

ESTE MATERIAL É A JUNÇÃO DO SLIDES USADOS DURANTE AS AULAS DA PROF<sup>a</sup> PERON NO CURSO SMA300-GEOMETRIA ANALÍTICA, NO ICMC-USP, EM 2023.

## Conteúdo

<b>V.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>V.6</b>
V.1.1	Geometria Euclideana . . . . .	V.6
V.1.2	Geometria Analítica . . . . .	V.11
<b>V.2</b>	<b>Vetores</b>	<b>V.12</b>
V.2.1	Operações em $V^n$ ( $n = 2, 3$ ) . . . . .	V.17
V.2.1.1	Adição de vetores . . . . .	V.17
V.2.1.2	Multiplicação por escalar . . . . .	V.19
<b>V.3</b>	<b>Dependência Linear</b>	<b>V.20</b>
V.3.1	Motivação . . . . .	V.20
V.3.2	Dependência e independência linear (LD/LI) . . . . .	V.25
<b>V.4</b>	<b>Base</b>	<b>V.28</b>
V.4.1	Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas . . . . .	V.28
V.4.2	Mudança de base . . . . .	V.31
<b>V.5</b>	<b>Produto Escalar</b>	<b>V.34</b>
V.5.1	Ângulo entre dois vetores não nulos de $V^3$ . . . . .	V.35
V.5.2	Produto escalar . . . . .	V.38
<b>V.6</b>	<b>Base Ortonormal</b>	<b>V.40</b>
V.6.1	Projeção Ortogonal . . . . .	V.42
V.6.2	Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt . . . . .	V.44
<b>V.7</b>	<b>Produto Escalar</b>	<b>V.49</b>
V.7.1	Ângulo entre dois vetores não nulos de $V^3$ . . . . .	V.50
V.7.2	Produto escalar . . . . .	V.53
<b>V.8</b>	<b>Base Ortonormal</b>	<b>V.55</b>
V.8.1	Projeção Ortogonal . . . . .	V.57
V.8.2	Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt . . . . .	V.59
<b>V.9</b>	<b>Orientação em <math>V^3</math></b>	<b>V.65</b>
<b>V.10</b>	<b>Produto Vetorial</b>	<b>V.67</b>
V.10.1	Área de paralelogramo . . . . .	V.69
V.10.2	Propriedades de produto vetorial . . . . .	V.70
<b>V.11</b>	<b>Produto Misto</b>	<b>V.72</b>
V.11.1	Volume de paralelepípedo e tetraedro . . . . .	V.72

<b>V.12</b>	<b>Sistema de coordenadas</b>	<b>V.76</b>
V.12.1	Soma de ponto com vetor . . . . .	.V.78
<b>V.13</b>	<b>Retas</b>	<b>V.80</b>
V.13.1	Equação Vetorial . . . . .	.V.80
V.13.2	Equações paramétricas . . . . .	.V.81
V.13.3	Equações simétricas . . . . .	.V.81
<b>V.14</b>	<b>Plano</b>	<b>V.82</b>
V.14.1	Equação Vetorial . . . . .	.V.82
V.14.2	Equações paramétricas . . . . .	.V.83
V.14.3	Equação Geral . . . . .	.V.84
<b>V.15</b>	<b>Posição relativa entre retas e planos</b>	<b>V.86</b>
V.15.1	Posição relativa entre duas retas . . . . .	.V.86
V.15.2	Posição relativa entre retas e planos . . . . .	.V.88
V.15.3	Posição relativa entre dois planos . . . . .	.V.89
V.15.3.1	Equação de reta: forma planar . . . . .	.V.90
V.15.4	Feixe de planos paralelos a um plano $\pi$ . . . . .	.V.91
V.15.5	Feixe de planos que contém uma reta $r$ . . . . .	.V.92
<b>V.16</b>	<b>Ortogonalidade e perpendicularismo</b>	<b>V.95</b>
V.16.1	Vetor Normal . . . . .	.V.95
<b>V.17</b>	<b>Medida Angular</b>	<b>V.98</b>
V.17.1	Medida angular entre retas . . . . .	.V.98
V.17.2	Medida angular entre reta e plano . . . . .	V.100
V.17.3	Medida angular entre planos . . . . .	V.103
<b>V.18</b>	<b>Distância</b>	<b>V.104</b>
V.18.1	Entre dois pontos . . . . .	V.104
V.18.2	Entre um ponto e uma reta . . . . .	V.104
V.18.3	Entre um ponto e um plano . . . . .	V.106
V.18.4	Entre retas . . . . .	V.107
V.18.5	Entre reta e plano . . . . .	V.109
V.18.6	Entre planos . . . . .	V.110
<b>V.19</b>	<b>Mudança de Sistema de Coordenadas</b>	<b>V.113</b>
V.19.1	Origem e Base distintas . . . . .	V.114
V.19.2	Origens distintas: Translação . . . . .	V.116
V.19.3	Bases disitintas: Rotação . . . . .	V.117
<b>V.20</b>	<b>Ambiente</b>	<b>V.122</b>
<b>V.21</b>	<b>Elipse</b>	<b>V.124</b>
V.21.1	Equação da elipse . . . . .	V.125
V.21.1.1	Com focos no eixo $Ox$ . . . . .	V.125

