Mudança de Sistema de Coordenadas

Um sistema de coordenadas em E^3 depende de uma origem O e de uma base E. Portanto uma mudança no sistema pode envolver:

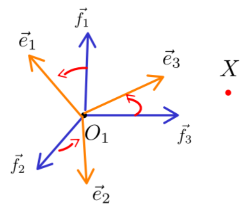
- mudar a origem O e a base E
- mudar a origem O e manter a mesma base E (translações)
- manter a origem O e mudar a base E (rotações)



Sistemas de coordenadas com:
Origens e Bases distintas



Sistemas de coordenadas com:
Origens distintas e mesma Base
(translação)

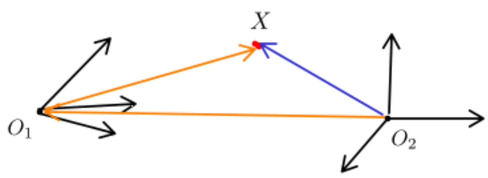


Sistemas de coordenadas com:
Bases distintas e mesma Origem
(rotação)

M1.1 Origem e Base distintas

- $\Sigma_1 = (O_1, E)$ um sistema de coordenadas em E^3
- $\Sigma_2 = (O_2, F)$ um novo sistema de coordenadas em E^3
- $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1} \overset{Def. R1.1}{\Longleftrightarrow} \overrightarrow{O_1O_2} = (h, k, l)_E$
- $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} \Longleftrightarrow \overrightarrow{O_1X} = (x, y, z)_E$
- $X = (u, v, w)_{\Sigma_2} \Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{O_2X} = (u, v, w)_F}$

QUAL A RELAÇÃO ENTRE x, y, z COM u, v, w?



- $\overrightarrow{O_2X} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1X}$:

$$\boxed{\overrightarrow{O_2X} = (x - h, y - k, z - l)_E}$$

- Pela fórmula de mudança de base, Eq. (B1.3),

$$(\overrightarrow{O_2X})_E = M_{EF}(\overrightarrow{O_2X})_F \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix} = M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Portanto, a relação entre as coordenadas antigas $(x, y, z)_{\Sigma_1}$ e novas $(u, v, w)_{\Sigma_2}$ de X é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} + M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

onde $\Sigma_1 = (O_1, E)$, $\Sigma_2 = (O_2, F)$ e $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

- M_{EF} a matriz de mudança da base E para a base F (ver Eq. (B1.2)):

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

  onde as colunas contém as coordenadas dos elementos de F na base E.

As **equações de mudança de coordenadas de Σ_1 para Σ_2** são:

$$\begin{cases} x = h + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w \\ y = k + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w \\ z = l + \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w, \end{cases}$$

onde $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} = (u, v, w)_{\Sigma_2}$, $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

Nota. Temos que

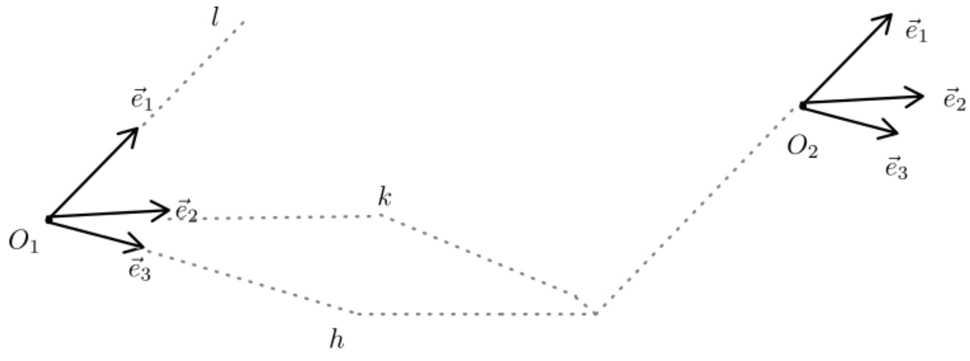
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = M_{EF}^{-1} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix} \overset{Corol. B1.11}{=} M_{FE} \begin{pmatrix} x-h \\ y-k \\ z-l \end{pmatrix}, \tag{M1.1}$$

o que nos fornece as equações de mudança de coordenadas de Σ_2 para Σ_1.

Exemplo M1.1. Ver Exercício 66 em Slide de Exercícios.

M1.2 Origens distintas: Translação

Se as origens O_1, O_2 são distintas e a base dos sistemas de coordenadas $\Sigma_1 = (O_1, E)$ e $\Sigma_2 = (O_2, E)$ são iguais, dizemos que Σ_2 é obtido pela **translação de Σ_1 para o ponto O_2**



Neste caso (veja Exercício 17),

$$M_{EE} = Id$$

e portanto, as

equações de mudança de coordenadas de $\Sigma_1 = (O_1, E)$ para $\Sigma_2 = (O_2, E)$ (por **translação**) são:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \\ z = l + w, \end{cases} \tag{M1.2}$$

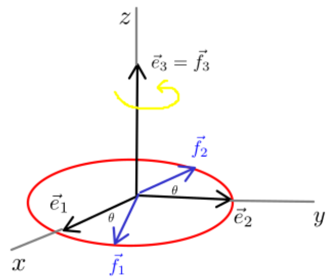
onde $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} = (u, v, w)_{\Sigma_2}$, $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$.

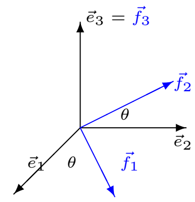
M1.3 Bases disitintas: Rotação

Aula 21

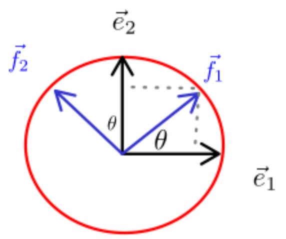
Se a origem dos sistemas de coordenadas $\Sigma_1 = (O, E)$ e $\Sigma_2 = (O, F)$ são iguais, dizemos que Σ_2 é obtido pela **rotação de Σ_1**.

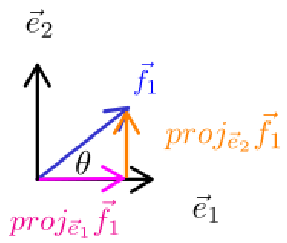
Caso Particular: a base F é obtida "girando" a base E em torno de Oz no sentido anti-horário por um ângulo θ:





- $\Sigma_1 = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ sistema **ortogonal**
- $\Sigma_2 = (O, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ sistema **ortogonal**
- $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$
- $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ são obtidos "girando" $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ em torno de Oz no sentido anti-horário por um ângulo θ:

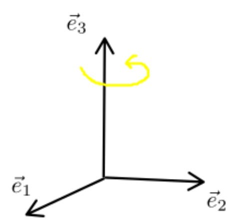




Logo,

$$\vec{f}_1 = \cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2; \qquad \vec{f}_2 = -\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2$$

- $M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sentido anti-horário

-

as **equações da rotação de Σ_1 em torno de Oz, de θ radianos, em sentido anti-horário** são:

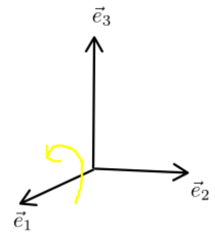
$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \\ z = w, \end{cases} \tag{M1.3}$$

onde $X = (x, y, z)_{\Sigma_1}$ e $X = (u, v, w)_{\Sigma_2}$.

Exemplo M1.2. Ver Exercício 67 em Slide de Exercícios (tarefa!).

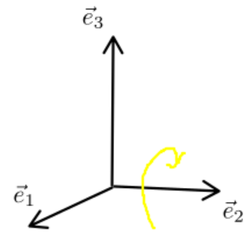
Nota. (Verifique!)

1. Mantendo $\vec{e}_1$ fixo: $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



$\vec{e}_2, \vec{e}_3$ sentido anti-horário

2. Mantendo $\vec{e}_2$ fixo: $M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$



$\vec{e}_1, \vec{e}_3$ sentido horário

3. No plano:

as equações de mudança de coordenadas por translação de Σ_1 para o ponto O_2 são:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v, \end{cases}$$

onde $X = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$, $O_2 = (h, k)_{\Sigma_1}$;

as equações de mudança de coordenadas por rotação de Σ_1 de θ radianos em sentido anti-horário são:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

onde $X = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$.

Até o momento estudamos:

• sistemas de coordenadas de pontos no espaço E^3

• lugares geométricos de pontos no espaço E^3: *retas, planos*

• as equações que determinam tais lugares geométricos satisfazem equações de primeiro grau:
equações da reta na forma planar, equação geral do plano.

Próximo passo:

• estudar lugares geométricos de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação de segundo grau:

- *cônicas*: no plano
- *quádricas*: no espaço.

Elipse, hipérbole e parábola

Objetivo

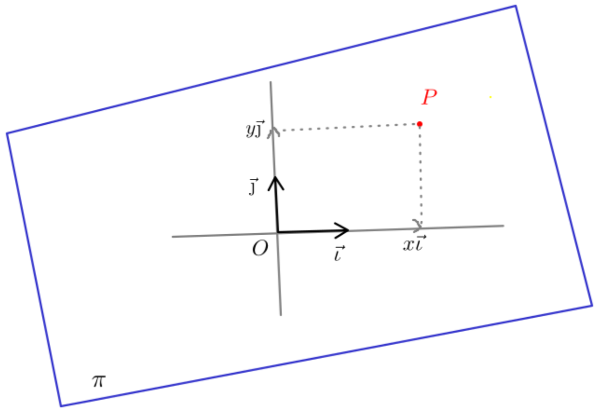
Estudar os lugares geométricos de E^2 chamados: elipse, hipérbole e parábola:

- deduzir suas equações;

- estudar suas propriedades geométricas.

Aula 21

Ehp1 Ambiente



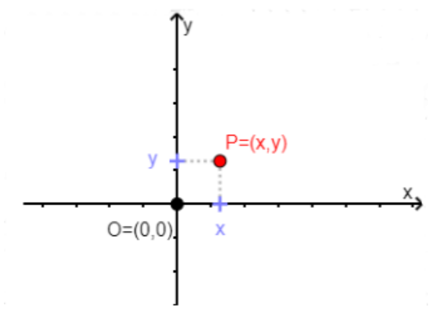
- π um plano em E^3
- $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ dois vetores diretores de π tais que

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1, \qquad \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$$

- O um ponto de π
- $P \in E^3$, $P \in \pi \iff \exists x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
- $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: base ortonormal[31] de π
- $\Sigma = (O, B)$: sistema de coordenadas ortogonal em π (origem O e base B)
- as coordenadas de $P \in \pi$ são as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ na base B:

$$P = (x, y)_\Sigma = (x, y)$$

Este ambiente é usualmente identificado com o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:



As coordenadas de P são chamadas de *coordenadas cartesianas*

Os eixos coordenados Ox e Oy são chamados de *eixo-x* e *eixo-y*.

[31] A base não precisa ser ortonormal, mas lembre que esta escolha permite calcular produto escalar, norma de vetores, distância entre pontos de maneira fácil.

Nota.

- $\Sigma_1 = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}))$ é um sistema de coordenadas ortogonal[32] em E^3 com base positiva
- Uma equação geral[33] do plano π em relação ao sistema de coordenadas Σ_1 é

$$z = 0,$$

  e os pontos de π têm coordenadas da forma $(x, y, 0)$.

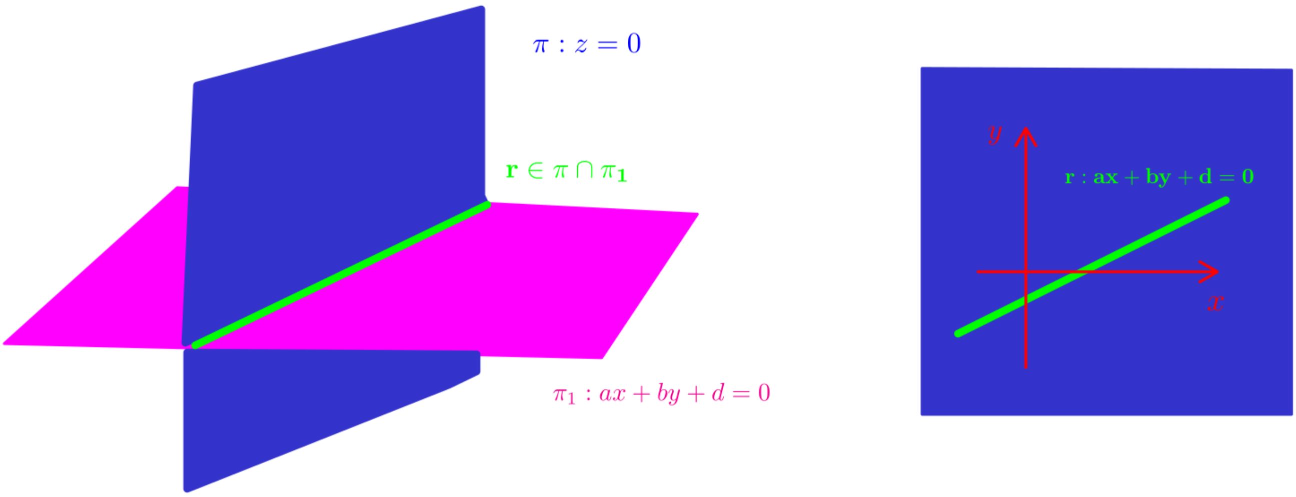
- Uma **equação geral de uma reta r no plano π** é da forma:[34]

$$r : ax + by + d = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0) \tag{Ehp1.1}$$

onde o vetor $\vec{n} = (a, b)$ é ortogonal a r e

$$\vec{r} = (-b, a) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (b, -a)$$

são vetores diretores de r.



Vamos supor fixado um plano π em E^3 com um sistema de coordenadas ortogonal (s.c.o.) $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$.

[32]Lembre-se da Definição OPv2.1 de produto vetorial e que $\|\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}\| = \|\vec{\imath}\| \|\vec{\jmath}\| \sin\theta$
[33]Ver Exercício 42
[34]Veja Seção R4.3.1

Ehp2 Elipse

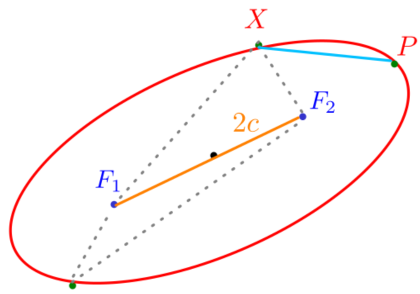
Definição Ehp2.1. Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de π e $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > c > 0$, onde

$$2c = d(F_1, F_2).$$

Uma **elipse** é o lugar geométrico dos pontos X de π tais que

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a. \tag{Ehp2.1}$$

- **focos da elipse**: F_1 e F_2;
- **segmento focal**: $\overline{F_1F_2}$;
- **distância focal**: $2c = d(F_1, F_2)$;
- **reta focal**: reta F_1F_2;
- **centro** da elipse: ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- **corda** da elipse: $\overline{XP}$, para quaisquer X, P na elipse.



Construção de uma elipse:

Autoria Atractor: Método do jardineiro
"o comprimento da corda é $2a$, a qual deve ser maior que a distância entre os pinos"

Autor Paulo Tomson; Autora Luciana Brito: Geogebra.

Nota.
• dois pontos F_1, F_2 e um número real $2a > d(F_1, F_2)$ determinam uma elipse

• dada uma elipse E, existem um único par de pontos F_1, F_2 e um único número real $2a > d(F_1, F_2)$ tais que os pontos de E satisfazem (Ehp2.1): $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a.$.

Portanto, a cada elipse estão associados um único número real a e um único segmento focal.

• Quando $F_1 = F_2$, temos $c = 0$ e para todo $a > 0$ o lugar geométrico dos pontos X de π tais que $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a \iff d(X, F_1) = a$, isto é, dos pontos que são equidistantes de F_1, é a **circunferência de centro F_1 e raio a**.

Exemplo Ehp2.2. Ver Exercícios 68 e 69 em Slide de Exercícios.

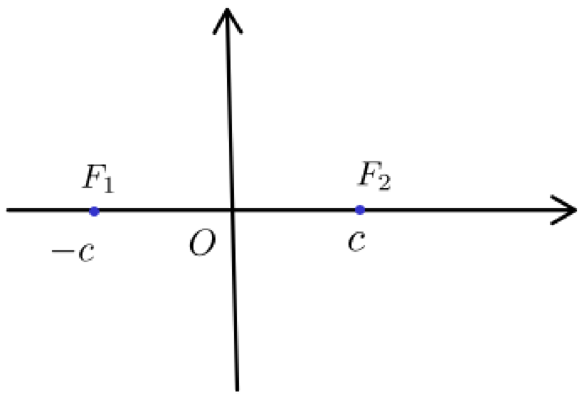
Ehp2.1 Equação da elipse

Ehp2.1.1 Com focos no eixo Ox

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que:

$$F_1 = (-c, 0), \qquad F_2 = (c, 0)$$

- $d(F_1, F_2) = 2c$
- $a > c > 0$



$$
\begin{aligned}
\boxed{X=(x,y)\in \text{Elipse}} &\iff d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a\\
&\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&\implies \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
&\iff \vdots\\
&\implies \boxed{\exists b>0;\ \tfrac{x^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}=1,\ \text{onde } a>b>0 \text{ e } a^2=b^2+c^2}
\end{aligned}
$$

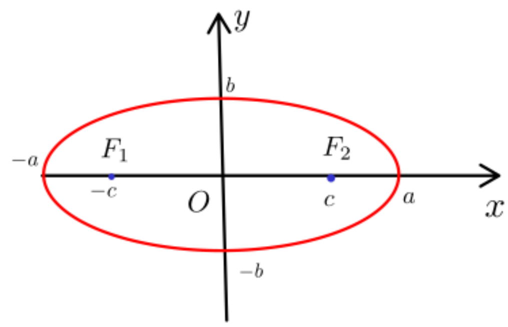
Por outro lado,

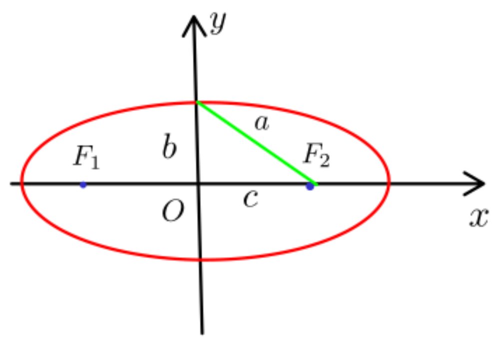
$$X=(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{onde } a>b>0 \text{ e } a^2=b^2+c^2 \implies X\in \text{Elipse}$$

A **equação reduzida da elipse** de centro O e focos no eixo Ox é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{(Ehp2.2)}$$

onde $a>b>0$, $a^2=b^2+c^2$ e $2a>2c=d(F_1,F_2)>0$.



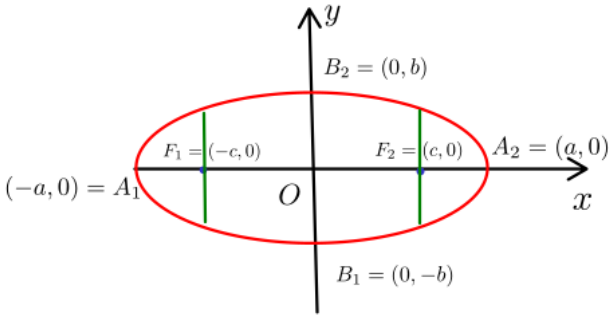


Proposição Ehp2.3. *Um ponto $X = (x, y)$ é um ponto da elipse de equação reduzida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se as distâncias de X aos focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ são

$$d(X, F_1) = a + \frac{c}{a}x, \qquad d(X, F_2) = a - \frac{c}{a}x.$$

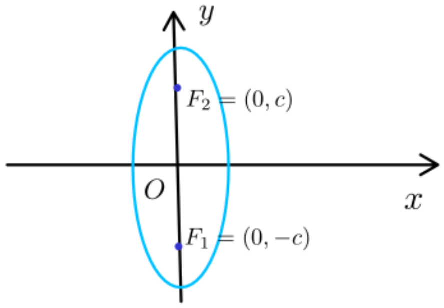


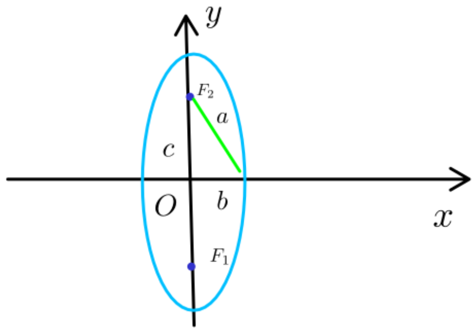
- $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$: **vértices da elipse**,
- corda $\overline{A_1A_2}$: **eixo maior** da elipse,
- corda $\overline{B_1B_2}$: **eixo menor** da elipse,
- **amplitude focal** é o comprimento de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal.

Ehp2.1.2 Com focos no eixo Oy

Aula 22

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema ortogonal tal que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$;





- $a > c > 0$

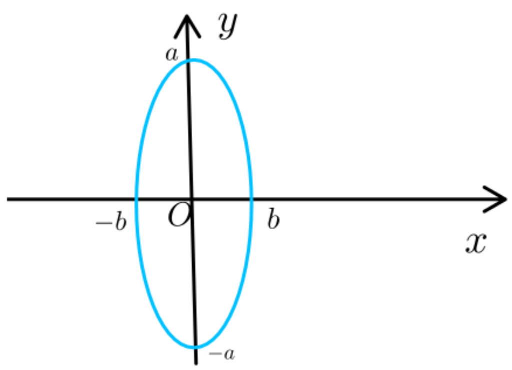
$$X = (x, y) \in \text{Elipse} \quad \Longleftrightarrow \quad d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

$$\overset{\textit{verifique!}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } a^2 = b^2 + c^2$$

A **equação reduzida da elipse** de centro O e focos no eixo Oy é dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{Ehp2.3}$$

onde $a > b > 0$, $a^2 = b^2 + c^2$ e $2a > 2c = d(F_1, F_2) > 0$.



Ehp2.2 Algumas propriedades de uma elipse

Proposição Ehp2.4. *A elipse é uma curva simétrica em relação à reta (focal) que passa F_1 e F_2 e em relação à reta mediatriz do segmento (focal) F_1F_2.*

Observação. Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que o desenho da elipse é como o apresentado: sem "bicos", côncavo para baixo "na parte de cima" e côncavo para cima "na parte de baixo"! O método algébrico que funcionou para retas e planos não é eficiente para curvas e superfícies.

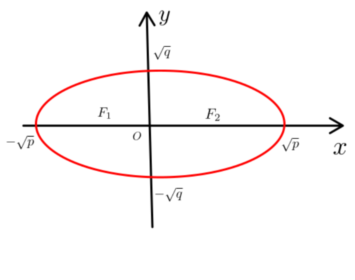
Proposição Ehp2.5. *Uma equação da forma*

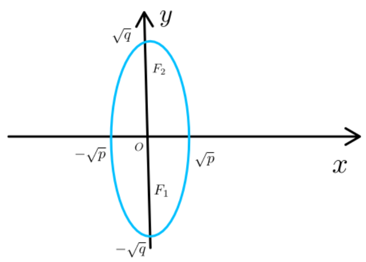
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \qquad \text{(Ehp2.4)}$$

descreve uma elipse em relação a um s.c.o. $\Sigma = (O, B)$ se, e somente se, p **e** q **são números reais distintos e positivos.**

Corolário. *Sejam p e q números reais distintos e positivos.*
A Equação (Ehp2.5) representa:

1. *uma elipse com centro O e focos em Ox quando $p > q$;* *(neste caso $a = \sqrt{p}$ e $b = \sqrt{q}$)*
2. *uma elipse com centro O e focos em Oy quando $p < q$.* *(neste caso $a = \sqrt{q}$ e $b = \sqrt{p}$)*





Propriedade óptica da elipse (Geogebra): (num espelho elíptico) os raios de luz que passam por um foco são refletidos no outro foco.
Uma aplicação em óptica com elipses (vídeo)

Exemplo Ehp2.6. Ver Exercício 70 em Slide de Exercícios.

Ehp3 Hipérbole

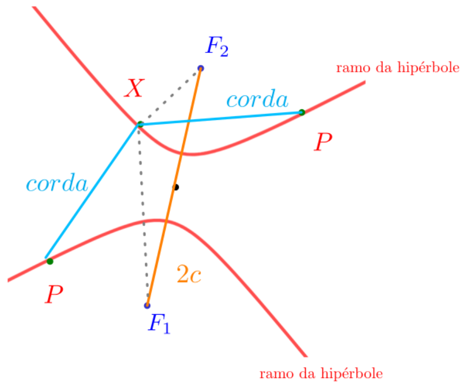
Definição Ehp3.1. Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos de π e $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < c$, onde

$$2c = d(F_1, F_2).$$

Uma **hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos X de π tais que

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a. \tag{Ehp3.1}$$

- **focos da hipérbole**: F_1 e F_2;
- **segmento focal**: $\overline{F_1F_2}$;
- **distância focal**: $2c = d(F_1, F_2)$;
- **reta focal**: reta F_1F_2;
- **centro** da hipérbole: ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;
- **corda** da hipérbole: $\overline{XP}$, para quaisquer pontos $X \neq P$ na hipérbole.



Construção de uma hipérbole:

Autoria Atractor: Corda e régua
Matemática para gente grande: Geogebra

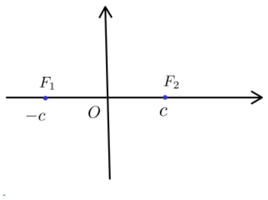
A cada hipérbole estão associados um único número real a e um único segmento focal.

Exemplo Ehp3.2. Ver Exercícios 71 e 72 em Slide de Exercícios (tarefa!).

Ehp3.1 Equação da hipérbole

Ehp3.1.1 Com focos no eixo Ox

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ s. c. ortogonal tal que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$



$$d(F_1, F_2) = 2c$$

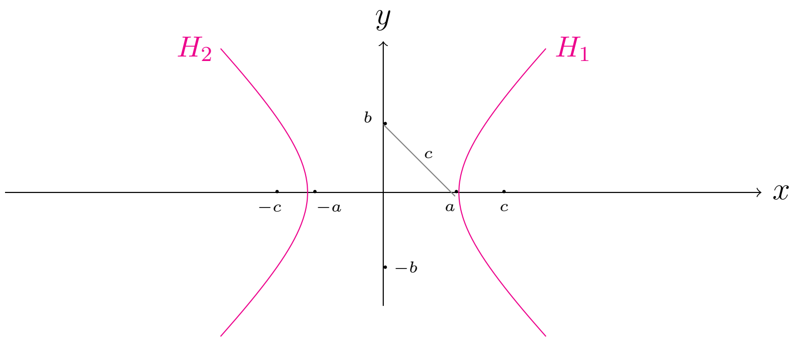
- $0 < a < c$

$$\begin{aligned} X = (x, y) \in \text{Hipérbole} &\iff d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a \\ &\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

A **equação reduzida da hipérbole** de centro O e focos no eixo Ox é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{Ehp3.2}$$

onde $c > b > 0$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $2c = d(F_1, F_2) > 2a > 0$.



- $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$: **vértices da hipérbole**.
- H_1 e H_2: **ramos da hipérbole**

Ehp3.1.2 Com focos no eixo Oy

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema ortogonal tal que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$;
- $0 < a < c$

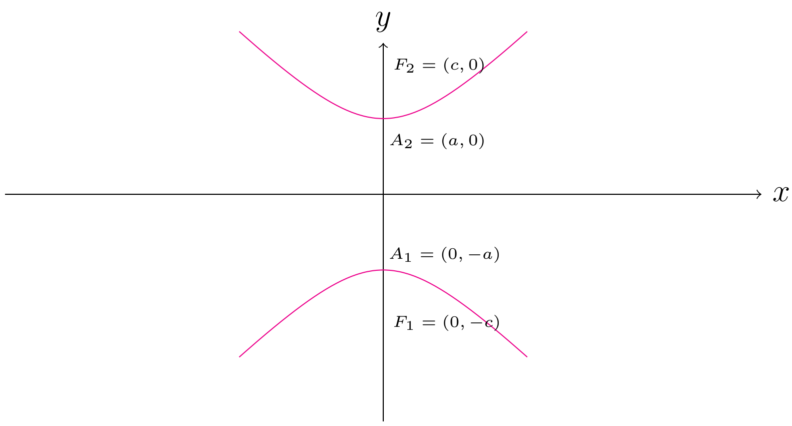
$$X = (x, y) \in \text{Hipérbole} \iff d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a$$

$$\overset{\textit{verifique!}}{\iff} \quad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ onde } c > b > 0 \text{ e } c^2 = a^2 + b^2$$

A **equação reduzida da hipérbole** de centro O e focos no eixo Oy é dada por

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{Ehp3.3}$$

onde $c > b > 0$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $2c = d(F_1, F_2) > 2a > 0$.



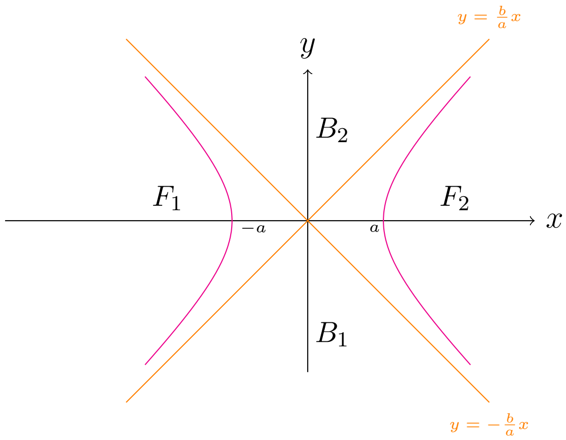
Ehp3.2 Algumas propriedades de uma hipérbole

Proposição Ehp3.3. *A hipérbole é uma curva simétrica em relação à reta focal F_1F_2 e em relação à reta mediatriz*[35] *do segmento focal F_1F_2.*

Observação. Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que o desenho da hipérbole com focos no eixo Ox é como o apresentado: a hipérbole é a união dos gráficos das funções:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$

Estudando o domínio, crescimento, concavidade e assíntotas, obtemos:

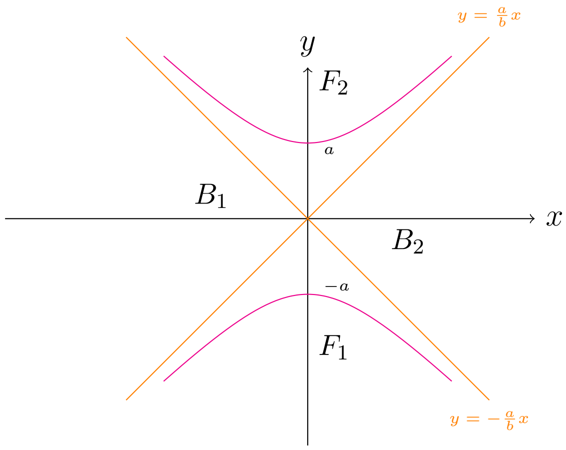


- As retas:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

são as **assíntotas** da hipérbole.

Analogamente, para a hipérbole com focos no eixo Oy: $\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1\right)$



- As retas:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

são as assíntotas da hipérbole.

[35] reta perpendicular ao segmento passando pelo seu ponto médio

Proposição Ehp3.4. *Uma equação da forma*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \tag{Ehp3.4}$$

descreve uma hipérbole em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ *se, e somente se,* $pq < 0$.

Corolário. *Sejam* p *e* q *são números reais tais que* $pq < 0$.

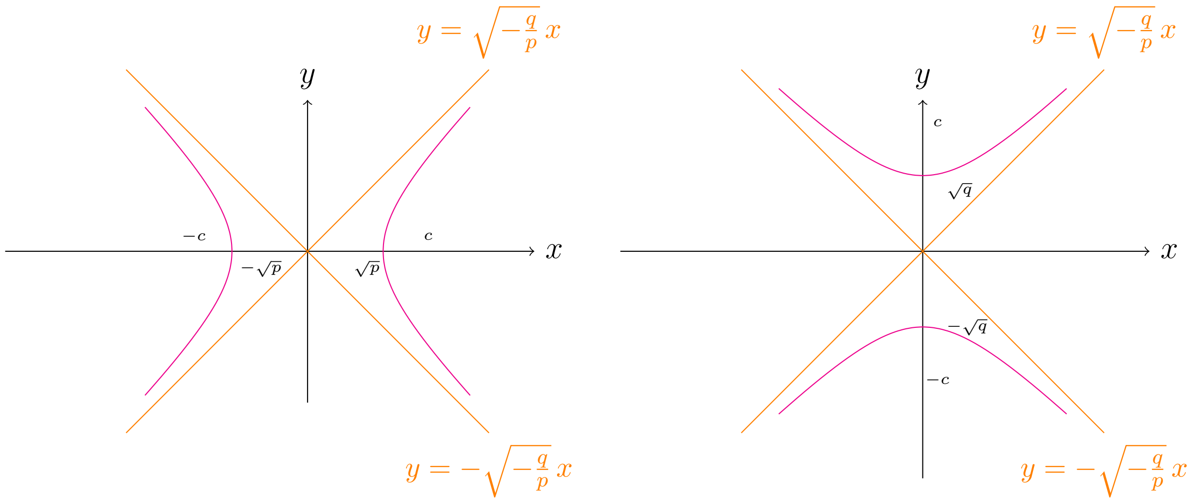
A Equação (Ehp3.4) *representa:*

1. *uma hipérbole com centro* O *e focos em* Ox *quando* $p > 0$ *e* $q < 0$;

   (neste caso $a = \sqrt{p}$ *e* $b = \sqrt{-q}$*)*

2. *uma hipérbole com centro* O *e focos em* Oy *quando* $p < 0$ *e* $q > 0$.

   (neste caso $a = \sqrt{q}$ *e* $b = \sqrt{-p}$*)*



Corolário. Em um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$, se $p > 0$ e $q > 0$, então as equações abaixo descrevem hipérboles.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1, \qquad \frac{y^2}{q} - \frac{x^2}{p} = 1$$

As equações das assíntotas (em ambos os casos) são $y = \pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,x$.

Exemplo Ehp3.5. Ver Exercício 73 em Slide de Exercícios.

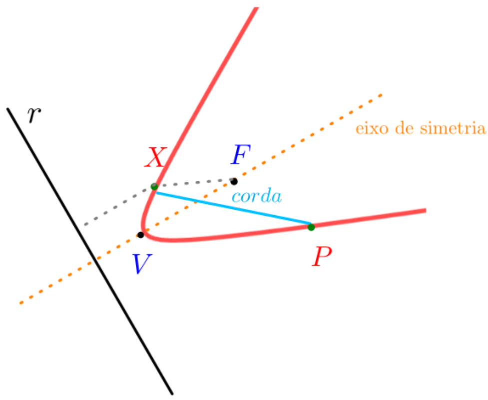
Ehp4 Parábola

Definição Ehp4.1. Sejam r uma reta de π e F um ponto de π, $F \notin r$.

Uma **parábola** é o lugar geométrico dos pontos X de π que são equidistantes de F e de r, i.e.,

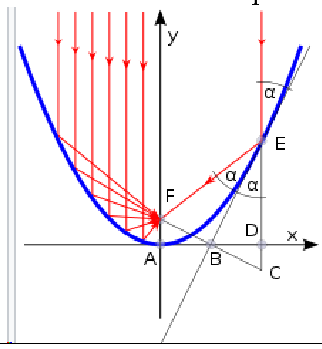
$$d(X, F) = d(X, r). \qquad \text{(Ehp4.1)}$$

- **foco da parábola**: F;
- **diretriz**: reta r;
- **parâmetro** p: $p > 0$; $2p = d(F, r) > 0$;
- **eixo** (**de simetria**) da parábola: reta s que contém F perpendicular a r;
- **vértice da parábola** V: ponto médio de $\overline{FH}$, onde $H = r \cap s$;
- **corda** da parábola: $\overline{XP}$, para quaisquer pontos $X \neq P$ na parábola.



Construção de uma parábola:

Autoria Atractor: Corda e esquadro
Propriedade refletora: Wikipedia:
"raios paralelos ao eixo de simetria é direcionado para o seu foco"



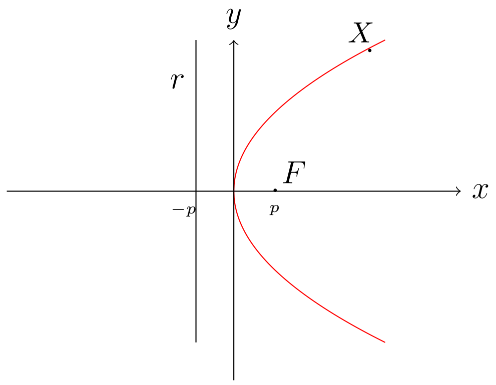
A cada parábola estão associados um único foco F e uma única diretriz r.

Ehp4.1 Equação da parábola

Ehp4.1.1 Com foco no semi-eixo positivo de Ox

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que a **origem** O **coincide com o vértice** da parábola e o **foco** F **pertence ao semi-eixo positivo** de Ox

- $2p = d(F, r)$

- 

$F = (p, 0), \quad r : x = -p$

$$X = (x, y) \in \text{Parábola} \iff d(X, F) = d(X, r)$$

$$\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$$

A **equação reduzida da parábola** de vértice O e foco no semi-eixo positivo Ox é dada por

$$y^2 = 4px, \tag{Ehp4.2}$$

onde $2p = d(F, r) > 0$.

Ehp4.1.2 Com foco no semi-eixo positivo de Oy

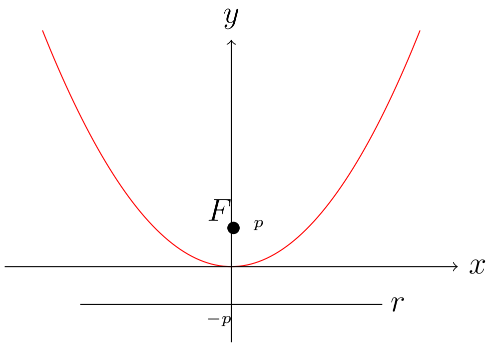
- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que a **origem** O **coincide com o vértice** da parábola e o **foco** F **pertence ao semi-eixo positivo** de Oy

$$\begin{aligned} X = (x, y) \in \text{Parábola} &\iff d(X, F) = d(X, r) \\ &\iff \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p| \end{aligned}$$

A **equação reduzida da parábola** de vértice O e foco no semi-eixo positivo de Oy é dada por

$$x^2 = 4py, \tag{Ehp4.3}$$

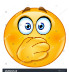
onde $2p = d(F, r) > 0$.



Ehp4.2 Algumas propriedades de uma parábola

Proposição Ehp4.2. *A parábola*[36] *é uma curva simétrica em relação ao seu eixo de simetria.*

Proposição Ehp4.3. *As equações da forma*

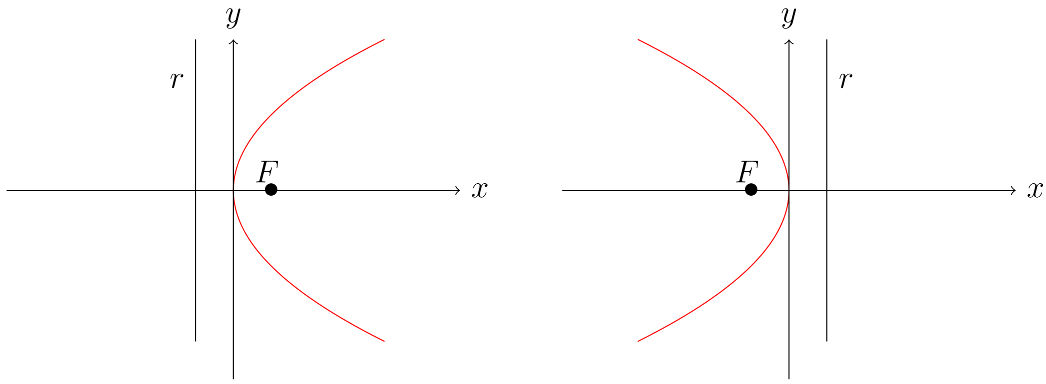
[36]Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que os desenhos das parábolas são de fato como os apresentados. 

$$y^2 = qx, \tag{Ehp4.4}$$
$$x^2 = qy \tag{Ehp4.5}$$

descrevem parábolas em relação a um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ *se, e somente se,* $q \neq 0$.

Corolário. *A Equação* (Ehp4.4)*:* $y^2 = qx$*, representa:*

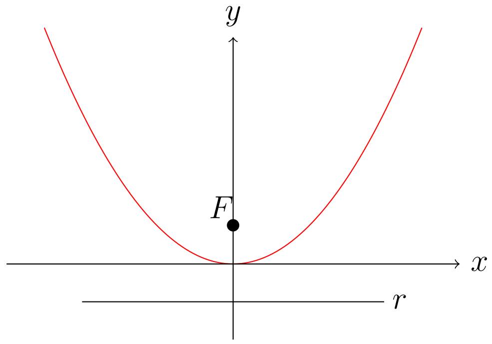
1. *uma parábola com vértice* O *e foco em* Ox *positivo quando* $q > 0$*;*
2. *uma parábola com vértice* O *e foco em* Ox *negativo quando* $q < 0$*;*



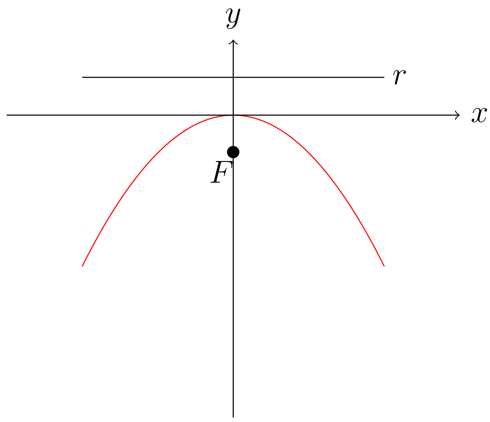
$q > 0$: $4p = q, d(F, r) = \frac{q}{2}$, $r : x = -\frac{q}{4}$ $q < 0$: $4p = -q, d(F, r) = -\frac{q}{2}$, $r : x = -\frac{q}{4}$

Corolário. *A Equação* (Ehp4.5)*:* $x^2 = qy$*, representa:*

1. *uma parábola com vértice* O *e foco em* Oy *positivo quando* $q > 0$*;*
2. *uma parábola com vértice* O *e foco em* Oy *negativo quando* $q < 0$*;*



$q > 0$: $4p = q, d(F, r) = \frac{q}{2}$, $r : y = -\frac{q}{4}$



$q < 0$: $4p = -q, d(F, r) = -\frac{q}{2}$, $r : y = -\frac{q}{4}$

Exemplo Ehp4.4. Ver Exercício 74 em Slide de Exercícios.

Ehp5 Seções Cônicas

As elipse, hipérbole e parábola podem ser definidas como interseções de um cone com um plano.