V.21.1.2	Com focos no eixo $Oy$ . . . . .	V.128
V.21.2	Algumas propriedades de uma elipse . . . . .	V.129
<b>V.22</b>	<b>Hipérbole</b>	<b>V.130</b>
V.22.1	Equação da hipérbole . . . . .	V.131
V.22.1.1	Com focos no eixo $Ox$ . . . . .	V.131
V.22.1.2	Com focos no eixo $Oy$ . . . . .	V.132
V.22.2	Algumas propriedades de uma hipérbole . . . . .	V.133
<b>V.23</b>	<b>Parábola</b>	<b>V.135</b>
V.23.1	Equação da parábola . . . . .	V.136
V.23.1.1	Com foco no semi-eixo positivo de $Ox$ . . . . .	V.136
V.23.1.2	Com foco no semi-eixo positivo de $Oy$ . . . . .	V.137
V.23.2	Algumas propriedades de uma parábola . . . . .	V.138
<b>V.24</b>	<b>Seções Cônicas</b>	<b>V.140</b>
V.24.1	Cônicas . . . . .	V.141
V.24.1.1	Identificação de cônicas: translação e rotação . . . . .	V.143
V.24.1.2	Eliminação dos termos lineares por translação . . . . .	V.144
V.24.1.3	Eliminação do termo quadrático misto por rotação . . . . .	V.152
V.24.1.4	Fórmulas úteis: . . . . .	V.156
V.24.2	Retas secantes, tangentes e normais . . . . .	V.156
V.24.2.1	Elipse . . . . .	V.158
V.24.2.2	Hipérbole . . . . .	V.159
V.24.2.3	Parábola . . . . .	V.162
<b>V.25</b>	<b>Elipse, Hipérbole e Parábola</b>	<b>V.163</b>
<b>V.26</b>	<b>Cônicas: classificação</b>	<b>V.164</b>
<b>V.27</b>	<b>Identificação: uso de translação e rotação</b>	<b>V.166</b>
V.27.1	Eliminação dos termos lineares por translação . . . . .	V.167
V.27.2	Classificação das cônicas através do centro . . . . .	V.171
V.27.3	Eliminação do termo quadrático misto por rotação . . . . .	V.176
<b>V.28</b>	<b>Retas secantes, tangentes e normais</b>	<b>V.181</b>
V.28.1	Elipse . . . . .	V.183
V.28.2	Hipérbole . . . . .	V.184
V.28.3	Parábola . . . . .	V.187
<b>V.29</b>	<b>Retas secantes, tangentes e normais</b>	<b>V.188</b>
V.29.1	Elipse . . . . .	V.191
V.29.2	Hipérbole . . . . .	V.192
V.29.3	Parábola . . . . .	V.195
<b>V.30</b>	<b>Quádricas</b>	<b>V.197</b>

<b>V.31</b>	<b>Esfera</b>	<b>V.198</b>
V.31.1	Posição relativa de reta/plano e esfera . . . . .	V.200
V.31.1.1	Posição relativa e intersecção de reta e esfera . . . . .	V.200
V.31.1.2	Posição relativa e intersecção de plano e esfera . . . . .	V.203
<b>V.32</b>	<b>Elipsóide</b>	<b>V.206</b>
V.32.0.1	Intersecção de elipsóide e planos paralelos aos planos coordenados	V.207
<b>V.33</b>	<b>Hiperbolóide de uma folha</b>	<b>V.208</b>
V.33.0.1	Intersecção de hiperbolóide de uma folha e planos paralelos aos coordenados . . . . .	V.208
<b>V.34</b>	<b>Hiperbolóide de duas folhas</b>	<b>V.210</b>
<b>V.35</b>	<b>Cone</b>	<b>V.210</b>
<b>V.36</b>	<b>Parabolóide elíptico e circular</b>	<b>V.211</b>
<b>V.37</b>	<b>Parabolóide hiperbólico (sela)</b>	<b>V.212</b>
<b>V.38</b>	<b>Quádricas Cilíndras</b>	<b>V.212</b>
<b>V.39</b>	<b>Tabela de equações reduzidas das principais quádricas</b>	<b>V.214</b>
<b>V.40</b>	<b>Coordenadas polares (no plano)</b>	<b>V.216</b>
V.40.1	Relação entre coordenadas cartesianas e polares . . . . .	V.217
<b>V.41</b>	<b>Coordenadas cilíndricas (no espaço)</b>	<b>V.218</b>
V.41.1	Relação entre as coordenadas cartesianas e as cilíndricas . . . . .	V.218
<b>V.42</b>	<b>Coordenadas esféricas (polares no espaço)</b>	<b>V.219</b>
V.42.1	Relação entre as coordenadas cartesianas e as esféricas . . . . .	V.219
<b>V.43</b>	<b>Coordenadas polares (no plano)</b>	<b>V.221</b>
V.43.1	Relação entre coordenadas cartesianas e polares . . . . .	V.222
<b>V.44</b>	<b>Coordenadas cilíndricas (no espaço)</b>	<b>V.223</b>
V.44.1	Relação entre as coordenadas cartesianas e as cilíndricas . . . . .	V.223
<b>V.45</b>	<b>Coordenadas esféricas (polares no espaço)</b>	<b>V.224</b>
V.45.1	Relação entre as coordenadas cartesianas e as esféricas . . . . .	V.224
<b>V.46</b>	<b>Exercícios</b>	<b>V.225</b>
V.46.1	Vetores . . . . .	V.225
V.46.2	Dependência Linear . . . . .	V.226
V.46.3	Base . . . . .	V.226
V.46.4	Mudança de base . . . . .	V.227
V.46.5	Produto escalar . . . . .	V.228

V.46.6	Projeção ortogonal e ortonormalização de Gram-Schmidt . . . . .	V.228
V.46.7	Orientação, Produto Vetorial, Produto Misto . . . . .	V.230
V.46.8	Produto misto . . . . .	V.231
V.46.9	Retas e Planos . . . . .	V.231
V.46.10	Sistema de coordenadas . . . . .	V.231
V.46.11	Retas . . . . .	V.232
V.46.12	Planos . . . . .	V.232
V.46.13	Posição relativa entre duas retas . . . . .	V.233
V.46.14	Revisão para P1 . . . . .	V.234
V.46.15	Posição relativa entre reta e plano . . . . .	V.237
V.46.16	Posição relativa entre dois planos . . . . .	V.237
V.46.17	Perpendicularismo, medida angular, distância . . . . .	V.238
V.46.18	Perpendicularismo . . . . .	V.238
V.46.19	Medida angular . . . . .	V.238
V.46.20	Distância . . . . .	V.239
V.46.21	Mudança de sistema de coordenadas, translação e rotação . . . . .	V.240
V.46.22	Elipses, hipérbolas e parábolas . . . . .	V.241
V.46.23	Elipse . . . . .	V.241
V.46.24	Hipérbole . . . . .	V.241
V.46.25	Cônicas . . . . .	V.242
V.46.26	Retas tangentes, secantes . . . . .	V.244
V.46.27	Quádricas . . . . .	V.244
V.46.28	Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas . . . . .	V.245
V.46.29	Coordenadas polares . . . . .	V.245
V.46.30	Coordenadas cilíndricas . . . . .	V.246
V.46.31	Coordenadas esféricas . . . . .	V.246
V.46.32	Revisão para P2 . . . . .	V.247

## Objetivo<sup>1</sup>

Apresentar uma definição formal de **vetor** e propriedades pertinentes.

## V.1 Introdução

### V.1.1 Geometria Euclideana

Euclides de Alexandria (~ 330 a.c.):

- reconhecido como o primeiro a tentar abordar de uma maneira sistemática o estudo da Geometria Plana: escreveu o livro “**Elementos**”;
- assumiu 5 postulados (axiomas) que não são completos.

David Hilbert (1862-1943, [Hilbert’s foundations of geometry](#)):

- apresentou novo conjunto de axiomas para a geometria e organizou em cinco grupos:

- Axiomas de incidência (1–7)
- Axiomas de ordem (1–5)
- Axioma das paralelas (de Euclides)
- Axiomas de congruência (1–6)
- Axioma de Continuidade (de Archimedes)

---

COMO DEFINIR “PONTO”, “RETA” OU “PLANO”?

---

---

<sup>1</sup>Os slides são baseados no livro Geometria Analítica - Paulo Boulos

A geometria é baseada em:

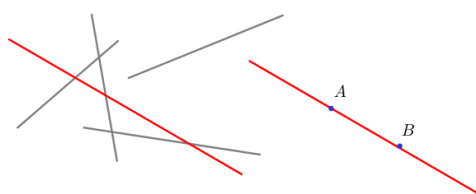
**Conceitos primitivos (ou termos indefinidos):** ponto, reta, plano, pertence a, entre, congruente.

**Axiomas:** um conjunto simples, completo e independente de postulados.

**Termos definidos e afirmações com demonstrações:** definição, lema, proposição, teorema, corolário.

**Exemplo V.1.1.**

**Axioma I1.** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

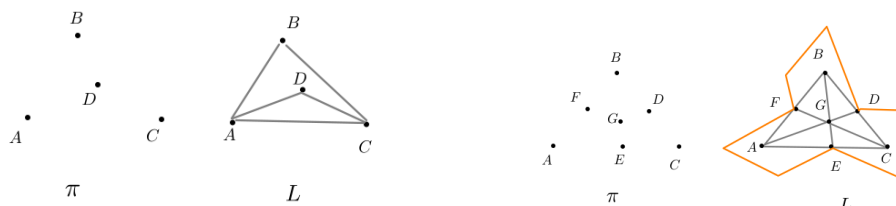


**Proposição.** Duas retas distintas se intersectam em no máximo um ponto.



**Exemplo V.1.2 (Modelos de planos e retas).** O conjunto  $\pi$  com as retas  $L$  satisfazem o Axioma 1:

1.  $\pi = \{A, B, C, D\}$  e  $L = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ .
2.  $\pi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  e  $L = \{AFB, BDC, CEA, AGD, BGE, CGF, DEF\}$ .