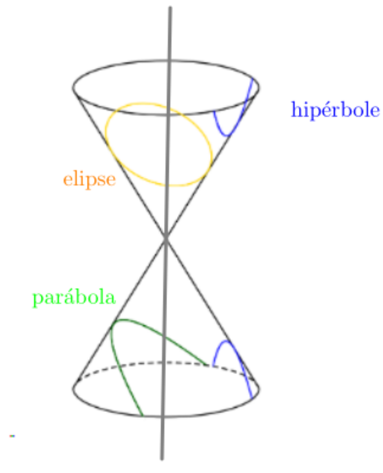


Figura 8: Fonte: Matika

Se C é a superfície cônica de duas folhas (rotação de um reta - geratriz - em torno de um eixo) e V seu vértice:

- **elipse**: intersecção de C com um plano que não contém V, intercepta apenas uma das folhas de C e não é perpendicular ao eixo;
- **hipérbole**: intersecção de C com um plano que não contém V e intercepta as duas das folhas de C;
- **parábola**: intersecção de C com um plano que é paralelo a geratriz;

Tais curvas são conhecidas como **seções cônicas**.

Animação 3D das seções cônicas

Tal abordagem é equivalente ao que foi feito até aqui (provado por Dandelin, 1822, veja P. Boulos, p. 346) e não trataremos desta nova abordagem neste curso.

Cônicas

Objetivo

Estudar o lugar geométrico chamado cônica:

- curvas planas descritas por uma equação de segundo grau em duas variáveis.
(fixado um sistema de coordenadas)

C1 Elipse, Hipérbole e Parábola

Aula 23

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ em um plano π, vimos que as equações reduzidas de elipses, hipérboles e parábolas (com foco(s) em um dos eixos coordenados) são dadas por formas particulares de equação de grau 2 em duas variáveis:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad p \neq q, p, q > 0$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad pq < 0$$

$$y = \frac{1}{q}x^2, \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{q}y^2, \quad q \neq 0$$

Trataremos agora do caso geral de uma equação de grau 2 em duas variáveis:

$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.}$$

C2 Cônicas: classificação

Definição C2.1. Uma **cônica** é o lugar geométrico dos pontos $X = (x, y)$ no plano π que satisfazem uma equação de segundo grau

$$g(x, y) = 0$$

onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- ax^2, bxy, cy^2: termos quadráticos

- bxy: termo quadrático misto
- dx, ey: termos lineares
- f: termo independente

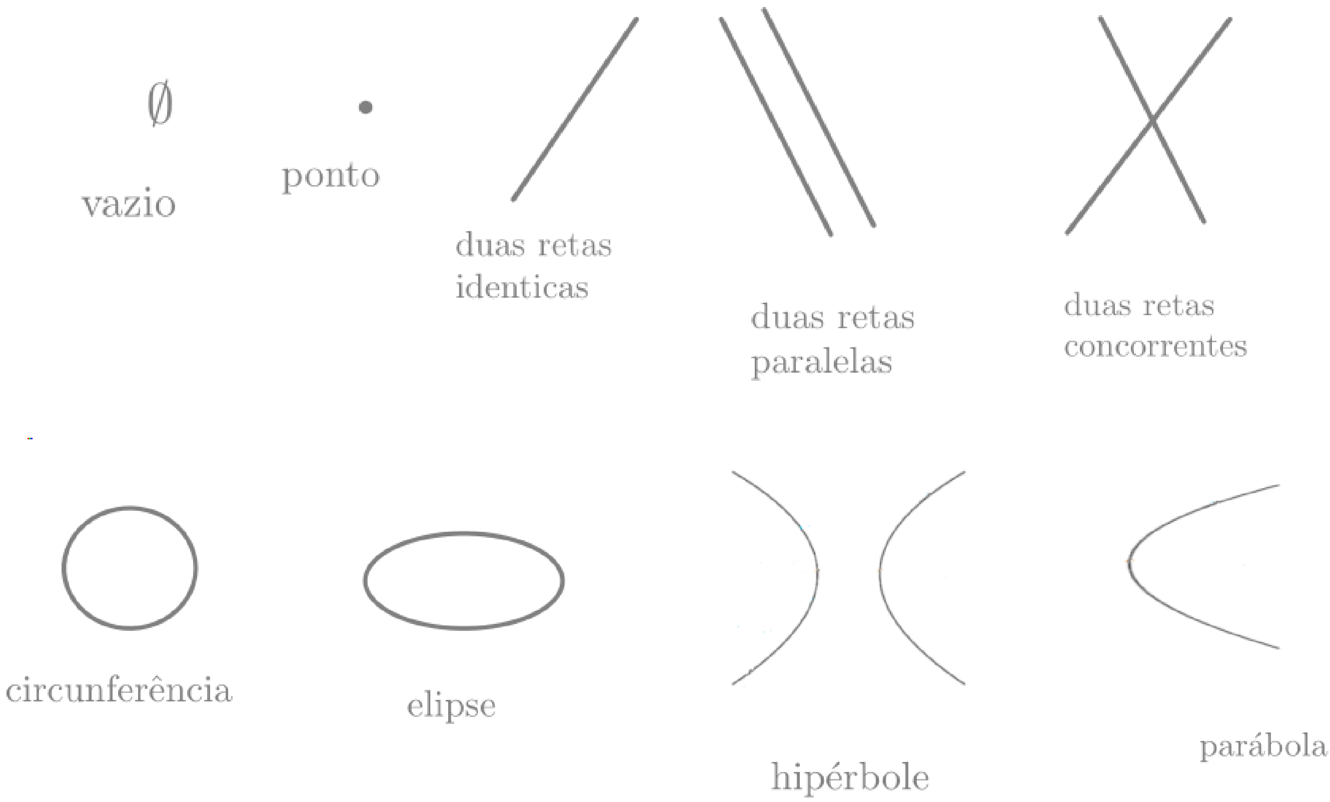
Exemplo C2.2. Fixe um s.c.o. $\Sigma = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.[37]

1. $x^2 + y^2 = -1$: ....
2. $x^2 + y^2 = 0$: ....
3. $x + 1 = 0$: ....
4. $x^2 + 2xy + y^2 = 0$: ....
5. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$: ....
6. $x^2 - y^2 = 0$: ....
7. $x^2 + y^2 = 1$: ....
8. $x^2 + 2y^2 = 1$: ....
9. $x^2 - y^2 = 1$: ....
10. $x^2 - y = 0$: ....

[37] Lembrar da equação geral da reta no plano (Ehp1.1)

Proposição C2.3. *Um subconjunto C do plano π é uma cônica se, e somente se C é:*

1. *o conjunto vazio, ou*
2. *um ponto, ou*
3. *uma reta, ou*
4. *duas retas idênticas, ou*
5. *duas retas paralelas, ou*
6. *duas retas concorrentes, ou*
7. *uma circunferência, ou*
8. *uma elipse, ou*
9. *uma hipérbole, ou*
10. *uma parábola.*



C3 Identificação: uso de translação e rotação

Dada uma equação de 2^o grau, identificar e esboçar a cônica.

- tentar fatorar/simplificar (veja Exemplo C2.2-5)
- fazer uma mudança do sistema de coordenadas de forma que:
  - a geometria da cônica é mantida;
  - a equação da cônica se reduza a uma mais simples.
- mudanças que utilizaremos:
  - translações;
  - rotações.

C: cônica $g(x,y) = 0$, onde

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- Note que se $b = d = e = 0$, então sabemos identificar a cônica.

Objetivo: eliminar os termos lineares e o termo quadrático misto:

- caso 1: eliminar os termos lineares
  - ∗ buscar alguma translação que transforme g em um polinômio $\tilde{g}$ sem os termos lineares
- caso 2: eliminar o termo quadrático misto
  - ∗ buscar alguma rotação que transforme g em um polinômio $\tilde{\tilde{g}}$ sem o termo quadrático misto
- quando necessário aplicar uma translação em g para obter um polinômio $\tilde{g}$ sem os termos lineares e uma rotação em $\tilde{g}$ para obter um polinômio $\tilde{\tilde{g}}$ sem o termo quadrático misto (e sem os lineares).

C3.1 Eliminação dos termos lineares por translação

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2+b^2+c^2 \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sistema de coordenadas ortogonal
- $O' = (h,k)_{\Sigma_1}$ ponto no plano π
- $\Sigma_2 = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ translação de Σ_1 para o ponto O' [38]
- $P = (x,y)_{\Sigma_1} = (u,v)_{\Sigma_2}$:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$$

Qual o efeito da translação no polinômio g ?

$$g(h+u, k+v) = au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + g(h,k)$$

- Para eliminar os termos lineares:

$$(\star) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

- Se o sistema $(\star)$ tem solução, encontramos $\tilde{g}$ dada por:

$$\tilde{g}(u,v) := g(h+u, k+v),$$

$$\boxed{\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k)}$$

[38] Veja Seção M1.2

Para qual translação (escolha de h e k) o sistema

$$(\star)\ \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

tem solução?

$$D := \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$$

$$\begin{cases} D \neq 0, & (\star) \text{ tem uma única solução } (h,k) \text{ (SPD)} \\ D = 0, & (\star) \text{ tem infinitas soluções } (h,k) \text{ (SPI)} \\ D = 0, & (\star) \text{ não tem solução (incompatível) (SI)}^{39} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} D \neq 0, & \text{podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SPI, podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SI, não podemos eliminar os termos lineares} \end{cases}$$

Nota. Se o sistema $(\star)$ possui infinitas soluções, **o valor de $g(h,k)$ não depende da escolha da solução (h,k)** (Verifique! veja Boulos, Ex. 23.10, p. 372 (sugestão p. 525))

Roteiro: determinar se é possível e então eliminar os termos lineares por meio de uma translação de Σ_1 para $O' = (h,k)$

Dada a cônica

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ onde } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

[39] SPD: sistema possível determinado, SPI: sistema possível indeterminado, SI: sistema impossível

- **Passo 1:** Calcular o determinante $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$.

- **Passo 2:**

  - Se $D \neq 0$, então existe uma única translação para o ponto $O' = (h,k)$ de modo que $\tilde{g}$ não contém os termos lineares.
  - Se $D = 0$, então pode ou não existir alguma translação para o ponto $O' = (h,k)$ de modo que $\tilde{g}$ não contém os termos lineares.
  - Os escalares h e k, quando existem, são soluções do sistema

$$(\star) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0. \end{cases}$$

- **Passo 4:** A equação $\tilde{g}(u,v) = 0$ no novo sistema de coordenadas satisfaz:

  - os coeficientes dos termos quadráticos são iguais em $\tilde{g}$ e g;
  - os termos lineares são nulos;
  - o termo independente em $\tilde{g}$ é

$$g(h,k),$$

  onde h e k são soluções de $(\star)$

  isto é, a equação da cônica transladada no novo s.c. é:

$$\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k).$$

Observe:

- $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$
-
$$(\star)\ \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$
- $g(h,k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$
- $\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$
- $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2 = 0 \iff \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4} = 0$
-
$$M = \left(\begin{array}{cc|c} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \hline \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{array}\right) \tag{C3.1}$$
- $(\star)$ é obtido pelas 2 primeira linhas da matriz M acima
- o termo constante de $\tilde{g}$ é obtido pela última linha da matriz M acima
- D é o determinante da submatriz principal de M

Definição C3.1. A matriz simétrica M acima é chamada de **matriz de** g.

Exercício. Verifique que $g(x,y) = X^tMX$, onde $X = (x\ y\ 1)_{1\times 3}$. (tarefa!)

Exemplo C3.2. Ver Exercício 75 em Slide de Exercícios.

C3.2 Classificação das cônicas através do centro

Como decidir qual é a cônica que tem equação

$$\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k) = 0?$$

Definição C3.3. Um ponto O é o **centro** de uma cônica C não-vazia quando:

$$P \in C \iff P' \in C,$$

onde P' é o simétrico de P em relação a O.[40]

Observando as possíveis cônicas (Proposição C2.3) podemos inferir que a cônica dada por:

1. uma reta: tem .... centros,
2. duas retas idênticas: tem .... centros,
3. duas retas paralelas: tem .... centros,
4. duas retas concorrentes: tem .... centros,
5. uma circunferência: tem .... centros,
6. uma elipse: tem .... centros,
7. uma hipérbole: tem .... centros
8. uma parábola: tem .... centros,
9. um ponto: tem .... centros ,
10. o conjunto vazio: tem .... centros.

Como decidir, quando existe, qual ponto é centro de uma cônica?

Exemplo C3.4. Em $\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k) = 0$,

[40]oO ponto $P = (-x,-y)$ é simétrico do ponto $P = (x,y)$ em relação a origem $O = (0,0)$.

- $\tilde{g}(-u,-v) = \tilde{g}(u,v)$
- $(-u,-v)$ é o simétrico de (u,v) em relação a $O' = (h,k)_{\Sigma_1} = (0,0)_{\Sigma_2}$
- $O' = (h,k)$ é o centro da cônica de equação $\tilde{g}(u,v) = 0$, onde (h,k) satisfaz o sistema

$$(\star) \quad \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

Para uma cônica não vazia C, se h e k satisfazem o sistema $(\star)$:

- $C : g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- (h,k) ponto no plano, com s.c.o Σ_1, tal que h e k satisfazem o sistema $(\star)$
- translada o sistema Σ_1 para $O' = (h,k)$
- obtemos $\tilde{g}$ como no Exemplo C3.4
- $\boxed{O' = (h,k) \text{ é o centro da cônica } C}$

Para uma cônica não vazia C, se $O' = (h,k)$ é o centro de C: (tarefa!)

- $C : g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- $O' = (h,k)$ é o centro da cônica C
- transladar o sistema Σ_1 para $O' = (h,k)_{\Sigma_1} = (0,0)_{\Sigma_2}$
- $$C : \tilde{g}(u,v) = g(h+u, k+v) = au^2 + buv + cv^2 + \underbrace{(2ah + bk + d)}_{d'} u + \underbrace{(bh + 2ck + e)}_{e'} v + g(h,k)$$
- $(-u,-v)$ é o simétrico de (u,v) em relação a O' e $(u,v) \in C \Leftrightarrow (-u,-v) \in C$:
$$\tilde{g}(-u,-v) = \tilde{g}(u,v) = 0$$
- $$\begin{cases} au^2 + buv + cv^2 + d'u + e'v + g(h,k) = 0 \\ au^2 + buv + cv^2 - d'u - e'v + g(h,k) = 0 \end{cases} \Longrightarrow d'u + e'v = 0,$$

onde $\begin{cases} d' := 2ah + bk + d \\ e' := bh + 2ck + e \end{cases}$

- $d' = e' = 0 \Longrightarrow h$ e k satisfazem $(\star)$
- d' ou e' não nulo:
  - $\Gamma : d'u + e'v = 0$ é uma reta que contém $(0,0)$
  - $C \subset \Gamma$:[a] ou $C = \{(0,0)\}$ ou $C = \Gamma$ que contém $(0,0)$
  - em ambos casos:

$$(0,0) \in C \Longrightarrow \tilde{g}(0,0) = 0 \Longrightarrow g(h,k) = 0$$

  - em ambos casos: $\forall m \in \mathbb{R}$, $m \neq -\frac{d'}{e'}$ ou $m \neq -\frac{e'}{d'}$:

$$\Gamma_1 : v = mu \text{ é tal que } \Gamma_1 \cap C = \{(0,0)\}$$

  - $\tilde{g}(x, mx) = 0$ tem solução única

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \quad x[(a + bm + cm^2)x - (d' - e'm)] = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 = \frac{d' - e'm}{a + bm + cm^2}(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0) \\ &\Longrightarrow \quad d' = e'm, \quad \text{para infinitos valores de } m \\ &\Longrightarrow \quad d' = e' = 0 \end{aligned}$$

- $\boxed{h \text{ e } k \text{ satisfazem o sistema } (\star)}$

[a] Ver Proposição C2.3

Proposição C3.5. *$O = (h, k)$ é centro de uma cônica não vazia de equação*

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

se, e somente se, (h, k) é solução do sistema

$$(\star)\ \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0. \end{cases}$$

Pela discussão das páginas C12 e C7 temos um critério preliminar para identificar uma cônica:

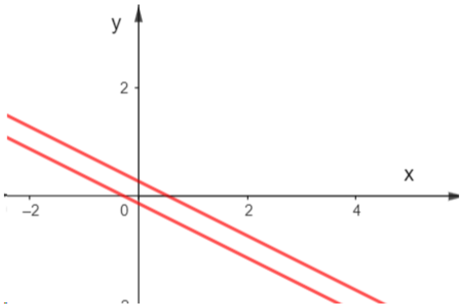
Corolário C3.6. *Para cônicas não vazias:*

Cônicas com único centro	$4ac - b^2 \neq 0$ $(\star)$ *é um SPD*	*ponto, circunferência, elipse, hipérbole, duas retas concorrentes*
Cônicas com infinitos centros	$4ac - b^2 = 0$ $(\star)$ *é um SPI*	*duas retas paralelas ou idênticas, uma reta*
Cônicas que não possuem centro	$4ac - b^2 = 0$ $(\star)$ *é um SI*	*parábola* 

Nota. O conjunto vazio pode ser considerado uma cônica com um, infinitos ou nenhum centro.

Para uma dada cônica, sabemos:

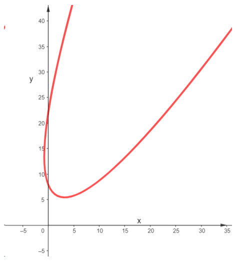
- sua equação: $g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$;
- determinar se: $(\star)\ \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$ é SPD ou SPI ou SI:
  - se SPD: é possível eliminar termos lineares e a cônica tem um centro:
    ¿ como decidir qual é a cônica (ponto, circunf., elipse, hip., retas concorrentes)?
  - se SPI: é possível eliminar termos lineares e a cônica tem infinitos centros:
    ¿ como decidir qual é a cônica (1 reta, retas paralelas ou idênticas)?
    $*$ no Exercício 75b (esboço feito no Geogebra Classic):



$\tilde{g}(u,v) = 7u^2 + 28uv + 28v^2 - \frac{8}{7}$

Wolfram, MathPapa, OnlineCalculator.Guru não fatoram a expressão da cônica (nem de g nem de $\tilde{g}$)!

  - se SI: é impossível eliminar termos lineares e a cônica não tem centro (parábola, pois não é vazio, por exemplo, $(0, 15 + 5\sqrt{2})_{\Sigma_1} \in C$):
    $*$ no Exercício 75a, a cônica é uma parábola: como fazer seu esboço?



$g(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 30y + 175$

- nos casos SPD e SPI, escrever: $\tilde{g}(u,v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h,k) = 0$

Como identificar a cônica se $(\star)$ é SPD ou SPI?

C3.3 Eliminação do termo quadrático misto por rotação

Aula 24

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,\ b \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sistema de coordenadas ortogonal
- $\Sigma_2 = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ rotação de Σ_1 de θ radianos em sentido anti-horário[41]
- $P = (x,y)_{\Sigma_1} = (u,v)_{\Sigma_2}$:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases} \tag{C3.2}$$

Nota. A matriz do sistema acima, chamada **matriz da rotação**[42], e sua respectiva matriz inversa são:

$$M_r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad M_r^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Qual o efeito da rotação no polinômio g ?

$$g(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) = ?$$

[41] Veja Seção M1.3

[42] É uma matriz ortogonal.

$$g(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta) = a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f',$$

onde

$$a' = a\cos^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta \tag{C3.3}$$

$$\boxed{\text{b'}} = (c-a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta$$

$$c' = a\sin^2\theta - b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \tag{C3.4}$$

$$\boxed{\text{d'}} = d\cos\theta + e\sin\theta$$

$$\boxed{\text{e'}} = e\cos\theta - d\sin\theta$$

$$\boxed{\text{f'}} = f.$$

Nota.

1. Rotações não alteram o termo independente.

2. Se $d = e = 0$, então $d' = e' = 0$, ou seja, rotações não criam novos termos lineares.

3. $\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{inversa da matriz de rotação}} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$

- Para eliminar o termo quadrático misto:

$$b' = (c - a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta = 0$$

- Neste caso, encontraríamos $\tilde{\tilde{g}}$ dada por:

$$\tilde{\tilde{g}}(u, v) := g(u\cos\theta - v\sin\theta, u\sin\theta + v\cos\theta),$$

$$\boxed{\tilde{\tilde{g}}(u, v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f}$$

Sempre conseguimos eliminar o termo quadrático misto??

Se sim, para qual rotação (escolha de θ) temos

$$b' = (c - a)\sin 2\theta + b\cos 2\theta = 0 \ ?$$

. . . .

Basta escolher $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que[43]

$$\cot(2\theta) = \frac{a - c}{b}.$$

Nota. Valem as relações:

$$a' + c' = a + c$$

$$a' - c' = \frac{b}{\sin(2\theta)} = b\sqrt{1 + \cot(2\theta)} = b\sqrt{1 + \frac{(a - c)^2}{b^2}}$$

---

[43]Podemos considerar $b \neq 0$, pois caso contrário a equação da cônica já não possui o termo misto e não é preciso fazer rotação.

Roteiro: é sempre possível eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação no sentido anti-horário de Σ_1 de ângulo $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Dada a cônica

$$g(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \text{ com } b \neq 0,$$

sempre é possível encontrar uma rotação (**Passo 1**) de modo que a equação

$$\tilde{\tilde{g}}(u,v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f = 0$$

no novo sistema de coordenadas satisfaz:

- o coeficiente do termo quadrático misto é nulo;
- o termo independente fica inalterado;
- os coeficientes dos termos quadráticos são soluções de $(*)$ (**Passo 2**);
- os coeficientes dos termos lineares são soluções de $(**)$ (**Passo 3**).

- **Passo 1:** Tome $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{a-c}{b}.$$

- **Passo 2:** a' e c' são soluções do sistema:

$$(*) \begin{cases} a' + c' = a + c \\ \\ a' - c' = \dfrac{b}{\sin(2\theta)} = b\sqrt{1 + \dfrac{(a-c)^2}{b^2}} \end{cases}$$

- **Passo 3:** d' e e' são soluções do sistema:

$$(**) \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

Nota. Como rotações não criam novos termos lineares, podemos alcançar o Objetivo da pág. C5 se aplicarmos primeiro uma translação para eliminar (quando possível) os termos lineares e depois uma rotação para eliminar o termo quadrático misto!

Fórmulas úteis:

Sabendo o valor de $\cot(2\theta)$, sabemos o valor de $\sin(2\theta)$:

$$\sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2(2\theta)}},$$

e portanto de $\cos(2\theta)$:

$$\cos(2\theta) = \cot(2\theta)\sin(2\theta).$$

Consequentemente, mesmo sem saber o exato valor do ângulo θ que nos fornece a rotação desejada, podemos determinar os valores de $\cos\theta$ e $\sin\theta$ através do sistema:

$$\begin{cases} \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta) \end{cases}$$

Assim, os coeficientes de $\tilde{\tilde{g}}$ ficam bem determinados através dos sistemas (*) e (**) nos Passos 2 e 3 do Roteiro na página C23 e a cônica pode ser identificada.

Exemplo C3.7. Ver Exercício 76 em Slide de Exercícios.

Retas tangente, secante e normal

Objetivo

Verificar a posição relativa de uma reta e uma cônica e suas intersecções.

Aula 25

T1 Retas secantes, tangentes e normais

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal no plano π

QUAL A POSIÇÃO RELATIVA DE UMA RETA r E UMA CÔNICA C EM π ?

- $r : X = (h, k) + \lambda(m, n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (Proposição C2.3):
  - *o conjunto vazio:* ✓
  - *um ponto:* ✓
  - *uma reta ou duas retas idênticas ou duas retas paralelas ou duas retas concorrentes: Seção R4.1: Posição relativa entre retas* ✓
  - *uma circunferência (caso particular da elipse),*
  - *uma elipse, ou*
  - *uma hipérbole, ou*
  - *uma parábola.*
- Vamos considerar C uma elipse ou hipérbole ou parábola

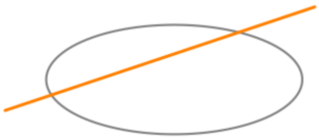
- $X \in r \cap C \iff X = (h + \lambda m, k + \lambda n)$ e $g(X) = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$:
  - equação de grau no máximo 2 na variável λ, a saber:

$$(am^2 + bmn + cn^2)\lambda^2 + (2ahm + bmk + bnh + 2cnk + dm + en)\lambda + (f + ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek) = 0$$

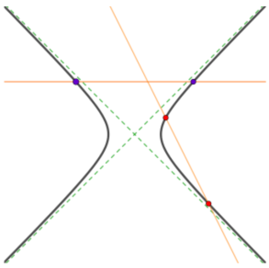
  - cada solução λ da equação acima corresponde a um ponto X de $r \cap C$:
    * $r \cap C$ pode possuir 2 pontos distintos;
    * $r \cap C$ pode possuir 1 único ponto;
    * $r \cap C$ pode ser $\emptyset$.

Definição T1.1. Seja C uma elipse, hipérbole ou parábola.

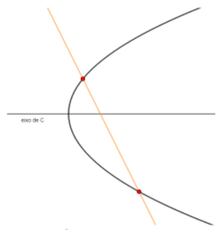
1. Uma reta r é **secante** a C se $r \cap C$ possui 2 pontos distintos.



reta secante
($\Delta > 0$)

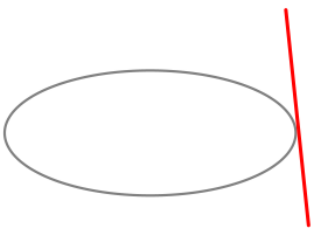


reta secante
($\Delta > 0$)

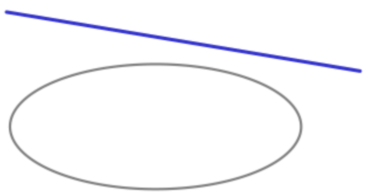


reta secante
($n \neq 0, \Delta > 0$)

2. Uma reta r é **tangente** a
   (a) **elipse** C se $r \cap C$ possui 1 único ponto T;

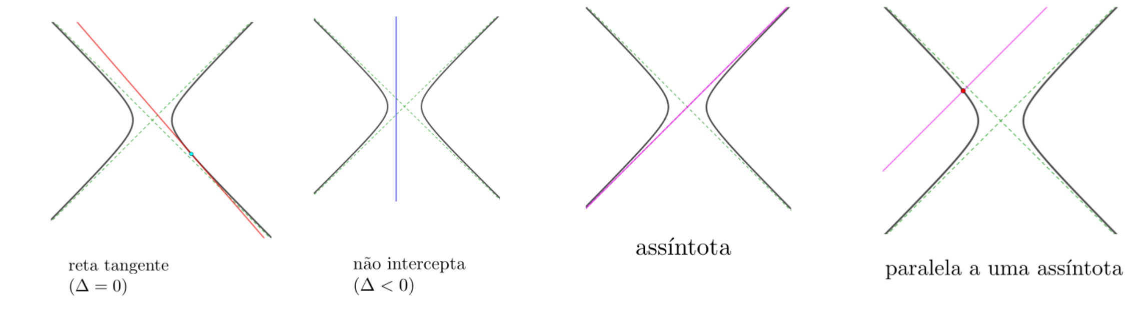


reta tangente
($\Delta = 0$)

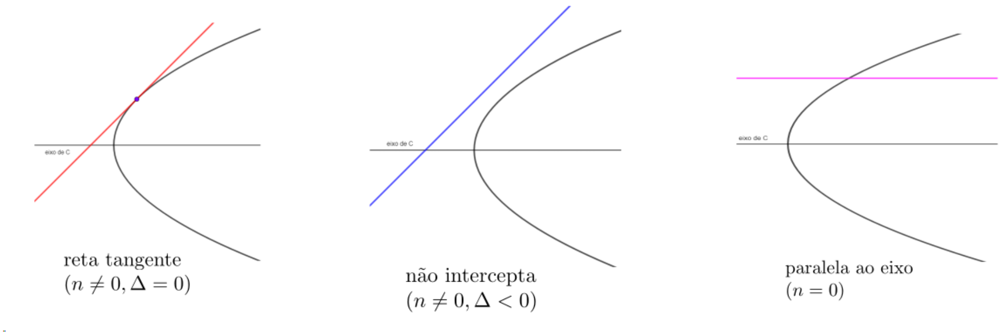


não intercepta
($\Delta < 0$)

   (b) **hipérbole** C se $r \cap C$ possui 1 único ponto T e r não é paralela a uma assíntota;



(c) **parábola** C se $r \cap C$ possui 1 único ponto T e r não é paralela ao eixo de simetria.



$\vec{r} = (m, n)$

i. O ponto T é chamado **ponto de tangência** e qualquer vetor diretor da reta tangente r é chamado **vetor tangente** a C em T.

3. A reta perpendicular a reta tangente no ponto de tangência T é chamada **reta normal** a C em T.

Atenção: definição de reta tangente como sendo uma certa reta que intercepta a curva em um único ponto **não** é válida para curvas mais gerais no plano!

Exemplo T1.2. Ver Exercício 77 em Slide de Exercícios.

T2 Demostrações

T2.1 Posição relativa entre reta e elipse

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2} + \frac{(k+\lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$

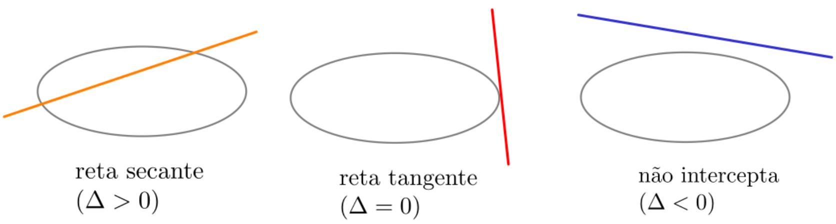
$$(*) \quad \Bigg(\underbrace{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}_{>0}\Bigg) \lambda^2 + 2\left(\frac{m}{a^2}h + \frac{n}{b^2}k\right)\lambda + \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

- a equação (*) é de 2º grau

- $$\Delta = 4\left[\left(\frac{m}{a^2}h + \frac{n}{b^2}k\right)^2 - \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1\right)\right]$$

Os três possíveis casos da posição relativa da reta e elipse são:

- $\Delta > 0$: r é reta secante a C
- $\Delta = 0$: r é reta tangente a C em $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$, onde λ_0 é a raiz de $(*)$
- $\Delta < 0$: r não intercepta C



Proposição T2.1. *Seja* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *uma equação reduzida da elipse* C.

Se $T = (h, k)$ *é um ponto da elipse, então a equação da reta tangente a* C *em* T *é dada por*

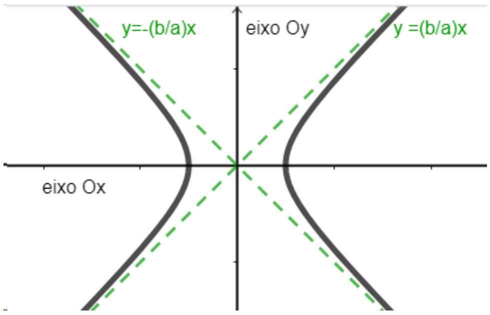
$$\frac{h}{a^2}x + \frac{k}{b^2}y = 1.$$

T2.2 Posição relativa entre reta e hipérbole

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

cujas assíntotas são[44] $A_1 : y = \dfrac{b}{a}x$ e $A_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$.



$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $$X \in r \cap C \iff \frac{(h + \lambda m)^2}{a^2} - \frac{(k + \lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$$

$$(**) \quad \left(\underbrace{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}}_{\neq 0?}\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{m}{a^2}h - \frac{n}{b^2}k\right)\lambda + \left(\frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

[44] Ver p. Ehp22

$$\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) = 0$$

$$\iff \frac{m}{a} = \frac{n}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{a} = -\frac{n}{b}$$

$$\iff \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} = -\frac{a}{b}$$

$$\iff \vec{r} = (m,n) \parallel (a,b) \text{ ou } \vec{r} = (m,n) \parallel (a,-b)$$

$$\overset{(\text{Ehp1.1})}{\iff} r \text{ é paralela a uma das assíntotas de } C$$

- Se r não é paralela a qualquer das assíntotas de C:

  \- a equação (**) é de segundo grau, e portanto:

  - $\Delta > 0$: r é reta secante a C
  - $\Delta = 0$: r é reta tangente a C em $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$, onde λ_0 é a raiz de $(**)$
  - $\Delta < 0$: r não intercepta C

- Se r é paralela a uma das assíntotas de C:

  \- a equação (**) é de primeiro grau, e portanto:

  - paralela coincidente: r é a assíntota e não intercepta C
  - paralela distinta: r é paralela à assíntota e intercepta C em $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$, onde λ_1 é a raiz de $(**)$

- tome $\vec{r} = (m, n) = (a, b)$ (o caso $\vec{r} = (m, n) = (a, -b)$ é similar)
- a eq. de 2^o grau (**) fica:

$$(***)\ 2\left(\frac{1}{a}h - \frac{1}{b}k\right)\lambda + \left(\frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1\right) = 0$$

- (***) tem nenhuma solução:

$$\frac{h}{a} = \frac{k}{b} \iff \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 0 \neq 1 \text{ e } k = \frac{b}{a}h$$

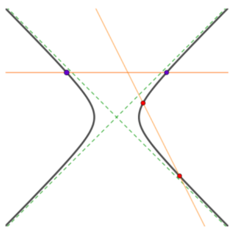
$$\therefore (h, k) \in r \cap A_1 \Longrightarrow r = A_1$$

- (***) tem uma única solução λ_1:

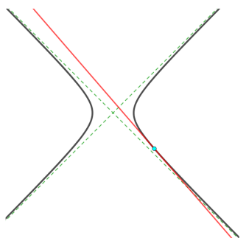
$$P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n) \in r \cap C$$

$$\therefore r \cap A_1 = \emptyset \Longrightarrow r \parallel A_1, r \neq A_1$$

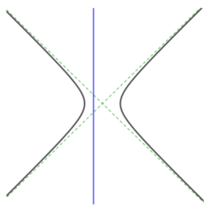
Os cinco possíveis casos da posição relativa da reta e hipérbole são:



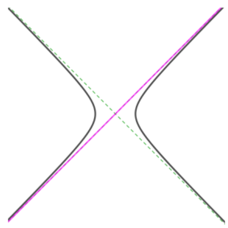
reta secante
($\Delta > 0$)



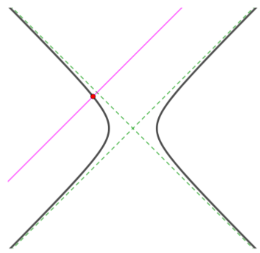
reta tangente
($\Delta = 0$)



não intercepta
($\Delta < 0$)



assíntota

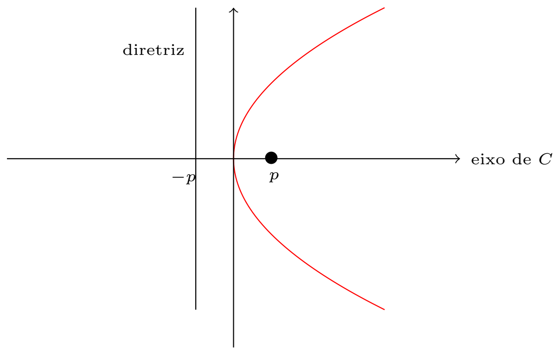


paralela a uma assíntota

T2.3 Posição relativa entre reta e parábola

- $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = y^2 - 4px = 0.$$



$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff (k + \lambda n)^2 = 4p(h + \lambda m) \iff$

$$(\diamond) \quad \underbrace{n^2}_{\neq 0?} \lambda^2 + 2(nk - 2pm)\lambda + (k^2 - 4ph) = 0$$

- $n \neq 0$:

  - a equação $(\diamond)$ é de 2^o grau e portanto:

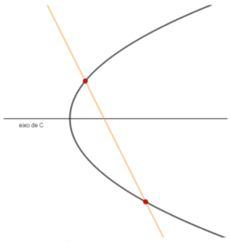
  - $\Delta > 0$: r é reta secante a C
  - $\Delta = 0$: r é reta tangente a C em $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$, onde λ_0 é a raiz de $(\diamond)$
  - $\Delta < 0$: r não intercepta C

- $n = 0$:

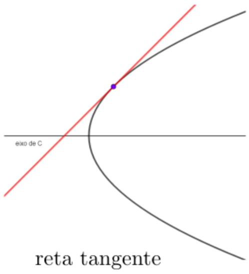
  - $\vec{r} = (m, 0)$, $m \neq 0$ e $p \neq 0$
  - $(\diamond)$ é de 1^o grau e tem uma única solução: $\lambda_1 = \frac{k^2 - 4ph}{4pm}$
  - r é paralela ao eixo de simetria de C [a] e intercepta C no ponto $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$.

[a] Ver Definição Ehp4.1 e (Ehp4.2)

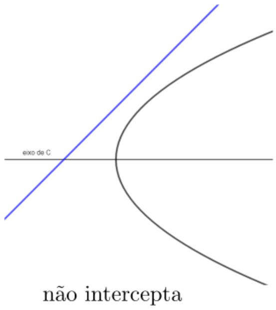
Os quatro possíveis casos da posição relativa da reta e parábola são:



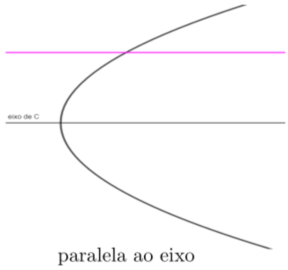
reta secante
($n \neq 0, \Delta > 0$)



reta tangente
($n \neq 0, \Delta = 0$)



não intercepta
($n \neq 0, \Delta < 0$)



paralela ao eixo
($n = 0$)

Geogebra: posição relativa de reta e elipse/hipérbole/parábola.

Se r é uma reta tangente à cônica C no ponto T e $\vec{r} = (m, n)$ é um vetor diretor de r, então a reta normal a C no ponto T é a reta que passa pelo ponto T e tem $\vec{n} = (n, -m)$ como um vetor diretor.

Quádricas

Objetivo

Aula 25

Definir o lugar geométrico chamado quádricas:

- superfícies descritas por uma equação de segundo grau em três variáveis.
- listar o elenco de quádricas

Estudar os lugares geométricos de E^3 chamados: esfera, elipsóide, hiperbolóide, cone, parabolóide e quádricas cilíndricas:

- aprender suas equações;
- estudar suas propriedades geométricas.

(fixado um sistema de coordenadas)

FIXE EM E^3 UM SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAL $\Sigma = (O, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}))$.

Q1 Quádricas

Uma **quádrica** é o lugar geométrico de pontos de E^3 descrito, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal, por uma equação de segundo grau em x, y e z:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

Um estudo análogo ao que foi feito em cônicas pode ser feito para quádricas, e uma lista completa de todas as quádricas são:

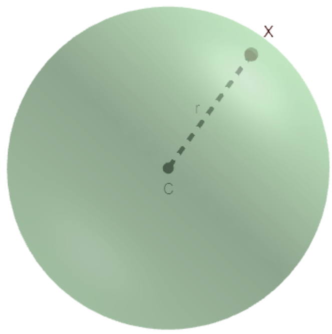
1. superfície esférica;
2. elipsóide;
3. hiperbolóide;
4. parabolóide;
5. quádrica cilíndrica;
6. quádrica cônica;
7. conjunto vazio;
8. conjunto de um único ponto;
9. reta;
10. plano;
11. reunião de dois planos paralelos;
12. reunião de dois planos transversais.

Destacamos os casos particulares: esfera, elipsóide, hiperbolóide e parabolóide e quádricas cilíndricas e cônica.

Q2 Esfera

Definição Q2.1. Sejam C um ponto de E^3 e ρ um número real positivo. A **esfera** (ou superfície esférica) S de centro C e raio ρ é o lugar geométrico dos pontos X de E^3 tais que

$$d(X,C) = \rho.$$



- $C = (x_0, y_0, z_0)$
- $X = (x, y, z)$
- $$\boxed{X \in S \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2}$$

  A equação acima é chamada **equação reduzida** da esfera de centro C e raio ρ.
- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2 \iff$

  $$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \tag{Q2.1}$$

  onde

  $$a = -2x_0; \quad b = -2y_0; \quad c = 2z_0; \quad d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \rho^2$$

  A equação acima é chamada **equação geral** da esfera de centro C e raio ρ.

Nota.

- Nem toda equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \tag{Q2.2}$$

  é equação de uma esfera. Por exemplo,

$$\emptyset : x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

- A Eq. (Q2.2) é equivalente a:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} =: \rho^2.$$

Proposição Q2.2. *A equação* (Q2.2) *descreve:*

- *a esfera de centro* $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ *e raio* $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$, *se*

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0;$$

- *o ponto* $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$, *se*

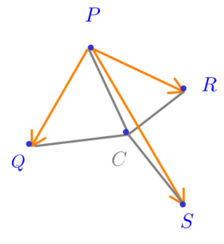
$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0;$$

- *o conjunto vazio* $\emptyset$, *se*

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0.$$

Exemplo Q2.3. Ver Exercícios 78 a 80 em Slide de Exercícios.

Proposição Q2.4. *Existe uma única esfera que contém quatro pontos distintos P, Q, R e S se, somente se, esses pontos não são coplanares.*



Q2.1 Posição relativa de reta/plano e esfera

Aula 26

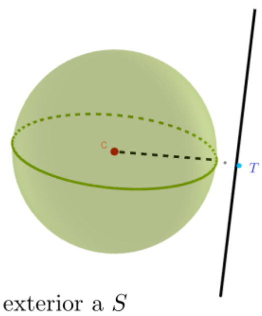
Definição Q2.5. Seja S uma superfície esférica de centro C e raio ρ. Dizemos que um ponto P é

- **interior a S** se $d(P, C) < \rho$;
- **exterior a S** se $d(P, C) > \rho$.

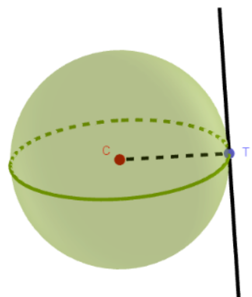
Um **conjunto de pontos** é **interior** (respec., **exterior**) a S quando todos seus pontos são interiores (respec., exteriores) a S.

Exemplo Q2.6. Ver Exercício 81 em Slide de Exercícios.

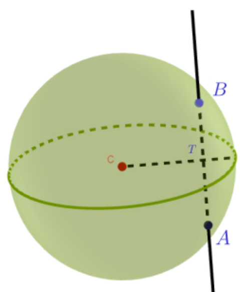
Q2.1.1 Posição relativa e intersecção de reta e esfera



reta exterior a S
$(d(C, r) > \rho,\ r \cap S = \emptyset)$



reta tangente a S em T
$(d(C, r) = \rho,\ r \cap S = \{T\})$



reta secante a S
$(d(C, r) < \rho,\ r \cap S = \{A, B\})$

- S esfera de centro C e raio ρ

- r uma reta
- a posição relativa de r e S é determinada pela comparação entre ρ e a distância de r a C[45]:

$$d(r, C) := \min\{d(P, C); P \in r\} = d(T, C), \tag{Q2.3}$$

onde T é a projeção ortogonal de C sobre r.

- fixe $\Sigma = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$O = C \quad \text{e} \quad \vec{r} \parallel \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

- $S : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
- $\boxed{T = (x_0, y_0, 0) \text{ a projeção ortogonal de } C \text{ sobre } r}$
- $r : X = T + \lambda(0, 0, 1) = (x_0, y_0, \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$

Quando r é exterior, tangente ou secante a S?