Dizemos que um conjunto de pontos é **colinear** (ou os **pontos são colineares**) se existe uma reta que contém o conjunto.

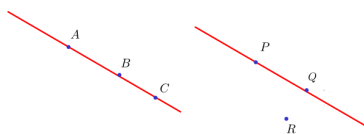
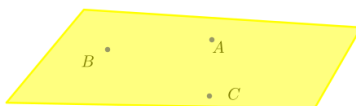


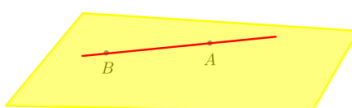
Figura 1:  $A, B, C$  são colineares,  $P, Q, R$  são não colineares

**Exemplo V.1.3.**

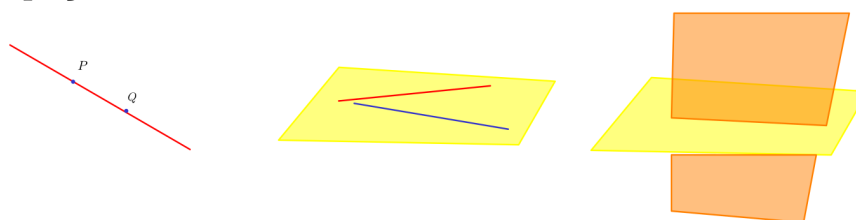
**Axioma I4.** Dados três pontos não colineares, existe um único plano que os contém.



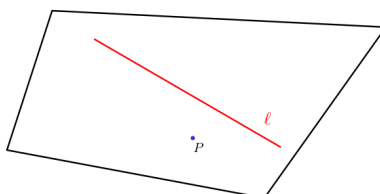
**Axioma I5.** Se dois pontos distintos pertencem a um plano  $\pi$ , então a única reta que os contém pertence a  $\pi$ .



**Axioma I7.** Em toda reta existem pelo menos dois pontos distintos, e em todo plano existem pelo menos duas retas distintas. Existem pelo menos dois planos distintos no espaço.



**Proposição.** *Sejam  $l$  uma reta e  $P$  um ponto que não pertence a  $l$  ( $P \notin l$ ). Então existe um único plano que contém  $P$  e  $l$ .*





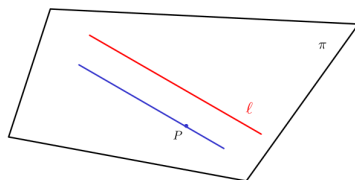
Dizemos que um conjunto de retas é **coplanar** (ou as **retas são coplanares**) se existe um plano que contém o conjunto.



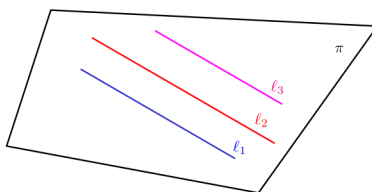
Figura 2: Fonte: internet

### Exemplo V.1.4. (Postulado 5 de Euclides<sup>2</sup>)

**Axioma das paralelas.** Seja  $l$  uma reta,  $P$  um ponto com  $P \notin l$  e  $\pi$  o único plano que os contém. Existe uma única reta em  $\pi$  que contém  $P$  e que é paralela a reta  $l$ .



**Proposição.** Sejam  $l_1, l_2, l_3$  três retas coplanares. Se  $l_1$  é paralela a  $l_2$  e  $l_2$  é paralela a  $l_3$ , então  $l_1$  é paralela a  $l_3$ .



**Nota:** Se o Axioma das paralelas é removido, constrói-se outras Geometrias (não Euclideana), por exemplo<sup>3</sup>:

- GEOMETRIA ESFÉRICA (onde não existem “retas” paralelas),
- GEOMETRIA HIPERBÓLICA (onde “retas” paralelas se interceptam).

<sup>2</sup>Matemáticos tentaram mostrar que este axioma podia ser deduzido a partir dos outros axiomas.

<sup>3</sup>Bolyai e Lobachevsky

**Exemplo V.1.5.**

**Axioma da continuidade**<sup>4</sup>. Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos e  $l$  a única reta que os contém. Existe uma régua sobre  $l$  tal que  $A$  corresponde ao número real 0 e  $B$  ao número 1.

Podemos identificar a reta (infinita)  $l$  com o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ :

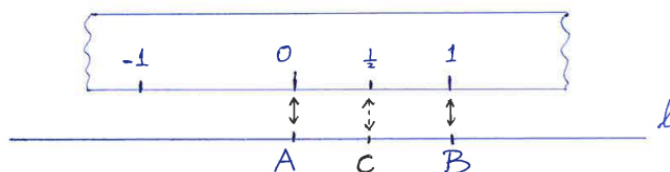


Figura 3: Notas de aula prof. Farid Tari:  $C$  é definido como o **ponto médio** de  $AB$ .  $l \approx \mathbb{R}$ .

Podemos identificar o plano Euclideo  $\mathcal{G}$  com  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .