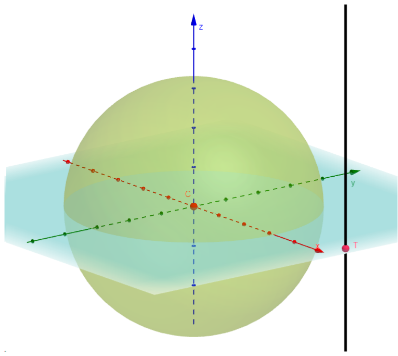
$$\begin{aligned} X \in r \cap S &\iff X = (x_0, y_0, \lambda) \text{ e } X \in S \\ &\iff x_0^2 + y_0^2 + \lambda^2 = \rho^2 \\ &\iff \lambda^2 = \rho^2 - (x_0^2 + y_0^2) \\ &\iff \boxed{\lambda^2 = \rho^2 - (d(T, C))^2} \end{aligned} \tag{Q2.4}$$

- $d(T, C) > \rho$:
  - pela Eq. (Q2.4) (que não tem solução): $r \cap S = \emptyset$
  - para todo $P \in r$, temos:

$$d(P, C) \overset{Eq.(Q2.3)}{\geq} d(r, C) \underset{def.deT}{\overset{Eq.(Q2.3)}{=}} d(T, C) > \rho;$$

[45] Ver Definição Pad3.2

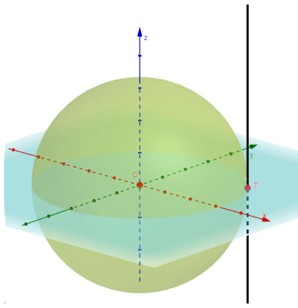
$\therefore$ todo ponto de r é exterior a S ($r \cap S = \emptyset$)



- $d(T, C) = \rho$:
  - pela Eq. (Q2.4) (que tem única solução, $\lambda = 0$):
    existe um único ponto em $r \cap S$: $T = (x_0, y_0, 0)$;
  - pela Eq (Q2.3), para todo $P \in r, T \neq C$:

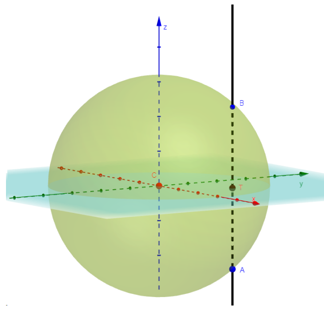
$$d(P, C) > d(T, C) = \rho;$$

$\therefore$ todo ponto de r, exceto T, é exterior a S ($r \cap S = \{T\}$)



- $d(T, C) < \rho$:
  - pela Eq. (Q2.4) (que tem duas soluções $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$):
    - existem 2 pontos em $r \cap S$: $A = (x_0, y_0, \lambda_2)$ e $B = (x_0, y_0, \lambda_1)$;
    - $\lambda_1 = -\lambda_2$ e T é o ponto médio de $\overline{AB}$;
    - $X = (x_0, y_0, \lambda) \in r$ e $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$
      $\Longrightarrow X \in \overline{AB}$ (i.e., pontos de r entre A e B)
      $\Longrightarrow X$ é ponto interior a S;
    - $X = (x_0, y_0, \lambda) \in r$ e $\lambda < \lambda_1$ ou $\lambda > \lambda_2$ (i.e., demais pontos de r): é ponto exteriores a S

$\therefore$ os pontos de r entre A e B são interiores e os demais são exteriores a S $(r \cap S = \{A, B\})$

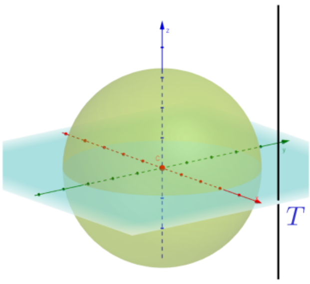


Proposição Q2.7. *Sejam r uma reta e S uma superfície esférica de centro C e raio ρ.*

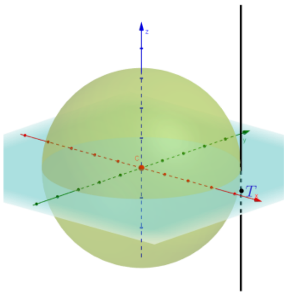
1. *Se $d(r, C) > \rho$, então $r \cap S = \emptyset$ e r é exterior a S;*

2. *Se $d(r, C) = \rho$, então $r \cap S = \{T\}$, onde T é a projeção ortogonal de C sobre r e os demais pontos de r são exteriores a S. Neste caso, r é* **reta tangente** *a S em T;*

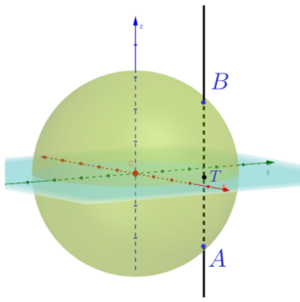
3. *Se $d(r, C) < \rho$, então $r \cap S = \{A, B\}$, onde A e B são distintos e o ponto médio de $\overline{AB}$ é a projeção ortogonal de C sobre r. Todos os pontos do segmento $\overline{AB}$ são interiores a S e todos os demais pontos de r exteriores a $\overline{AB}$ são exteriores a S. Neste caso, r é* **reta secante** *a S.*



reta exterior a S
($d(C, r) > \rho$, $r \cap S = \emptyset$)

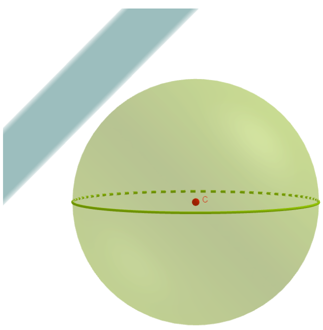


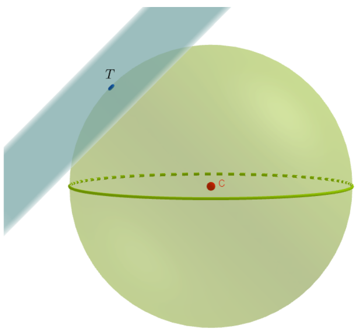
reta tangente a S em T
($d(C, r) = \rho$, $r \cap S = \{T\}$)

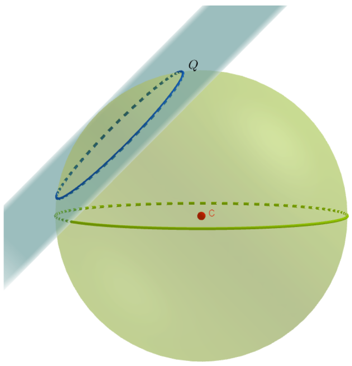


reta secante a S
($d(C, r) < \rho$, $r \cap S = \{A, B\}$)

Q2.1.2 Posição relativa e intersecção de plano e esfera







- S esfera de centro C e raio ρ
- π um plano
- a posição relativa de π e S é determinada pela comparação entre ρ e a distância de π a C[46]:

[46] Ver Definição Pad3.4

$$d(\pi, C) := \min\{d(P, C); P \in \pi\} = d(T, C), \tag{Q2.5}$$

onde T é a projeção ortogonal de C a π.

- fixe $\Sigma = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$O = C \quad \text{e} \quad \vec{\eta}_\pi \parallel \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

- $S : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
- $\pi : z = m$
- $T = (0, 0, m)$ é a projeção ortogonal de C sobre π

QUANDO π É EXTERIOR, TANGENTE OU É SECANTE A S?

- $d(\pi, C) = |m|$
-

$$\begin{aligned}
X \in \pi \cap S &\iff X = (x_0, y_0, m) \text{ e } X \in S \\
&\iff \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + m^2 = \rho^2 \\ z = m \end{cases} \\
&\iff \boxed{\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = \rho^2 - d(\pi, C)^2 \\ z = m \end{cases}}
\end{aligned} \tag{Q2.6}$$

- $d(\pi, C) > \rho$:
  - $\pi \cap S = \emptyset$
  - $d(\pi, C) > \rho \iff d(X, C) \geq d(\pi, C) > \rho;\ \forall X \in \pi$

  $\therefore$ todo ponto de π é exterior a S ($\pi \cap S = \emptyset$)

- $d(\pi, C) = \rho$:
  - pela Eq. (Q2.6)
    - existe um único ponto em $\pi \cap S$: $T = (0, 0, m)$;
    - T é a projeção ortogonal de C em π
  - pela Eq (Q2.5):
    $d(P, C) > d(T, C) = \rho$, para todo $P \in \pi, T \neq C$.

  $\therefore$ todo ponto de π, exceto T, é exterior a S ($\pi \cap S = \{T\}$)

- $d(\pi, C) < \rho$:
  - pela Eq. (Q2.6)
    - existem infinitos pontos em $\pi \cap S$ (os pontos do círculo):

$$Q = \{(x, y, m) : \ x^2 + y^2 = \rho^2 - d(\pi, C)^2\};$$

    - o centro de Q é a projeção ortogonal T de C em π;
    - os pontos no interior do círculo Q são interiores a S;
    - os pontos exteriores ao círculo Q são exteriores a S.

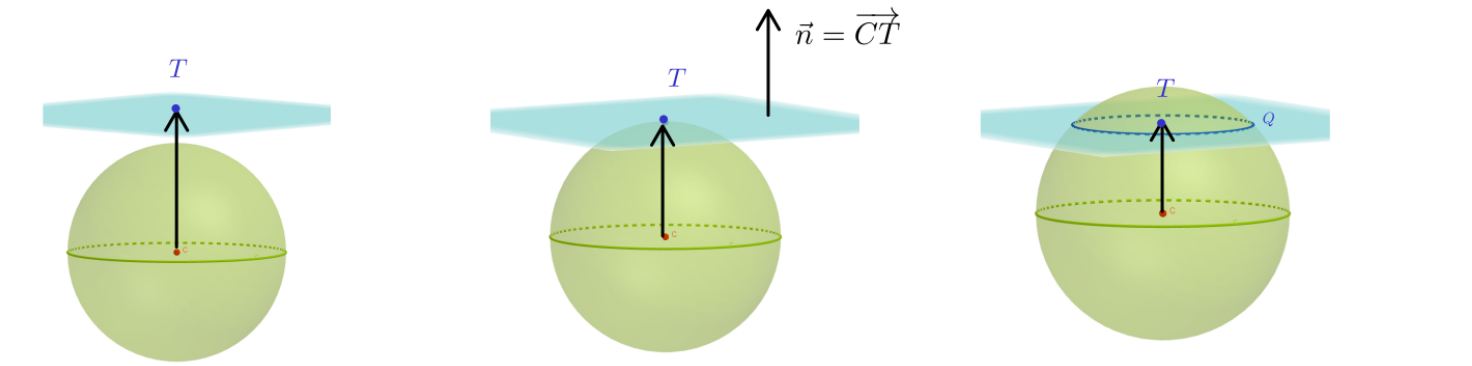
  $\therefore$ os pontos de π interiores ao círculo Q são interiores a S e os demais são exteriores a S ($\pi \cap S = Q$)

Proposição Q2.8. *Sejam π um plano e S uma superfície esférica de centro C e raio ρ.*

1. *Se $d(\pi, C) > \rho$, então $\pi \cap S = \emptyset$ e π é exterior a S;*

2. *Se $d(\pi, C) = \rho$, então $\pi \cap S = \{T\}$, onde T é a projeção ortogonal de C sobre π e os demais pontos de π são exteriores a S. Neste caso, π é* **plano tangente** *a S em T e $\overrightarrow{CT}$ é um vetor normal a π;*

3. *Se $d(\pi, C) > \rho$, então $\pi \cap S$ é um círculo Q de raio $r = \sqrt{\rho^2 - d(\pi, C)^2}$ cujo centro é a projeção ortogonal de C sobre π. Todos os pontos interiores a Q são interiores a S e todos os demais pontos de exteriores a Q são exteriores a S. Neste caso, π é* **plano secante** *a S.*



plano exterior a S
($d(C, \pi) > \rho$, $\pi \cap S = \emptyset$)
T = projeção ortogonal de C é exterior a S

plano tangente a S em T
($d(C, \pi) = \rho$, $r \cap S = \{T\}$)
T = projeção ortogonal de C pertence a S

plano secante a S
($d(C, \pi) < \rho$, $\pi \cap S = Q$,
Q é um círculo de centro C e raio r)
T = projeção ortogonal de C é interior a S

Exemplo Q2.9. Ver Exercício 82 em Slide de Exercícios.

Q3 Quádricas no Geogebra

Aula 27

As quádricas e suas intersecções com planos paralelos aos planos coordenados podem ser visualizadas no link Geogebra-Peron.

Fixado um s.c.o., temos cinco tipos de equações reduzidas que modelam doze quádricas:

- **Elipsóide/Esfera; Hiperbolóide de uma folha ; Hiperbolóide de duas folhas**, que possuem equações reduzidas da forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1,$$

onde as constantes não nulas a, b, c devem ser, respectivamente, todas positivas; duas positivas e uma negativa; duas negativas e uma positiva.

- **Quádrica cônica (cone)** que possui equação reduzida da forma:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

onde as constantes não nulas a, b, c devem ser duas positivas e outra negativa, equivalentemente:

$$z^2 = Ax^2 + By^2, \quad \text{ou} \quad x^2 = Ay^2 + Bz^2, \quad \text{ou} \quad y^2 = Ax^2 + Bz^2,$$

onde as constantes A, B são positivas.

- **Parabolóide elíptico/circular; Parabolóide hiperbólico (sela)**, que possuem equações reduzidas da forma:

$$z = ax^2 + by^2; \quad (\text{ou } y = ax^2 + bz^2; \quad x = ay^2 + bz^2)$$

onde as constantes não nulas a, b devem ser, respectivamente, ambas positivas; de sinais contrários.

- **Quádrica cilíndrica (cilindro) elíptica/circular; Quádrica cilíndrica hiperbólica**, que possuem equações reduzidas da forma:

$$ax^2 + by^2 = 1$$

onde as constantes não nulas a, b devem ser, respectivamente, ambas positivas; de sinais contrários.

- **Quádrica cilíndrica parabólica**, que possui equação reduzida da forma:

$$y^2 = ax \qquad (\text{ou } x^2 = ay)$$

onde $a \neq 0$.

Q4 Elipsóide

Uma quádrica Ω é um **elipsóide** se existem números reais positivos a, b, c, pelo menos dois deles distintos, e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

chamada **equação reduzida** de Ω.

Nota.

1. Se $a = b = c > 0$, então Ω é uma esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio a.
2. A intersecção com os eixos coordenados Ox, Oy e Oz ocorrem respectivamente em $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ e $(0, 0 \pm c)$.
3. Ω é **totalmente simétrico em relação ao sistema de coordenadas**: é simétrico em relação aos planos coordenados, eixos coordenados e à origem:

$$P = (x, y, z) \in \Omega \Longleftrightarrow P_1 = (-x, y, z), P_2 = (-x, -y, z), P_3 = (-x, -y, -z), ... \in \Omega.$$

Como é um elipsóide?

Q4.0.1 Interseção de elipsóide e planos paralelos aos planos coordenados

As equações dos planos coordenados são: $z = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.

- $\boxed{\pi : z = k}$, $\quad \pi_1 : x = m, \quad \pi : y = n$
- $$X = (x, y, z) \in \pi \cap \Omega \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}}$$
- $p := 1 - \dfrac{k^2}{c^2}$
- se $p < 0$, isto é, $|k| > c$:

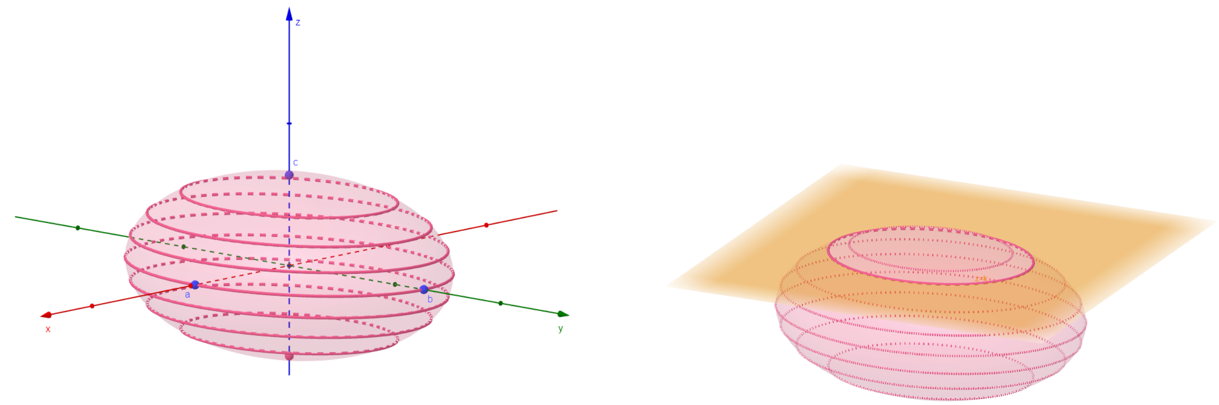
  $\pi \cap \Omega$: $\emptyset$;
- se $p = 0$, isto é, $|k| = c$:

  $\pi \cap \Omega$: o ponto $T = (0, 0, k)$;

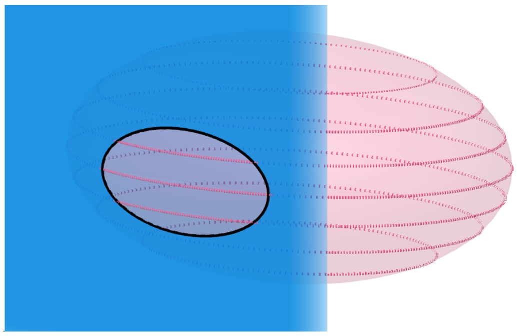
- se $p > 0$, isto é, $|k| < c$:

  $\pi \cap \Omega$: $\dfrac{x^2}{pa^2} + \dfrac{y^2}{pb^2} = 1$ (elipse[47]).

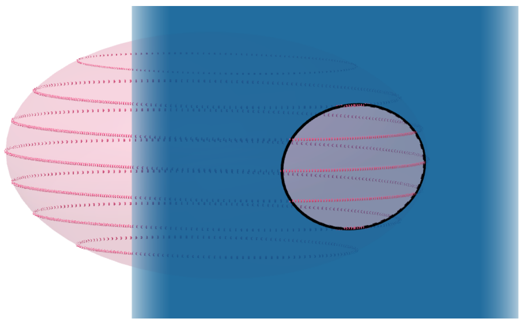
  - $\boxed{\text{vértices da elipse no plano } z = k\text{: } (\pm a\sqrt{p}, 0, k) \text{ e } (0, \pm b\sqrt{p}, k)}$



(Geogebra-elipsóide)



$(x = k)$



$(y = k)$

Q5 Hiperbolóide de uma folha

Uma quádrica Ω é um **hiperbolóide de uma folha** se existem números reais positivos a, b, c e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

[47] Se $a = b$, uma circunferência, no plano $z = k$, de centro $(0, 0, k)$ e raio $a\sqrt{1 - \dfrac{k^2}{c^2}}$.

chamada **equação reduzida** de Ω.

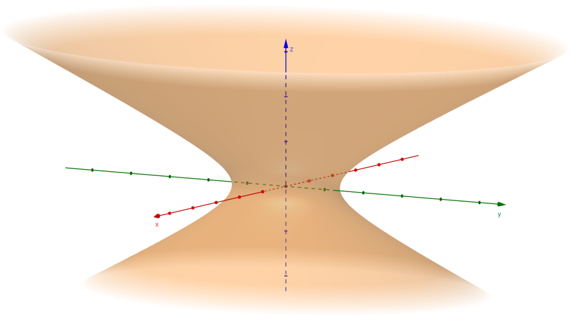
Nota.

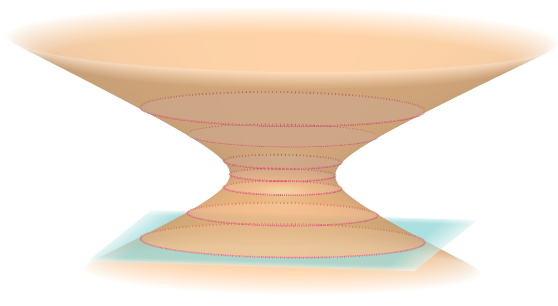
1. Ω é totalmente simétrico em relação ao sistema de coordenadas.
2. A intersecção com os eixos coordenados Ox e Oy ocorrem respectivamente em $(\pm a, 0, 0)$ e $(0, \pm b, 0)$ e Ω não intercepta o eixo Oz (chamado **eixo distinguido**).

COMO É UM HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA?

Q5.0.1 Interseção de hiperbolóide de uma folha e planos paralelos aos coordenados

- $\boxed{\pi : z = k,}$
- $X = (x, y, z) \in \pi \cap \Omega \iff \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}}$
- $p := 1 + \dfrac{k^2}{c^2} > 0$
- $\pi \cap \Omega$: $\dfrac{x^2}{pa^2} + \dfrac{y^2}{pb^2} = 1$ (elipse[48])





(Geogebra-hiperb.1folha)

- $\pi_1 : x = m,$ $\boxed{\pi : y = n}$

[48]Se $a = b$, uma circunferência, no plano $z = k$, de centro $(0, 0, k)$ e raio $a\sqrt{1 + \dfrac{k^2}{c^2}}$.

- $X = (x, y, z) \in \pi \cap \Omega \iff \boxed{\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{n^2}{b^2} \\ y = n \end{cases}}$

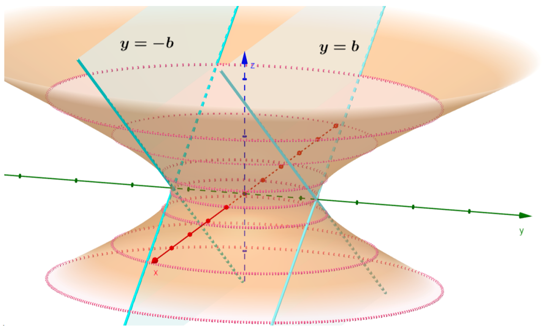
- $p := 1 - \dfrac{n^2}{b^2}$

- se $p = 0$, isto é, $|n| = b$:

  $\pi \cap \Omega$: $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 0;$

  - duas retas concorrentes, no plano $y = n$, de equações:

$$r : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = n \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ y = n \end{cases}$$



- se $p \neq 0$:

  $\pi \cap \Omega$: $\dfrac{x^2}{pa^2} - \dfrac{z^2}{pc^2} = 1;$

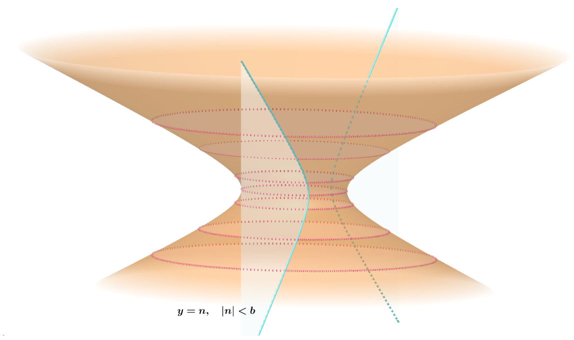
  - hipérbole no plano $y = n$ de centro $(0, n, 0)$

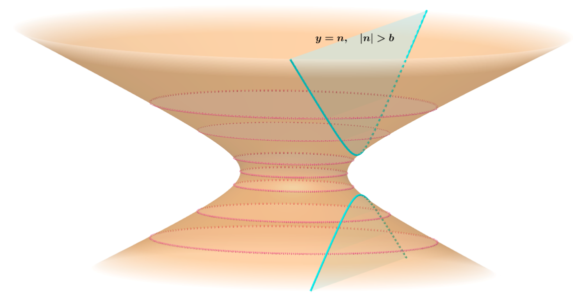
    * $p > 0$ (i.e.. $|n| < b$): os focos da hipérbole estão na reta, paralela ao eixo Ox,

$$r : X = (0, n, 0) + \lambda(1, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

    * $p < 0$ (i.e.. $|n| > b$): os focos da hipérbole estão na reta, paralela ao eixo Oy,

$$r : X = (0, n, 0) + \lambda(0, 0, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



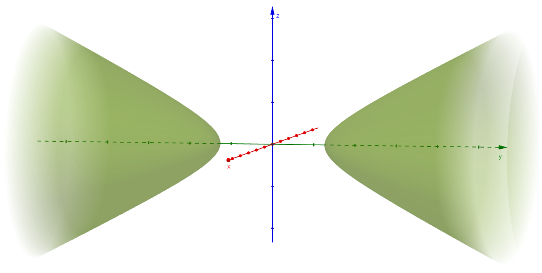


Q6 Hiperbolóide de duas folhas

Uma quádrica Ω é um **hiperbolóide de duas folhas** se existem números reais positivos a, b, c e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

chamada **equação reduzida** de Ω.



Tarefa: estude a intersecção de Ω com os planos paralelos aos planos coordenados (Geogebra-hiperbolóide 2 folhas).

Q7 Cone

Uma quádrica Ω é um **cone** se existem números reais positivos a, b, c e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

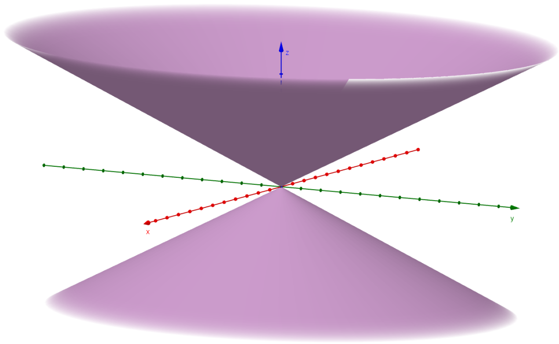
chamada **equação reduzida** de Ω. Se $a \neq b$, Ω é um **cone elíptico** e se $a = b$, Ω é um **cone circular** (ou **cone de rotação**).

Nota. A equação reduzida do cone é equivalente a

$$z^2 = Ax^2 + By^2, \qquad \text{para algum } A, B > 0$$

ou

$$\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad \text{para algum } a, b > 0}$$



Tarefa: estude a intersecção de Ω com os planos paralelos aos planos coordenados (Geogebra-cone/parabolóide).

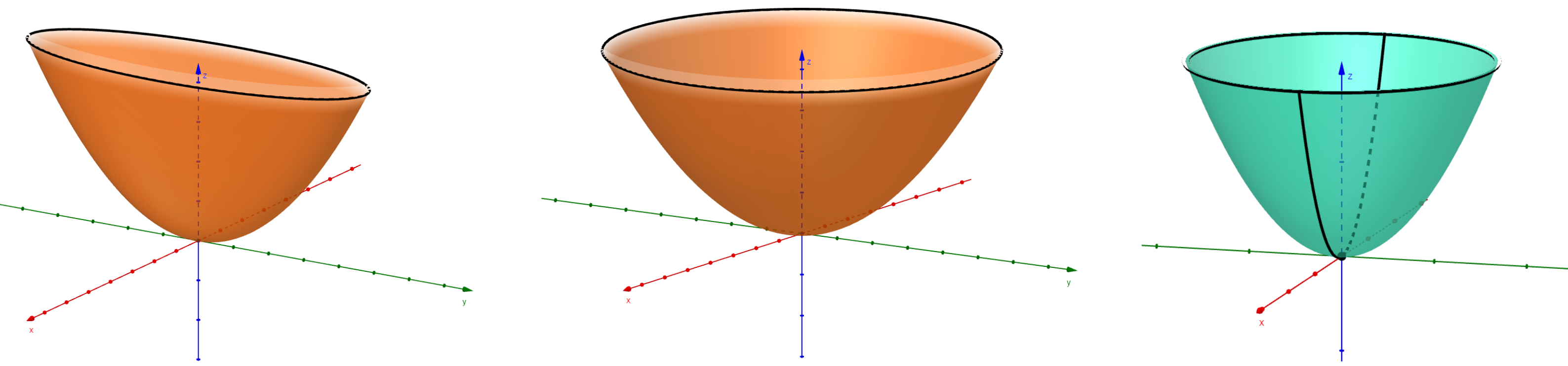
Wikipedia: hiperbolóides e cone
Wikipedia: cilindro, hiperbolóide e cone

Q8 Parabolóide elíptico e circular

Uma quádrica Ω é um **parabolóide** se existem números reais positivos a, b e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

chamada **equação reduzida** de Ω. Se $a \neq b$, Ω é um **parabolóide elíptico** e se $a = b$, Ω é um **parabolóide circular** (ou **parabolóide de rotação**).



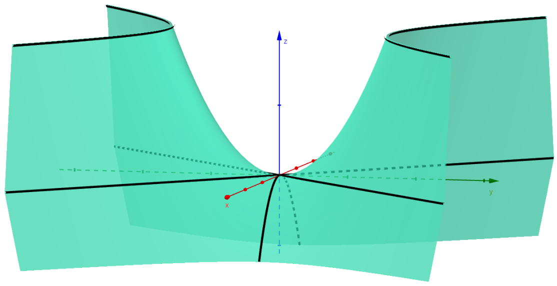
Tarefa: estude a intersecção de Ω com os planos paralelos aos planos coordenados (Geogebra -parabolóide/cone).

Q9 Parabolóide hiperbólico (sela)

Uma quádrica Ω é um **parabolóide hiperbólico** (**sela**) se existem números reais positivos a, b e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual Ω pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

chamada **equação reduzida** de Ω.



Tarefa: estude a intersecção de Ω com os planos paralelos aos planos coordenados (Geogebra -sela).

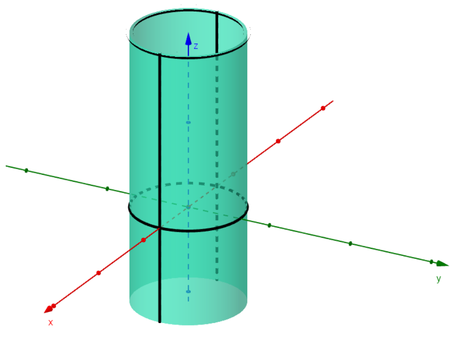
Q10 Quádricas Cilíndras

Se existem números reais positivos a, b e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual uma quádrica Ω pode ser descrita:

- pela equação reduzida:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

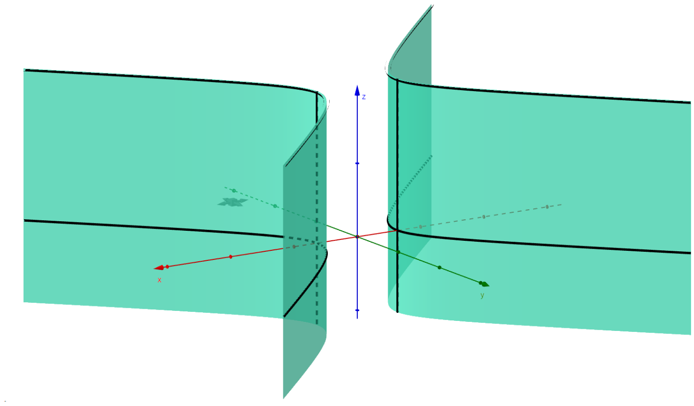
ela é chamada de **quádrica cilíndrica elíptica** ($a \neq b$) ou **quádrica cilíndrica circular/de rotação** ($a = b$) (**cilindro**).



- pela equação reduzida:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

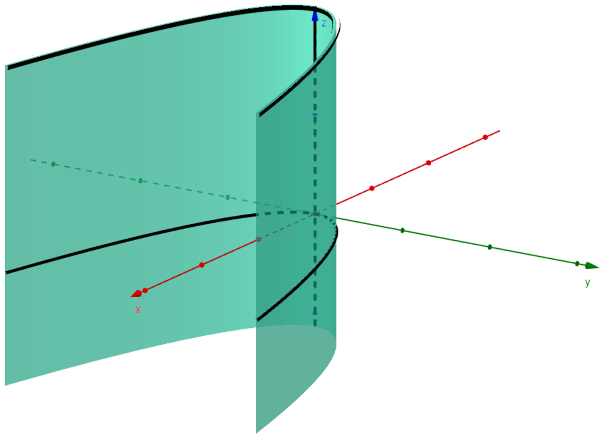
ela é chamada de **quádrica cilíndrica hiperbólica**.



- pela equação reduzida:

$$\Omega : y^2 = ax,$$

ela é chamada de **quádrica cilíndrica parabólica**.



(Geogebra-cilindro parabólico)

Exemplo Q10.1. Ver Exercícios 83 e 84 em Slide de Exercícios.

Q11 Tabela de equações reduzidas das principais quádricas

Elipsóide ou esfera	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperbolóide de uma folha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Hiperbolóide de duas folhas	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Parabolóide (elíptico ou circular)	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
Parabolóide hiperbólico (sela)	$z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
Quádrica cônica (cone elíptico ou circular/de rotação)	$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2};\ x^2=\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2};\ y^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$
Quádrica cilíndrica[49] (cilindro elíptico ou circular/de rotação)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$
Quádrica cilíndrica hiperbólica[5] (cilindro hiperbólico)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1;\ \frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$ $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1;\ -\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$
Quádrica cilíndrica parabólica[5] (cilindro parabólico)	$y^2=ax;\ x^2=ay$ $y^2=az;\ z^2=ay;\ z^2=ax;\ x^2=az$

[5] Superfícies no espaço!! Não confunda com as cônicas (elipse, hipérbole, parábola) que possuem equações equivalentes mas são curvas no plano!!

Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

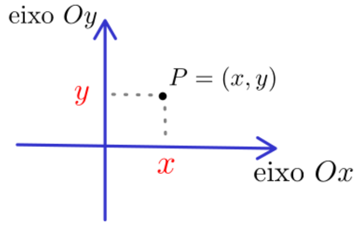
Um sistema de coordenadas permite localizar a posição de um ponto no plano ou no espaço.

Objetivo

Definir as coordenadas polares de um ponto no plano, as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas de um ponto do espaço.

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal e dado um ponto, determinar as relações entre as coordenadas polares/cilíndricas/esféricas e as coordenadas do s.c.o..

- $\Sigma = (O, B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ sistema de coordenadas ortogonal
  - Σ é chamado **sistema de coordenadas cartesiano**
  - $P = (x, y)_\Sigma \in E^2 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y)_B$
  - x e y são as **coordenadas cartesianas** de P



Podemos localizar a posição de um ponto no plano através de outras coordenadas.

C1 Coordenadas polares (no plano)

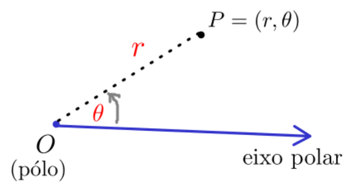
veja aqui: Math Insight

FIXE UM PONTO $\mathcal{O}$ E UMA SEMI-RETA ORIENTADA r NO PLANO.

- $\mathcal{O}$ é chamado de **pólo**
- r é chamada de **eixo polar**

As **coordenadas polares** de $P \in E^2$ são $(\mathbf{r}, \theta)$ onde:

- $r := d(\mathcal{O}, P) = ||\overrightarrow{\mathcal{O}P}||$
- θ é o ângulo entre o eixo polar e a semi-reta $\mathcal{O}P$, medido no sentido anti-horário;



- θ é chamado de **argumento** e r de **raio**

Nota:

1. Em geral considera-se a restrição $\theta \in [0, 2\pi)$ para que cada ponto do plano, exceto a origem, tenha uma única representação em coordenadas polares pois um mesmo ponto pode ser representado pelas coordenadas:

$$(r, \theta) \qquad \text{e} \qquad (r, \theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

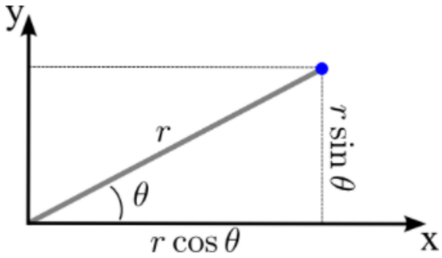
2. $\mathcal{O} = (0,0) = (0, \theta)$, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Para $r > 0$, $P = (-r, \theta) := (r, \theta + \pi)$

C1.1 Relação entre coordenadas cartesianas e polares

Escolhendo:

- $\mathcal{O} = O$
- eixo polar $= Ox$;
- $P = (x, y)_\Sigma = (r, \theta) \in E^2$



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Cálculo de r e θ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0,\ y > 0 \\ arctg(y/x) + 2\pi & para\ x > 0,\ y < 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

Note que $r \geq 0$ sempre! e consideraremos $\theta \in [0, 2\pi)$.

Exemplo C1.1. Ver Exercícios 85 e 86 em Slide de Exercícios.

C2 Coordenadas cilíndricas (no espaço)

veja aqui: Math Insight

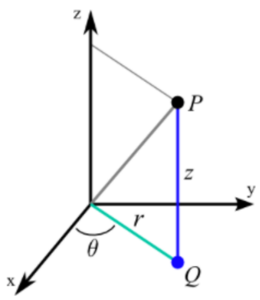
- $\Sigma = (O, B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa}))$ sistema de coordenadas ortogonal
  - Σ é chamado **sistema de coordenadas cartesiano** de E^3
  - $P = (x, y, z)_\Sigma \in E^3 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_B$
  - x, y e z são as **coordenadas cartesianas** de P

As **coordenadas cilíndricas** de $P \in E^3$ são (r, θ, τ) onde

- (r, θ) são as coordenadas polares da projeção ortogonal de P no plano polar;
- $\tau \in \mathbb{R}$

C2.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as cilíndricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (r, \theta, \tau) \in E^3$



$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = \tau \end{cases}$$

$$r \geq 0, \; \theta \in [0, 2\pi), \; \tau \in \mathbb{R}.$$

Cálculo de r, θ e τ:

$$\tau = z, \qquad r \text{ e } \theta \text{ como antes.}$$

Exemplo C2.1. Ver Exercício 87 em Slide de Exercícios.

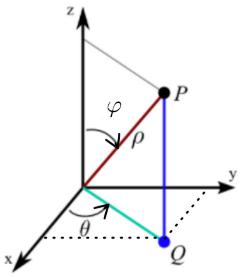
C3 Coordenadas esféricas (polares no espaço)

veja: Math Insight

- As **coordenadas esféricas** de $P \in E^3$ são (ρ, θ, φ) onde
  - θ é o argumento da projeção ortogonal de P no plano polar;
  - $\rho = d(O, P)$;
  - φ é o ângulo entre o eixo z e a reta OP.

C3.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as esféricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (\rho, \theta, \varphi) \in E^3$



$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\rho \geq 0, \ \theta \in [0, 2\pi), \ \varphi \in [0, \pi].$$

Cálculo de ρ, θ e φ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \theta \text{ como antes},$$

$$\varphi = arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

Exemplo C3.1. Ver Exercício 88 em Slide de Exercícios.

Exercícios

Este slide contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[50]

E1 Vetores

1. Verifique que $\vec{u} + \vec{x} = \vec{u} + \vec{y} \Longrightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

2. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, mostre que $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ possui comprimento 1.

3. Mostre que se $\alpha \neq 0$, então $\alpha\vec{v} = \vec{w} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w}$.

4. Conhecendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ que satisfazem:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} & = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} & = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

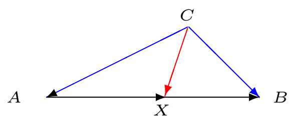
   Resp.: $\vec{x} = \frac{1}{7}(5\vec{u} + 2\vec{v})$, $\vec{y} = \frac{1}{7}(\vec{u} - \vec{v})$

5. Justifique as propriedades A2-A4 de adicção de vetores, M1, D1 e D2 de multiplicação de vetor por escalar. (tarefa!)

6. Se $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, mostre que $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

7. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

8. Considere o triângulo ABC como na figura e seja X como na figura. Suponha que $\overrightarrow{AX} = m \cdot \overrightarrow{XB}$, com $m > 0$. Escreva o vetor $\overrightarrow{CX}$ em função dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$. (tarefa! Sugestão: encontre 2 equações que relacionem de alguma forma os vetores que aparecem na figura e resolva o sistema)
   Resp.: $\overrightarrow{CX} = \frac{1}{m+1}\overrightarrow{CA} + \frac{m}{m+1}\overrightarrow{CB}$.



9. Sejam $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ vetores em V^n. Suponha que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos. Mostre que existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

[50] Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

E2 Dependência Linear

10. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$. Mostre que os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD, onde

$$\begin{array}{rcl} \vec{a} & = & \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} \\ \vec{b} & = & 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} \\ \vec{c} & = & 7\vec{v} - 3\vec{w}. \end{array}$$

11. Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são LI, então $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$ são LI.

E3 Base

12. Verifique se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dados são LD ou LI.

    (a) $\vec{u} = (0, 1, 0)_E$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)_E$

    (b) $\vec{u} = (1, -3, 14)_E$ e $\vec{v} = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)_E$

    Resp.: (a) LI (b) LD

13. Determine m e n de modo que os vetores

$$\vec{u} = (1, m, n+1)_E, \qquad \vec{v} = (m, n, 10)_E$$

    sejam LD.
    Resp.: $m = 2, n = 4$

14. Verifique se $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$, $\vec{v} = (-3, 4, 1)_E$ e $\vec{w} = (1, 0, 9)_E$ são LI ou LD.
    Resp.: são LD

15. Determine se existe m tal que os vetores

$$\vec{u} = (m, 1, 1+m)_E, \quad \vec{v} = (1, 2, m)_E, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)_E$$

    sejam LD.
    Resp.: $\nexists m \in \mathbb{R}$ tal que os vetores sejam LD. Portanto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI e portanto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base de V^3 para qualquer $m \in \mathbb{R}$.

16. Seja $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e considere os vetores

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

    (a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é base de V^3.

    (b) Calcule as coordenadas do vetor $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$ na base F.

    Resp.: (b) $\vec{u} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3})_F$

E3.1 Mudança de base

17. Dada uma base qualquer E de V^3, mostre que $M_{EE} = Id$.

18. Determine a, b, c sabendo que $(1,1,2)_E = (2,1,0)_F$ e que

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Resp.: $a = \frac{3}{2}, b = -1$ e $c = -\frac{1}{2}$

19. Considere as bases $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ onde

$$\vec{f}_1 = (-3,1,1)_E, \quad \vec{f}_2 = (1,-2,1)_E, \quad \vec{f}_3 = (1,2,0)_E.$$

   (a) Determine as coordenadas de $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ na base F.
   (b) Escreva a matriz de mudança da base E para F.
   (c) Quais são as coordenadas do vetor $\vec{u} = (-4, 1, , -1)_F$ na base E?

Resp.: (a) $\vec{f}_1 = (1,0,0)_F, \vec{f}_2 = (0,1,0)_F, \vec{f}_3 = (0,0,1)_F$; (b) $M_{EF} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
(c) $\vec{u} = (12, -8, -3)_E$

20. Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base de V^3 e $F = (\vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u})$.

   (a) Mostre que F é base de V^3.
   (b) Calcule as coordenadas de $\vec{x} = \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$ na base F.

Resp.: (b) $(2, -3, 6)_F$.

PS: Em geral, se usarmos $(\vec{x})_E = (M_{EF})(\vec{x})_F$ para obtermos as coordenadas de $\vec{x}$ na base F é necessário resolver um sistema! Se usarmos $(\vec{x})_F = (M_{EF})^{-1}(\vec{x})_E$ não precisamos resolver sistema (lembrando que $(M_{EF})^{-1} = M_{FE}$)!

E4 Produto escalar, base ortonormal

21. Sejam $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3 e

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3.$$

   (a) Mostre que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ é uma base de V^3.
   F é ortonormal?