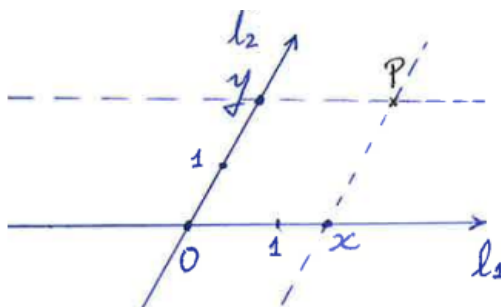


Figura 4: Notas de aula prof. Farid Tari: o ponto  $P$  está unicamente determinado pelo par  $(x, y)$ :  $\mathcal{G} \approx \mathbb{R}^2$

Dizemos que quatro pontos  $A, B, C, D$  formam um **paralelogramo**  $ABDC$  se as retas  $AB$  e  $CD$  são paralelas e as retas  $BD$  e  $AC$  são paralelas.



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

<sup>4</sup>Hilbert mostrou que pode-se construir a Geometria Euclidea sem usar esse axioma. Mas pode-se mostrar que usando os números reais obtém-se a mesma geometria

## V.1.2 Geometria Analítica

Podemos usar as operações algébricas dos números reais para fazer cálculos sobre objetos geométricos.

Por exemplo, uma reta poderá ser representada por uma equação algébrica: o conjunto dos pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem uma relação do tipo

$$y = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

A **Geometria Analítica** é o estudo de “objetos”:

*retas, planos, curvas, superfícies,*

ou no plano ou no espaço Euclideano usando a álgebra.

Neste curso vamos estudar:

1. Vetores
2. Retas e planos
3. Cônicas
4. Superfícies quádricas

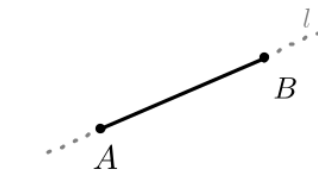
## V.2 Vetores

O **conjunto dos pontos no plano** será denotado por  $E^2$ .

O **conjunto dos pontos no espaço** será denotado por  $E^3$ .

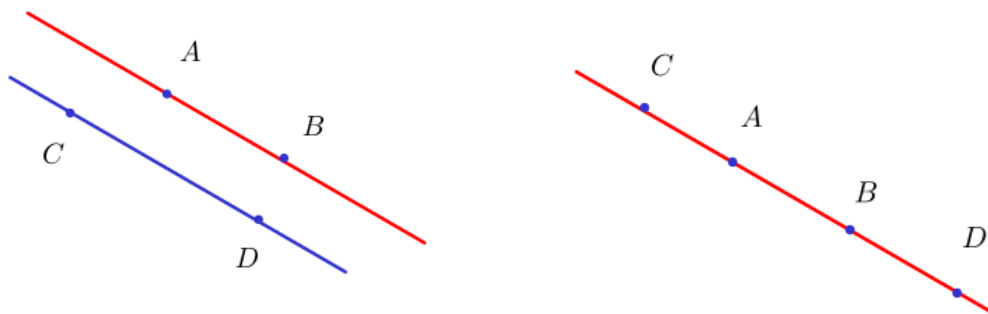
Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos em  $E^n$  ( $n = 2$  ou  $n = 3$ ).

Um **segmento orientado** da reta  $l$  será representado por  $\overline{AB}$ , onde  $A$  é a **origem** e  $B$  a **extremidade**,  $A, B \in l$ .



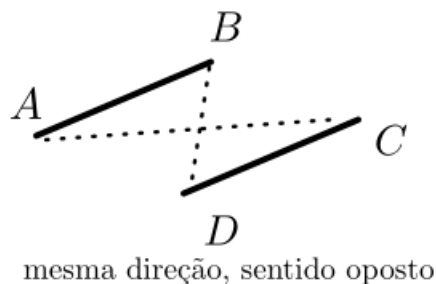
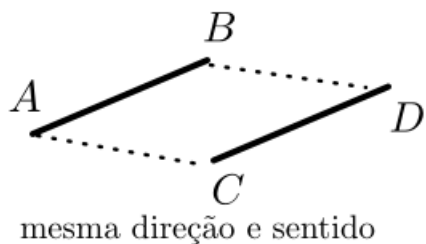
O **comprimento** de um segmento orientado  $\overline{AB}$  é a distância  $d(A, B)$  entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm **mesma direção** se as retas em que estão contidos (chamadas **retas suportes**) são paralelas (coplanares sem intersecção) ou coincidentes ( $A, B, C, D$  são colineares).



Se  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm a mesma direção e:

- as retas suportes de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são **paralelas**, dizemos que  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm **mesmo sentido** se os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  não se interceptam. Caso contrário os segmentos têm sentidos opostos.



- as retas suportes de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são **coincidentes**, então considere uma reta  $r$  paralela a reta que contém  $A, B, C, D$ , e tome  $A', B'$  pontos distintos em  $r$  tais que  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  têm mesmo sentido. Dizemos que  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm **mesmo sentido** se  $\overline{CD}$  e  $\overline{A'B'}$  têm mesmo sentido.

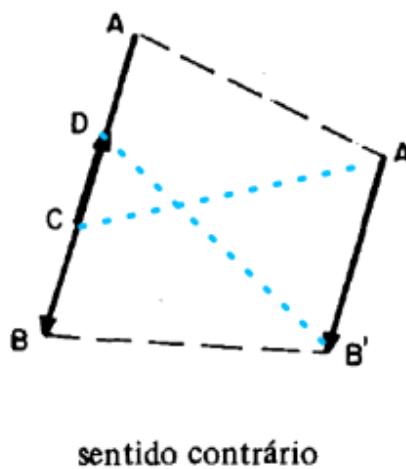
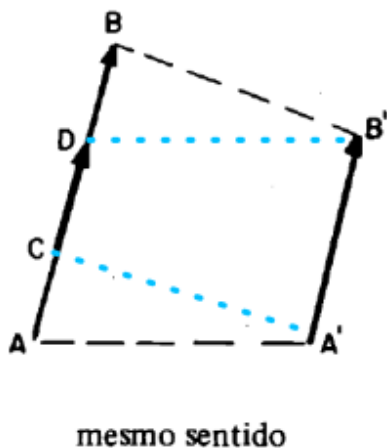


Figura 5: Fonte: Paulo Boulos

No conjunto dos segmentos orientados, defina a **relação de equivalência**<sup>5</sup>:

dois segmentos orientados  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são **equivalentes** (ou **equipolentes**), usualmente denotado por  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$  se:

- $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm o mesmo comprimento
- $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm mesma direção
- $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  têm mesmo sentido
- ou ambos são segmentos nulos, isto é,  $A = B$  e  $C = D$ .

**Definição V.2.1.** O **vetor**  $\vec{AB}$  é o conjunto dos segmentos orientados que são equivalentes ao segmento orientado  $\overline{AB}$ .

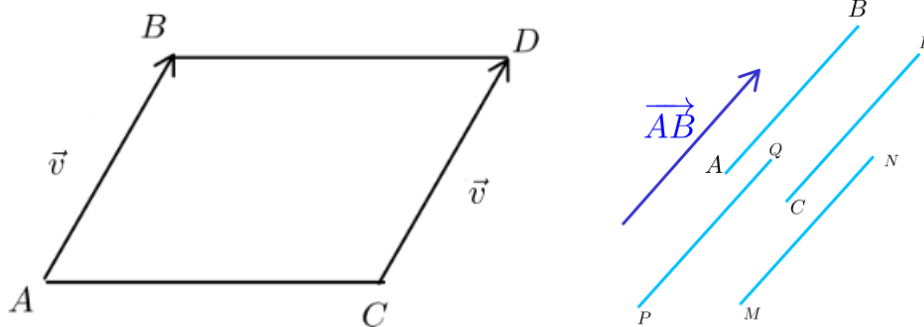
**Nota:**

1. Se  $ABDC$  é um paralelogramo, então

$$\vec{AB} \text{ e } \vec{CD}$$

representam o mesmo vetor  $\vec{v}$ .

Na verdade, existem infinitos segmentos orientados que representam o mesmo vetor, o que motiva a expressão “**um vetor é livre**”.



<sup>5</sup>é reflexiva ( $a \sim a$ ), simétrica ( $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ ) e transitiva ( $a \sim b$  e  $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ )

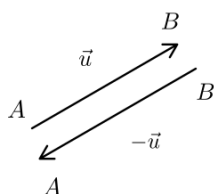
Dado um vetor  $\vec{u}$ :

- A **norma** ou o **módulo** ou **comprimento** de  $\vec{u}$  é o comprimento de qualquer um de seus representantes:

$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B);$$

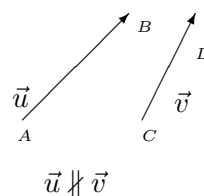
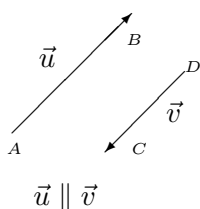
- a **direção** (resp. o **sentido**) de  $\vec{u}$  é a direção (resp. sentido) de qualquer um de seus representantes;

- $-\vec{u}$  é um vetor com mesmo módulo e direção de  $\vec{u}$  e sentido oposto de  $\vec{u}$ ;

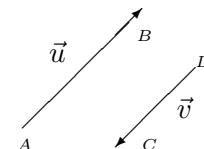
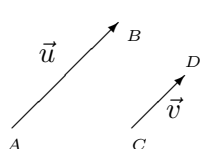


- o **vetor nulo**,  $\vec{0}$ , é o vetor representado por  $\overrightarrow{AA}$  para qualquer ponto  $A$  do espaço<sup>6</sup>.

- Dois vetores não nulos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  são **paralelos** se possuírem representantes com a mesma direção. Notação:  $\vec{u} \parallel \vec{v}$ .



- Dois vetores não nulos  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  paralelos possuem o **mesmo sentido** se possuírem representantes com o mesmo sentido. Caso contrário, dizemos que possuem **sentidos opostos**.



$\vec{u} \parallel \vec{v}$  com mesmo sentido

$\vec{u} \parallel \vec{v}$  com sentidos opostos

<sup>6</sup> $\|\vec{v}\| = 0$  se, e somente se,  $\vec{v} = \vec{0}$ .

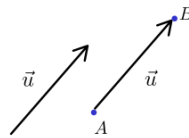
O **conjunto de todos os vetores em um plano** será denotado por  $V^2$ .

O **conjunto de todos os vetores no espaço** será denotado por  $V^3$ .