(b) Sejam $\vec{u} = (1,0,0)_F$ e $\vec{v} = (0,1,0)_F$. Calcule $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Resp.: (a) F não é ortonormal; (b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$

22. Seja E uma base ortonormal de V^3. Calcule $ang(\vec{u},\vec{v})$, quando:

(a) $\vec{u} = (1,0,1)_E$ e $\vec{v} = (-2,10,2)_E$

(b) $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)_E$ e $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})_E$

Resp.: (a) $\theta = \frac{\pi}{2}$; (a) $\theta = \frac{\pi}{6}$

23. Seja E uma base ortonormal de V^3. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais aos vetores $\vec{u} = (2,3,-1)_E$ e $\vec{v} = (2,-4,6)_E$.
Resp.: $\vec{x} = (-3,3,3)_E$ ou $\vec{x} = (3,-3,-3)_E$

24. Verifique que se n vetores são dois a dois ortogonais, então eles são LI. (Tarefa!)

25. Sejam $\vec{w}$ um vetor não nulo e T o conjunto dos vetores em V^3 que são ortogonais a $\vec{w}$. prove que:

(a) $\vec{w} \notin T$;

(b) Qualquer combinação linear de vetores em T pertence a T;

(c) Se $\vec{u},\vec{v} \in T$ são LI, então $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI;

(d) Três vetores quaisquer de T são LD;

(e) Se $\vec{u},\vec{v} \in T$ são LI, então $\vec{u},\vec{v}$ geram T, isto é, todo vetor de T é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. T é chamado **plano ortogonal** a $\vec{w}$.

E4.1 Projeção ortogonal e ortonormalização de Gram-Schimidt

26. Seja E uma base ortonormal.

(a) Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v} = (1,-1,2)_E$ sobre $\vec{u} = (3,-1,1)_E$.

(b) Decomponha $\vec{v} = (-1,-3,2)_E$ como soma de dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ de modo que $\vec{p}$ seja paralelo a $\vec{u} = (0,1,3)_E$ e $\vec{q} \perp \vec{u}$.

Resp.: (a) $proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{6}{11}(3,-1,1)_E$
(b) $\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{3}{10}(0,1,3)_E$ e $\vec{q} = (-1,-\frac{33}{10},\frac{11}{10})_E$

27. Sejam, em relação a uma base ortonormal,

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1), \quad \vec{a} = (3,-2,-1).$$

(a) Prove que $F = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é uma base ortonormal.

(b) Calcule as coordenadas de $\vec{a}$ na base F.

Resp.: (b) $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{-3}{\sqrt{2}},\frac{7}{\sqrt{6}})_F$

28. Descreva os vetores $\vec{x}$ tais que $\vec{x}\cdot(\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{\kappa})=0$, onde $B=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$ é uma base ortonormal.
Resp.: $\vec{x}$ é gerado pelos vetores $\vec{\imath}+\vec{\kappa}$ e $\vec{\jmath}+\vec{\kappa}$ e pertence ao plano ortogonal ao vetor $\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{\kappa}$.

29. (tarefa!) Sejam E uma base ortonormal e $E_1=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ uma base, onde

$$\vec{e}_1=(1,2,2)_E, \quad \vec{e}_2=(1,0,1)_E, \quad \vec{e}_3=(1,1,1)_E.$$

(a) Aplique o processo de Gram-Schimidt para obter uma base ortonormal $B=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{\kappa})$ a partir de E_1;

(b) Sabendo que $\vec{u}=(0,1,1)_{E_1}$ determine:

i. as coordenadas de $\vec{u}$ na base B.

ii. $\|\vec{u}\|$;

iii. poderia ter encontrado $\|\vec{u}\|$ sem resolver o item (i)?

Resp.: (a) $\vec{\imath}=\frac{1}{3}(1,2,2)_E, \vec{\jmath}=\frac{1}{3}(2,-2,1)_E, \vec{\kappa}=\frac{1}{3}(2,1,-2)_E$
(b) (i) $\vec{u}=(\frac{8}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})_B$; (ii) $\|\vec{u}\|=3$; (iii) sim, encontrando as coordenadas de $\vec{u}$ na base E, $\vec{u}=(2,1,2)_E$, e com os dados do exercício de nenhuma outra forma!

30. Determine se as matrizes são ortogonais e no caso afirmativo determine sua inversa.

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

Resp.: (a) M não é ortogonal; (b) M é ortogonal, $M^{-1} = M^t$

E5 Orientação, Produto Vetorial, Produto Misto

31. Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva.

(a) Sejam $\vec{u} = (1,2,3)_E$ e $\vec{v} = (-1,1,2)_E$. Calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

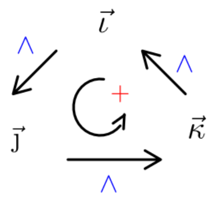
(b) Calcule $(2\vec{\kappa} - \vec{\imath} + 5\vec{\jmath}) \wedge (3\vec{\imath} - 2\vec{\kappa} + \vec{\jmath})$

(c) Encontre um vetor ortogonal a $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{\kappa}$ e $\vec{v} = -\vec{\jmath} + \vec{\kappa}$.

(d) Mostre que

$$\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{\kappa}, \quad \vec{\jmath} \wedge \vec{\kappa} = \vec{\imath}, \quad \vec{\kappa} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$
$$\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{\kappa}, \quad \vec{\kappa} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}, \quad \vec{\imath} \wedge \vec{\kappa} = -\vec{\jmath}.$$

Resp.: (a) $(1,-5,3)_E$; (b) $(-12,2,-16)_E$; (c) $(0,-1,-1)_E$;
(d)



32. Sejam B uma base ortonormal ~~positiva~~,

$$\vec{u} = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_B, \quad \vec{v} = (6,-2,4)_B, \quad \vec{w} = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)_B.$$

Calcule:

(a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$;

(b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$; (tarefa!)

(c) usando os itens (a) e (b): $\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$;

(d) usando os itens (a) e (b): $\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u})$;

Resp.: (a) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \frac{1}{7}(-17,22,-9)_B$; (b) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -\frac{1}{7}(20,25,39)_B$; (c) $\vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\frac{1}{7}(-17,22,-9)_B$; (d) $\vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \frac{1}{7}(3,47,30)_B$

Para os exercícios de 33 a 36, considere $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de V^3.

33. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$ sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)_{\mathcal{B}}$.
Resp.: $Area = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{27}$

34. Calcule a área do triângulo ABC sendo $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)_{\mathcal{B}}$.
Resp.: $Area = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{19}/2$

35. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)_{\mathcal{B}}$. Obtenha uma base ortonormal positiva $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

- $\vec{a}$ e $\vec{u}$ tenham a mesma direção e sentido;
- $\vec{b}$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp.: $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 0, 2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)_{\mathcal{B}}$. De fato, pelo Corolário OPv2.8, a base E é positiva.

36. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)_{\mathcal{B}}$. Obtenha uma base ortonormal $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tal que

- $\vec{a}$ seja combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- $\vec{c}$ e $\vec{v}$ tenham a mesma direção e sentido.

E é positiva?
Resp.: Escolhendo $\vec{a} = \frac{\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})}{\|\vec{v}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v})\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, -1)_{\mathcal{B}}$, $\vec{b} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{c} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2)_{\mathcal{B}}$, a base E é negativa.

E5.1 Produto misto

37. Sendo $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 6$, calcule $[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - 3\vec{w}]$.
Resp.: 12

38. Seja $E = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\kappa})$ uma base ortonormal positiva. Determine $x \in \mathbb{R}$ de modo que o volume do tetraedro determinado pelos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, x, 1)$ e $\vec{w} = (0, 1, -1)$ seja igual a $1u^3$.
Resp.: $x = 9$ ou $x = -3$

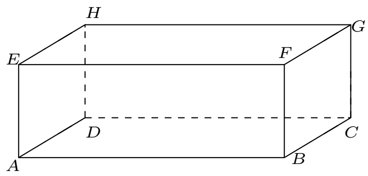
E6 Retas e Planos

E6.1 Sistema de coordenadas

39. Considere $ABCDEFGH$ um paralelepípedo como na figura abaixo e $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3.

   (a) Se $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$, encontre as coordenadas do ponto H no sistema $\Sigma = (F, \mathcal{B})$.

(b) Se $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AF}$, encontre as coordenadas do ponto H no sistema $\Sigma_1 = (A, \mathcal{B})$.



Resp.: (a) $H = (-1, 1, 0)_\Sigma$, (b) $H = (-2, 1, 1)_{\Sigma_1}$

E6.2 Retas

40. Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3 e considere os pontos $A = (1, 0, 2)$ e $B = (0, 1, 1)$.

(a) Encontre equações vetorial, paramétricas e simétricas para a reta r que passa pelos pontos A e B.

(b) O ponto $P = (1, 2, 3)$ pertence à reta r?

(c) Encontre os pontos de r que são da forma $Q = (x, 2, z)$ e $S = (3, y, z)$

Resp.: (a)
$r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, -1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$ OU $r : (x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(-1, 1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad r\colon \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$r\colon x - 1 = -y = z - 2;$ $\qquad r\colon -x = y - 1 = 1 - z;$

(b) $P \notin r$; (c) $Q = (-1, 2, 0)$; $S = (3, -2, 4)$.

E6.3 Planos

41. Seja $\Sigma = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal em E^3 e considere π o plano que contém os pontos $A = (1, 0, 1)_\Sigma$, $B = (2, 1, -1)_\Sigma$ e $C = (1, -1, 0)_\Sigma$.

(a) Encontre equações vetorial, paramétricas e geral para o plano π

(b) O ponto $P = (1, 2, 3)_\Sigma$ pertence ao plano π?

Resp.: (a) $\pi\colon (x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(0, -1, -1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\pi\colon \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda - \mu, \quad \lambda, \mu \in \\ z = -1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$

$\pi\colon 3x - y + z - 4 = 0$; (b) $P \in \pi$

42. Sejam um ponto O de E^3 e $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base ortonormal de V^3. Considere o sistema de coordenadas $\Sigma = (O, E)$. Obtenha **equações gerais dos planos coordenados**.
Resp.: $\pi_1 : z = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: **plano** Oxy); $\pi_2 : x = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_2, \vec{e}_3$: **plano** Oyz); $\pi_3 : y = 0$ (vetores diretores $\vec{e}_1, \vec{e}_3$: **plano** Oxz),

43. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$. (Tarefa!)
Resp.: $x + y - 1 = 0$

44. Considere o plano π_1 cujas equações paramétricas são

$$\pi_1 \colon \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Se π contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e é paralelo ao plano π_1, obtenha as equações paramétricas e uma equação geral do plano π.

Resp.: Eq. paramétricas: $\pi \colon \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ Eq. geral: $\pi : x - 2y - 3z + 7 = 0$

45. Encontre vetores diretores e uma equação vetorial do plano

$$\pi \colon 2x + 3y - 6z + 12 = 0.$$

Resp.: $\vec{u} = (0, 2, 1)$ e $\vec{v} = (3, 0, 1)$ são vetores diretores. Uma equação vetorial é $\pi : X = (0, 0, 2) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(3, 0, 1)$, $\lambda\mu \in \mathbb{R}$.

46. Descreva os pontos que pertencem à interseção dos planos

$$\pi_1 \colon 2x - y - z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 \colon x - y + 2z + 2 = 0.$$

Resp.: todos os pontos que pertencem à reta $r : (3, 5, 0) + \lambda(3, 5, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

E6.4 Posição relativa entre duas retas

Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

47. Verifique se as retas dadas na forma paramétrica

$$r \colon \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \qquad s \colon \begin{cases} x = 9 - 4\lambda \\ y = 2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

são concorrentes, paralelas ou reversas. Se concorrentes, encontre o ponto de intersecção.
Resp.: r e s são concorrentes; ponto de intersecção $P = (1, 4, -2)$

48. Considere as retas com equações vetorial $r\colon X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s\colon X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (a) Mostre que r e s são concorrentes.
    (b) Encontre as coordenadas do ponto de interseção entre elas.

    Resp.: (b) $P = (-1, -2, -4)$

E6.5 Posição relativa entre reta e plano

Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

49. Sejam $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ uma reta, π um plano de equação geral $x + y + z = 20$. Qual a posição relativa entre r e π? Se transversais, encontre o ponto de intersecção.
    Resp.: r e π são transversais e $P = (7, 3, 10)$ é o ponto de intersecção.

50. Estude a posição relativa da reta r e do plano π dados por (Tarefa!)

$$r\colon \frac{x-1}{2} = y = -z$$

e

$$\pi\colon (x, y\, z)_\Sigma = (3, 0, 1)_\Sigma + \lambda(1, 0, 1)_E + \mu(2, 2, 0)_E, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.: r e π são transversais e $P = (2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ é o ponto de intersecção.

E6.6 Posição relativa entre dois planos

Considere um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, B)$ de E^3, com B base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema Σ.

51. Determine a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : x - y + 2z = 0.$$

Descreva o conjunto dos pontos pertencentes à intersecção.
Resp.: π_1 e π_2 são transversais; o conjunto dos pontos da intersecção é uma reta cuja uma equação paramétrica é $r\colon \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 5\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

52. Encontre uma equação do plano π que contém o ponto $A = (2, 0, 0)$ e a reta de intersecção dos planos $\pi_1 : 3x - 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x + y + 4z - 2 = 0$.
Resp.: $\pi\colon y + 2z = 0$ (**Sugestão:** usar teoria de feixe de planos.)

E7 Perpendicularismo, medida angular, distância

Considere $\Sigma = (O, B)$ um sistema de coordenadas ortogonal com base positiva

E7.1 Perpendicularismo

53. Obtenha uma equação geral do plano π que contém o ponto $A = (1, 1, 2)$ e que é paralelo ao plano de equação geral $x - y + 2z + 1 = 0$.
Resp.: $x - y + 2z - 4 = 0$

54. Encontre equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (1, 0, -1)$ e é perpendicular à reta $s\colon X = (2, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Resp.: $r\colon \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$

E7.2 Medida angular

55. Obtenha equação da reta r que contenha o ponto $P = (1, 1, 1)$ e seja concorrente com

$$s : x = 2y = 2z,$$

sabendo que o cosseno da medida angular entre r e s é $1/\sqrt{3}$.
Resp.: $r_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$ e $r_2 : X = (1, 1, 1) + \lambda(-4, 1, 1)$

56. Calcule a medida angular entre os planos

$$\pi_1 : x + y + z = 0, \qquad \pi_2 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.: $\arccos(1/\sqrt{3})$

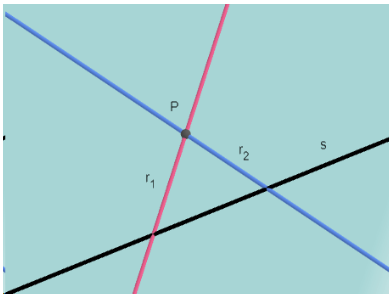
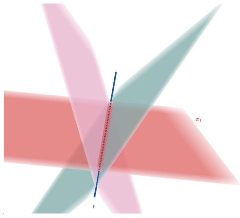


Figura 9: Geogebra

57. Encontre uma equação geral do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

e que forma um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ radianos com o plano $\pi_1 \colon x + 2y - 3z + 2 = 0$.
Resp.: $\pi : -3x + y + 2z + 4 = 0$ e $\pi : -2x + 3y - z + 5 = 0$

Geogebra 

E7.3 Distância

58. Sejam $A = (a, b, c)$ e $B = (m, n, p)$ pontos distintos. Verifique que o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam de A e B é um plano perpendicular ao segmento AB que contém o seu ponto médio. Esse plano é chamado **plano mediador** de AB.

59. Calcule a distância entre o ponto $P = (1, -1, 4)$ e a reta (tarefa)

$$r : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{1-z}{2}.$$

Resp.: $d(P, r) = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}}$

60. Calcule a distância do ponto $P = (9, 2, 2)$ ao plano (tarefa)

$$\pi : X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.: $d(P, \pi) = \frac{94}{13}$

61. Calcule a distância entre as retas

$$r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0.$$

Resp.: $d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{26}}$

62. Considere $A = (0, 2, 1)$ um ponto e a reta $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (tarefa)

    (a) Obtenha os pontos da reta r que distam $\sqrt{4}$ de A.

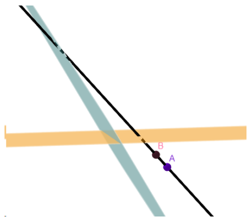
    (b) Obtenha os pontos da reta r que distam $\sqrt{3}$ de A.

    (c) $d(A, r)$ é maior, igual ou menor a $\sqrt{3}$? Por quê?

    Resp.: (a) $P = (1, 1, 0)$; (b) $d(A, r) = \sqrt{3}$, pois P é a projeção ortogonal de A a r

63. Sejam $\Sigma = (O, B)$ um sistema ortogonal de coordenadas onde B é uma base positiva. Obtenha os pontos da reta $r : x - y = 2y = z$ que equidistam de $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$. (tarefa)
    Resp.: $P = (0, 0, 0)$

64. Obtenha os pontos da reta $r : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, que equidistam dos planos $\pi_1 : x + 2y - z - 3 = 0$ e $\pi_2 : x - y + 2z = 1$. (tarefa)
    Resp.: $A = (-\frac{2}{3}.\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $B = (-\frac{2}{5}.\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

    Geogebra 

65. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 2, 1)$ e equidista dos pontos $C = (2, 3, 0)$ e $D = (0, 1, 2)$. (tarefa)
    Resp.: $\pi_1 : x + y - 2 = 0$ e $\pi_2 : z = 1$ (Wolfram Alpha resolve sistemas)

E8 Mudança de sistema de coordenadas, translação e rotação

66. Sejam $\Sigma_1 = (O_1, E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ e $\Sigma_2 = (O_2, F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$ dois sistemas de coordenadas com

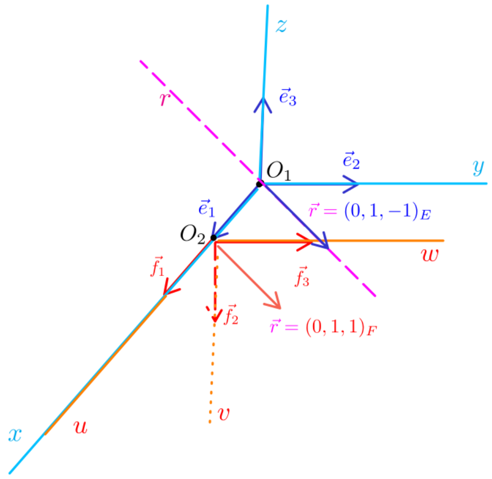
$$O_2 = (1, 0, 0)_{\Sigma_1}, \quad \vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = -\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_2.$$

    Obtenha, em relação a Σ_2,

    (a) uma equação vetorial da reta $r : [X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)]_{\Sigma_1}$.

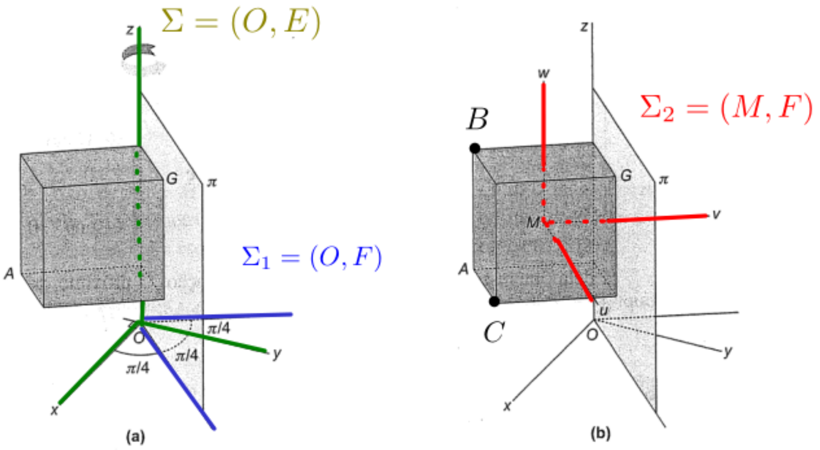
    (b) uma equação geral do plano $\pi : [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$.

Resp.: $r : [X = (-1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)]_{\Sigma_2}$ e $\pi : [2u - v - w + 2 = 0]_{\Sigma_2}$



(Na figura consideramos Σ_1 um s.c.o. com base positiva)

67. **Tarefa:** Um sistema de coordenadas ortogonal $\Sigma = (O, E)$ está fixado. Sabendo-se que (veja figura abaixo) um cubo tem uma face contida no plano $\pi : x - y = 0$, outras duas faces paralelas ao plano Oxy e que uma diagonal tem extremidades $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$ e $G = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$, aplique translação e rotação para determinar os outros seis vértices.



Fonte: Boulos, Geometria Analítica

Sugestão:

- Note que $\vec{n}_\pi = (1, -1, 0)$ e $\vec{n}_{planoOxz(y=0)} = (0, 1, 0)$. Assim,

$$\cos(ang(\pi, planoOxz(y = 0))) \overset{Eq.(\text{Pad2.3})}{=} \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{planoOxz(y=0)}|}{\|\vec{n}_\pi\| \|\vec{n}_{planoOxz(y=0)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- fazer rotação de Σ de $\pi/4$ radianos: $\Sigma_1 = (O, F)$
  - cada face do cubo é paralela aos planos coordenados de Σ_1
- $M = (\sqrt{2}, 0, 2)_{\Sigma_1}$ ponto médio de AG

- fazer translação de Σ_1 para M: $\Sigma_2 = (M, F)$
  - usando a relação (M1.1) (e lembre-se que $M_{FE} = M_{EF}^t$), encontre as coordenadas de A em relação a Σ_2: $A = (a, b, c)_{\Sigma_2}$;
  - o cubo é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem de Σ_2:

$$G = (-a, -b, -c)_{\Sigma_2}, \quad B = (a, b, -c)_{\Sigma_2}, \quad C = (a, -b, -c)_{\Sigma_2}, \ldots$$

Resp.: $a = b = c = -1$.