**Nota:** ( $n = 2$  ou  $n = 3$ )

1. Seja  $\vec{u} \in V^n$  e  $A$  um ponto de  $E^n$ . Então existe um único ponto  $B$  em  $E^n$  tal que

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}.$$



2. O vetor nulo  $\vec{0}$  é paralelo a qualquer outro vetor.

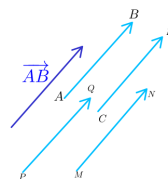
3. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores não nulos. Temos que

$$\vec{u} = \vec{v}$$

se, e somente se,

- $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos,
- $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  possuem o mesmo sentido,
- $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ .

$$\overline{AB} \sim \overline{CD} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$



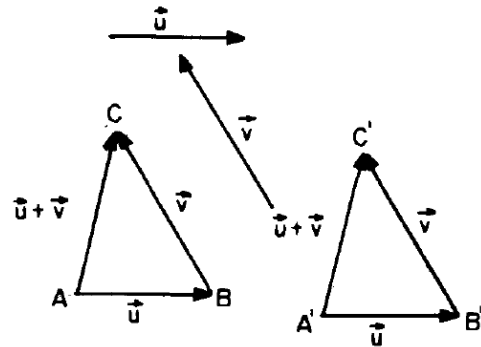


**V.2.1 Operações em  $V^n$  ( $n = 2, 3$ )**

**V.2.1.1 Adição de vetores**

**Definição V.2.2.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores representados, resp., por  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . O **vetor soma** denotado por  $\vec{u} + \vec{v}$  é o vetor representado por  $\overrightarrow{AC}$ .

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} := \overrightarrow{AC}.$$



Fonte: Boulos **Regra do triângulo**

**Exemplo V.2.3. (Regra do paralelogramo)** Se representamos os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  com a mesma origem:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ e } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \implies \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}.$$

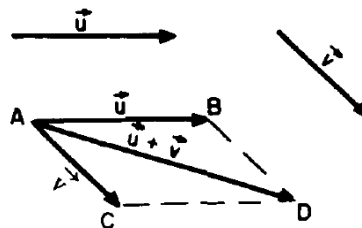
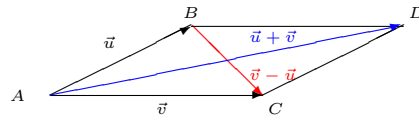


Figura 6: Fonte: Boulos

A **diferença**,  $\vec{v} - \vec{u}$ , é definida por

$$\vec{v} - \vec{u} := \vec{v} + (-\vec{u})$$

**Exemplo V.2.4.** Pela Regra do Paralelogramo,  $\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{BC}$ .



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

### Propriedades de adição de vetores

**Teorema.** *Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  vetores em  $V^n$ . Então*

**A1. Associativa:**

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w});$$

**A2. Comutativa:**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u};$$

**A3. Elemento Neutro:**

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u};$$

**A4. Elemento Oposto:** *para cada vetor  $\vec{u}$ , existe um vetor  $-\vec{u}$  tal que*

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}.$$

A adição de vetores tem as mesmas propriedades de adição de números reais, o que motiva usar o mesmo símbolo “+” para representar esta operação.

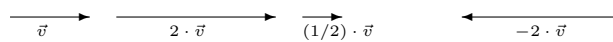
O conjunto  $V^n$  munido da adição “+”, ou seja  $(V^n, +)$ , é um **grupo abeliano (ou comutativo)** (Álgebra).

**Exemplo V.2.5.** Ver Exercício 1 em [Slide de Exercícios](#).

### V.2.1.2 Multiplicação por escalar

**Definição V.2.6.** Sejam  $\alpha$  um número real (um escalar) e  $\vec{u}$  um vetor em  $V^n$ .

1. Se  $\alpha = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$  então  $\alpha\vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} := \vec{0}$ .
2. Se  $\alpha \neq 0$  e  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , o vetor  $\alpha\vec{u}$  caracteriza-se por:
  - (a) (direção)  $\alpha\vec{u}$  é paralelo a  $\vec{u}$
  - (b) (sentido)  $\begin{cases} \text{se } \alpha > 0, \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm mesmo sentido} \\ \text{se } \alpha < 0, \alpha\vec{u} \text{ e } \vec{u} \text{ têm sentido oposto;} \end{cases}$
  - (c) (comprimento)  $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\|\vec{u}\|$ .



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

**Exemplo V.2.7.** Ver Exercício 2 em [Slide de Exercícios](#).

Usualmente  $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$  é chamado **versor** de  $\vec{v}$  e  $\vec{u}$  de **vetor unitário**.

### Propriedades de multiplicação de vetores por escalar

**Teorema.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  vetores em  $V^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então

**M1. Associativa:**

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u};$$

**M2. Elemento Neutro:**

$$1\vec{u} = \vec{u};$$

**D1. Distributiva:**

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u};$$

**D2. Distributiva:**

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

---

O conjunto  $V^n$  munido da adição “+”, e a multiplicação por escalar “.”, ou seja  $(V^n, +, \cdot)$ , é um exemplo de **espaço vetorial real** (Álgebra Linear).