E9 Elipses, hipérboles e parábolas

E9.1 Elipse

68. Verifique que o centro e os focos da elipse não pertencem à elipse.

69. Se $\overline{PQ}$ é uma corda qualquer da elipse, então $d(P, Q) \leq 2a$.

70. Seja
$$4x^2 + 169y^2 = 676$$
uma equação de uma elipse (em relação a um sistema de coordenadas ortogonal). Calcule
    - a distância focal;
    - a medida do eixo maior;
    - a medida do eixo menor.

    Resp.: (a) $2\sqrt{165}$; (b) 26; (c) 4

E9.2 Hipérbole

71. (Tarefa!) Verifique que o centro e os focos da hipérbole não pertencem à hipérbole.

72. (Tarefa!) Se $\overline{PQ}$ é uma corda qualquer da hipérbole de modo que P e Q pertencem a ramos distintos, então $d(P, Q) \geq 2a$. A igualdade ocorre se, e somente se, P e Q são os vértices da hipérbole.

73. Considere a hipérbole
$$25x^2 - 144y^2 = 9.$$
    (a) Escreva as coordenadas dos vértices;
    (b) escreva as coordenadas dos focos;
    (c) obtenha as equações das assíntotas;

(d) faça um esboço da hipérbole.

Resp.: (a) $A_1 = (-3/5, 0)$, $A_2 = (3/5, 0)$; (b) $F_1 = (-13/20, 0)$, $F_1 = (13/20, 0)$; (c) $y = \pm 5x/12$

74. Considerando o s.c.o $\Sigma = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, classifique e desenhe as curvas cujas equações reduzidas são:

(a) $x^2 + 4y^2 = 4$
(b) $9x^2 + 4y^2 = 1$
(c) $x^2 - 4y^2 = 4$
(d) $9y^2 - x^2 = 9$
(e) $x = 2y^2$
(f) $y = 2x^2$
(g) $y = -\frac{1}{5}x^2$
(h) $x = -\frac{1}{3}y^2$

Resp.: (a) elipse com focos $(\pm\sqrt{3}, 0)$ no eixo-x; (b) elipse com focos $(0, \pm\sqrt{5}/6)$ no eixo-y; (c) hipérbole com focos $(\pm\sqrt{5}, 0)$ no eixo-x; (d) hipérbole com focos $(0, \pm\sqrt{10})$ no eixo-y; (e) parábola com foco $(1/8, 0)$ no eixo-x positivo e $d(F, r) = \frac{1}{4}$; (f) parábola com foco $(0, 1/8)$ no eixo-y positivo e $d(F, r) = \frac{1}{4}$; (g) parábola com foco $(0, -5/4)$ no eixo-y negativo e $d(F, r) = \frac{5}{2}$; (h) parábola com foco $(-3/4, 0)$ no eixo-x negativo e $d(F, r) = \frac{3}{2}$

E10 Cônicas

75. Determine se é possível transformar g em um polinômio $\tilde{g}$ livre dos termos lineares. No caso afirmativo, encontre $\tilde{g}$.

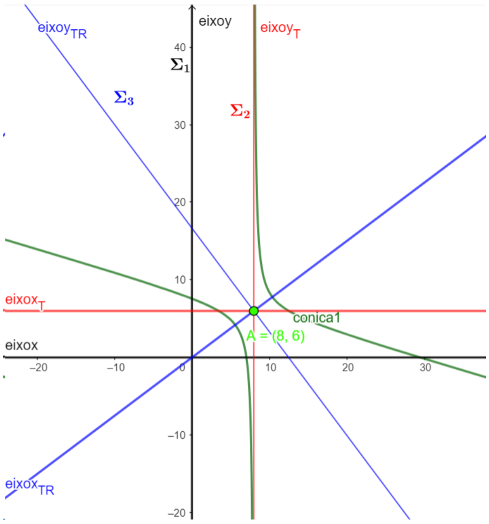
(a) $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 30y + 175$
(b) $g(x, y) = 7x^2 + 28xy + 28y^2 - 2x - 4y - 1$

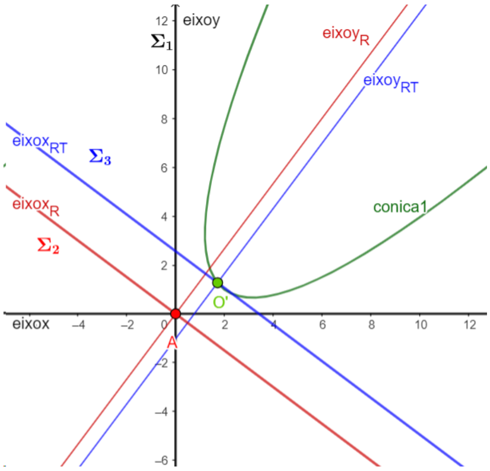
Resp.: (a) impossível;
(b) $\tilde{g}(u, v) = 7u^2 + 28uv + 28v^2 - \frac{8}{7}$.
Note que o valor do termo independente de $\tilde{g}$ não depende da escolha (h, k) feita, por exemplo:
$k = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{7} \Rightarrow g(h, k) = g(\frac{1}{7}, 0) = (-1)\underbrace{\frac{1}{7}}_{h} - 2\underbrace{0}_{k} - 1 = -\frac{8}{7}$
$h = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{7} \Rightarrow g(h, k) = g(1, -\frac{3}{7}) = (-1)\underbrace{1}_{h} - 2\underbrace{(-\frac{3}{7})}_{k} - 1 = -\frac{8}{7}$

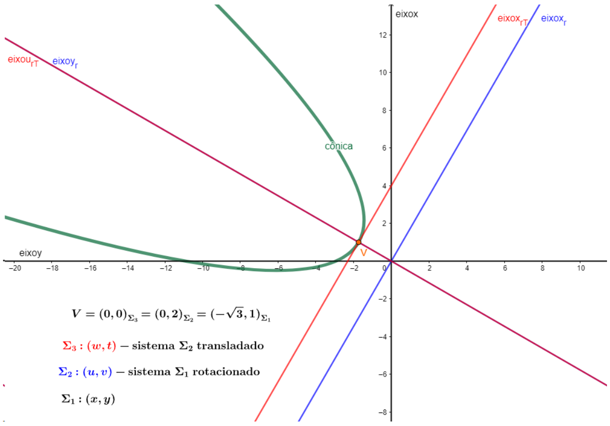
76. Identifique e esboce as cônicas:

(a) $g(x, y) = 7x^2 + 24xy - 256x - 192y + 1456 = 0$
(b) $g(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$ (ver p. 369-370, Boulos) (tarefa!)
(c) $g(x, y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$

Resp.: (a) hipérbole, (b) e (c) parábola (Geogebra-RT)

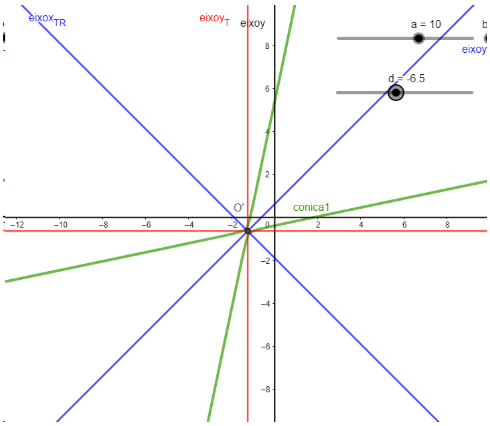
(a) 

(b) 

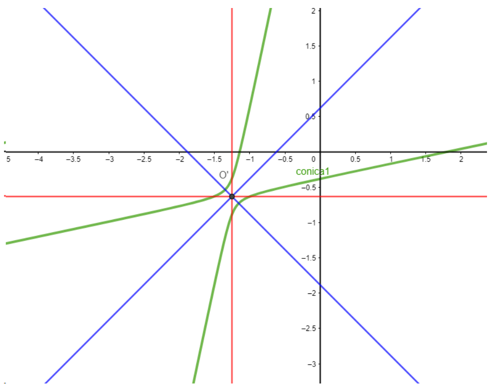
(c) 

Geogebra: cônica genérica

Cuidado: a cônica abaixo parece retas concorrentes...



mas é hipérbole!

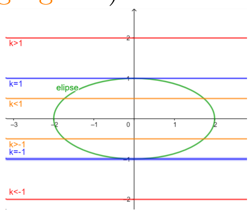


E10.1 Retas tangentes, secantes

77. Analise as posições relativas das retas $r : X = (x, y) = (0, k) + \lambda(m, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e da elipse

$$C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Resp.: para $k = 1$ ou $k = -1$, a reta r é tangente a C; para $|k| < 1$, a reta r é secante a C; para $|k| > 1$, a reta r não intercepta C (geogebra).



Geogebra: posição relativa de reta e elipse/hipérbole/parábola.

E11 Quádricas

E11.1 Esfera

78. Determine o conjunto que é descrito pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}x - 4y + 8 = 0.$$

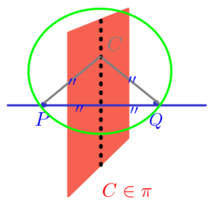
Resp.: conjunto vazio

79. Determine o centro C e o raio ρ da esfera de equação

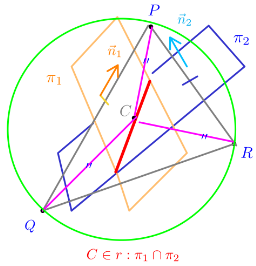
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 15 = 0.$$

Resp.: $C = (1, 2, 0)$ e $\rho = \sqrt{20}$

80. Quantas esferas passam, respectivamente, por 1, 2 (distintos) e 3 (não colineares) pontos?
Resp.:
por 1 ponto P: infinitas esferas: todos pontos do espaço distintos de P podem ser centro;
por 2 pontos $P \neq Q$: infinitas esferas: todos pontos do plano mediador de $\overline{PQ}$ podem ser centro;



por 3 pontos P, Q, R não colineares: infinitas esferas: todos pontos da reta de intersecção dos planos mediadores de $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ podem ser centro.



81. Considere $\Sigma = (O, B)$ um s.c.o.. fixado

   (a) Localize o ponto $A = (2, -1, 3)$ em relação à esfera
   $$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 7 = 0.$$

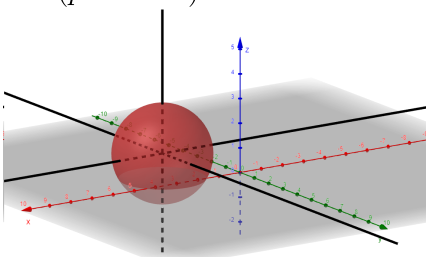
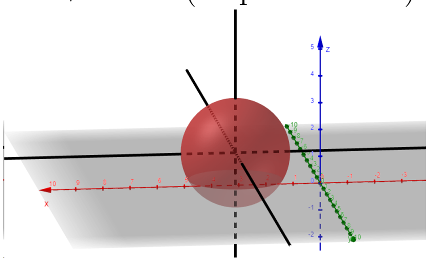
   (b) Faça uma translação de modo que no novo s.c.o. $\Sigma_1 = (O', B)$ o centro da esfera coincida com a origem do sistema: identifique a translação, a origem de Σ_1 e forneça a equação de S em Σ_1.
   Identifique as coordenadas do ponto de intersecção de S com um dos eixos coordenados de Σ_1 (forneça as coordenadas deste ponto nos dois sistemas).
   Qual é a intersecção de S com respeito a um dos planos coordenados de Σ_1?

Resp.: (a) A é exterior a S.

(b) $\begin{cases} x = u + 3 \\ y = v - 1; \\ z = w + 1 \end{cases} \qquad O' = (3, -1, 1)_\Sigma; \quad S : u^2 + v^2 + w^2 = 4$

$S \cap (eixo\ Ow)$ possui 2 pontos: $P_1 = (0, 0, 2)_{\Sigma_1} = (3, -1, 3)_\Sigma$ e $P_2 = (0, 0, -2)_{\Sigma_1} = (3, -1, -1)_\Sigma$

$S \cap (plano\ uv)$ é a circunferência $u^2 + v^2 = 4$ (no plano $w = 0$) de centro $(0, 0)_{\Sigma_1}$ e raio 2.



translação do s.c.o.

82. Obtenha uma equação geral do plano tangente π à esfera S no ponto T, onde
$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0, \qquad T = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \right).$$

Resp.: $\pi : 4x - y + z + 2 = 0$

E11.2 Elipsóide, hiperbolóides, parabolóides, cilindros

83. Identifique as seguintes quádricas (superfícies em E^3):

(a) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 20$

(b) $x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$

(c) $x^2 - y^2 + 4z^2 = -4$

(d) $z = x^2 + 4y^2$

(e) $16z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$

(f) $x^2 + 4y^2 = 4$

(g) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4 = 0$

(h) Para os itens (a), (b) e (d): identifique a curva de intersecção da quádrica com o plano $x = 1$ e determine os vértices e assíntotas de tais curvas (caso existam). Desenhe as curvas (suas projeções) no plano Oyz.

Resp.: (a) elipsóide; (b) hiperbolóide de 1 folha (eixo Oy é o eixo distinguido); (c) hiperbolóide de 2 folhas; (d) parabolóide elíptico; (e) cone elíptico; (f) cilindro elíptico; (h) parabolóide de 2 folhas (sugestão: complete quadrado e faça uma translação do sistema)

(h)-(a) elipse $\frac{y^2}{\frac{19}{4}} + \frac{z^2}{\frac{19}{5}} = 1$, vértices: $(1, 0, \pm\sqrt{\frac{19}{5}})$ e $(1, \pm\sqrt{\frac{19}{4}}, 0)$, não possui assíntota

(h)-(b) hipérbole $\frac{z^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{3} = 1$, vértices: $(1, 0, \pm\sqrt{\frac{4}{3}})$, assíntotas $z = \pm\frac{2}{3}y$

(h)-(d) parábola $z = 1 + 4y^2$, vértice: $(1, 0, 1)$, não possui assíntota.

84. Sejam $A = (0, 3, 0)$ e $B = (0, -3, 0)$ dois pontos de E^3. Obtenha uma equação geral do lugar geométrico dos pontos X de E^3 tais que (tarefa!)

$$d(X, A) - d(X, B) = m.$$

A equação acima é equivalente a

$$4m^2x^2 + (4m^2 - 144)y^2 + 4m^2z^2 + (36m^2 - m^4) = 0.$$

Identifique o lugar geométrico nos casos:

(a) $m = 2$ (b) $m = 6$ (c) $m = 10$

Resp.: (a) hiperbolóide de duas folhas; (b) reta (eixo Oy); (c) elipsóide

E12 Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

E12.1 Coordenadas polares

85. Escreva as coordenadas polares dos pontos dados em coordenadas cartesianas:

(a) $P = (0, 1)$

(b) $P = (2, 0)$

(c) $P = (0, -1)$

(d) $P = (-3, 0)$

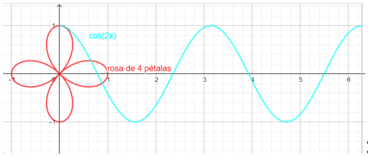
(e) $P = (1, 1)$

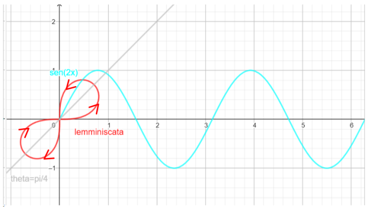
Resp.: (a) $P = (1, \pi/2)$; (b) $P = (2, 0)$; (c) $P = (1, \pi)$; (d) $P = (3, \pi)$; (e) $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$

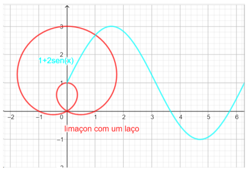
86. Descreva as curvas dadas pelas equações (para todos os itens, exceto (b), considere $\theta \in [0, 2\pi)$):

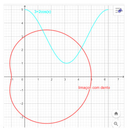
(a) $r = 4$
(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ $(r \geq 0)$
(c) $r \cos\theta = 2$
(d) $r = 2\cos\theta$
(e) $r = 1 - \sin\theta$
(f) $r = \cos 2\theta$ (tarefa!)
(g) $r^2 = \sin 2\theta$ (tarefa!)
(h) $r = 1 + 2\sin\theta$ (tarefa!)
(i) $r = 3 + 2\cos\theta$ (tarefa!)

Resp.:(86a) circunf. de centro (0,0) e raio 4; (86b) semi-reta; (86c) reta $x = 2$; (86d) circunf. centro (1,0) e raio 1; (86e) cardióide (Wikipédia);

(86f) rosa de 4 pétalas ;

(86g) lemminiscata; 

(86h) limaçon com um laço; 

(86i) limaçon com dente.  Figuras no Geogebra.

E12.2 Coordenadas cilíndricas

87. Descreva as superfícies dadas pelas equações:

(a) $r = 4$
(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$
(c) $\tau = 1$
(d) $r = 2\cos\theta$
(e) $\tau = r^2$
(f) $\tau = r$ (tarefa!)

Resp.: (a) cilindro de centro (0,0,0) e raio 2; (b) semiplano de ângulo $\pi/3$ com o plano coordenado Oxz; (c) plano paralelo ao plano coordenado Oxy (d) cilindro circular de centro $(1, 0, 0)$ e raio 1; (e) parabolóide; (f) cone (com $z > 0$)

E12.3 Coordenadas esféricas

88. Descreva as superfícies dadas pelas equações:

(a) $\rho = 4$

(b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (tarefa!)

(c) $\varphi = \frac{\pi}{4}$

(d) $\varphi = \frac{\pi}{2}$

(e) $\varphi = \frac{4\pi}{5}$

Resp.: (a) esfera de centro (0,0,0) e raio 4; (b) semiplano de ângulo $\pi/3$ com o plano coordenado Oxz; (d) cone (com $z > 0$); (e) plano Oxy; (f) cone (com $z < 0$)

Fim do curso! *Bons estudos!*

 *Boas Férias!* 

Cronograma das Aulas - 2024

Cronograma de 2024 (turmas Mecatrônica/Produção e Química).

Aula/Conteúdo:

Semana 5-7 de março 2024

1. (Slide 1) Apresentação do curso e Geometria Euclidiana. GA: Vetores: norma, direção, sentido
2. (Slide 1) O conjunto dos vetores V^n: Adição, multiplicação. Exercícios 1-8

Semana 12-14 de março 2024

3. (Slide 2) Dependência linear: motivação (Ex. 9), Prop. D2.3, definições, obs., Exercício 10. Prop. D2.6. Exercício 11. Prop. D2.8
4. (Slide 3) Base: coordenadas de vetor, dependência linear de 2 vetores. Exercícios 12-13. Dependência linear de 3 vetores. Exercícios 14-16

Semana 19-21 de março 2024

5. (Slide 3) Mudança de base. Exercícios 17-20.
6. (Slide 4) Produto escalar. Base ortonormal. Exercícios 21-23.

Semana 2-4 de abril 2024

7. (Slide 4) Exercício 25. Projeção ortogonal. Exercício 26. Ortonormalização de Gram-Schmidt. Exercício 27.
8. (Slide 4) Exercícios 28-30. (Slide 5) Orientação em V^3. Definição de produto vetorial.

Semana 9-11 de abril 2024

9. (Slide 5) Propriedades de produto vetorial. Exercício 31. Proposição OPv2.4
10. (Slide 5) Produto vetorial duplo: Proposição OPv2.5. Identidade de Jacobi. Exercícios 32-35. Produto misto.

Semana 16-18 de abril 2024

11. Exercícios 32-(c)-(d), 36, 37 e 38.
12. (Slide 6) Sistemas de coordenadas. Exercício 39. Retas: equações vetorial, paramétricas, simétricas. Exercício 40.

Semana 23-25 de abril 2024

13. (Slide 6) Planos: equações vetorial, paramétricas, geral. Exercícios 41-43.

14. (Slide 6) Exercícios 44-46. Posição relativa entre 2 retas. Exercícios 47-48.

    Semana 30 de abril - 2 de maio 2024

15. (Slide 6) Posição relativa entre reta e planos e entre dois planos. Feixe de planos paralelos a um plano. Feixe de planos que contém uma reta. Exercícios 49-52.

16. (Slide 7) Vetor normal. Exercícios 53-54. Ângulo entre retas. Exercício 55

    Semana 7-9 de maio 2024

17. P1

18. (Slide 7) Ângulo entre reta/plano e plano/plano. Exercícios 56-57. Distâncias.

    Semana 14-16 de maio 2024

19. Revisão da P1.

20. Exercício 61 (distância). (Slide 8) Mudança de sistema de coordenadas. Exercício 66. Translação.

    Semana 21-23 de maio 2024

21. (Slide 8) Rotação. (Slide 9) Elipse. Exercícios 68-69. Equação reduzida da elipse com focos no eixo Ox . Proposição Ehp2.3.

22. (Slide 9) Equação reduzida da elipse com focos no eixo Oy. Exercício 70. Hipérbole. Exercício 73. Parábola. Exercício 74.

    Semana 28-30 de maio 2024

23. (Slide 10) Cônicas: classificação. Eliminação do termo linear por translação. Exercício 75. Classificação através dos centros.

    Feriado.

    Semana 04-06 de junho 2024

24. (Slide 10) Eliminação do termo misto por rotação. Exercício 76.

25. (Slide 11) Retas tangente e secante. Exercício 77.
    (Slide 12) Quádricas: esfera. Exercícios 78-80. Proposição Q2.4.

    Semana 11-13 de junho 2024

26. (Slide 12) Posição relativa reta/plano e esfera. Exercícios 81 - 82.

27. (Slide 12) Quádricas: elipsóide, hiperbolóides, parabolóides, quádricas cilíndricas.

    Semana 18-20 de junho 2024

28. Exercício 83-84. (Slide 13) Coordenadas polares. Coordenadas cilíndricas e esféricas. Exercícios 85-87.

29. Dúvidas.

    Semana 25-27 de junho 2024

30. P2

31.

    Semana 2 de julho 2024

32. SUB