---

**Corolário.** *Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores em  $V^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então*

1.  $\alpha\vec{u} = \beta\vec{v}$  com  $\alpha \neq 0 \implies \vec{u} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\vec{v}$

2.  $\alpha(-\vec{u}) = (-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u})$

3.  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \implies \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ .

---

**Exemplo V.2.8.** Ver Exercícios 3 a 8 em [Slide de Exercícios](#).

---

OS EXERCÍCIOS 7 E 8 EM [SLIDE DE EXERCÍCIOS](#) NOS INDUZEM A UM NOVO CONCEITO: O DE **DEPENDÊNCIA LINEAR**.

---

## Objetivo

Estudar quando dois ou três vetores são ou não **linearmente dependentes**, relacionando também tal conceito com o aspecto geométrico dos vetores.

## V.3 Dependência Linear

### V.3.1 Motivação

- **Caso dois vetores:**

Vimos no Exercício 8 (ver [Slide de Exercícios](#)) que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores em  $V^n$  ( $n = 2$  ou  $n = 3$ ) não nulos e **paralelos**, então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ , a saber:

- se têm o mesmo sentido:  $\lambda = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$  e portanto

$$\|\vec{v}\|\vec{u} - \|\vec{u}\|\vec{v} = \vec{0};$$

- se têm sentidos opostos:  $\lambda = -\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$  e portanto

$$\|\vec{v}\|\vec{u} + \|\vec{u}\|\vec{v} = \vec{0};$$

ou seja:

se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são não nulos e paralelos, então existem escalares  $\alpha$  e  $\beta$  ambos não nulos tais que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

**Nota:** Se  $\vec{u}$  e/ou  $\vec{v}$  é o vetor nulo (portanto paralelos), a equação  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$  também é válida (por exemplo,  $\vec{v} = \vec{0}$ :  $\alpha = 0, \beta = 1$ ).

**Proposição V.3.1.** *Dois vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$  são paralelos se, e somente se, existem escalares  $\alpha, \beta$  não ambos nulos tais que*

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}. \tag{V.3.1}$$

**Nota:**

1. Dois vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$  não são paralelos se, e somente se,

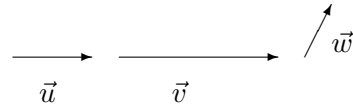
$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = 0.$$

2. A Equação (V.3.1) diz que os vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  *dependem* um do outro. Usualmente dois vetores paralelos são ditos (*linearmente dependentes*) e caso contrário (*linearmente independentes*) (ver Definição V.3.5).

3. Se  $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ , usualmente dizemos que  $\vec{x}$  é *combinação linear* de  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ .

**Exemplo V.3.2.** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos, então  $\vec{u}$  é combinação linear de  $\vec{v}$ .

**Exemplo V.3.3.** Considere os vetores:



- $\vec{v}$  é uma combinação linear de  $\vec{u}$ ?
- $\vec{u}$  é uma combinação linear de  $\vec{v}$ ?
- $\vec{w}$  é uma combinação linear de  $\vec{u}$ ?
- $\vec{w}$  é uma combinação linear de  $\vec{v}$ ?
- $\vec{v}$  é uma combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ ?

**Pergunta:** Dados três vetores não nulos em  $V^n$ , um deles é sempre combinação linear dos outros dois?

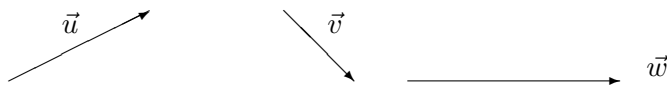


Figura: em  $V^2$  (lembrar Exercício 7 (ver [Slide de Exercícios](#)))

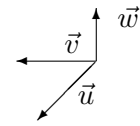


Figura: em  $V^3$

Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

- **Caso três vetores:**

Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  três vetores não nulos em  $V^n$ .

- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
- $\vec{u}, \vec{v}$  não paralelos
- $A, B, C$  determinam um único plano  $\mathcal{P}$  (Axioma I4)
- $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$  para algum ponto  $D$

Temos duas possibilidades:

- **Caso (i):  $D \in \mathcal{P}$**

Neste caso dizemos que  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  são **coplanares** (existem representantes dos vetores que são paralelos a um mesmo plano de  $V^n$ )

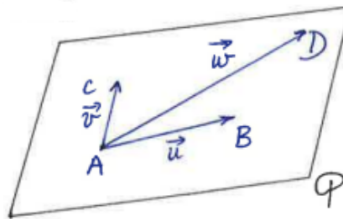


Figura 7: Fonte: Notas de aula Prof. Farid

- **Caso (ii):  $D \notin \mathcal{P}$**

Neste caso  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  não são coplanares.

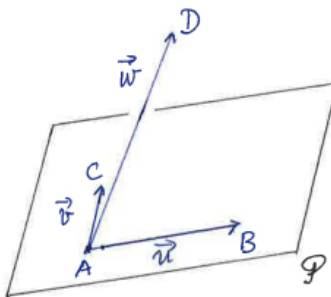


Figura 8: Fonte: Notas de aula Prof. Farid

Vamos estudar o Caso (i): o Caso (ii) será uma consequência do Caso (i).

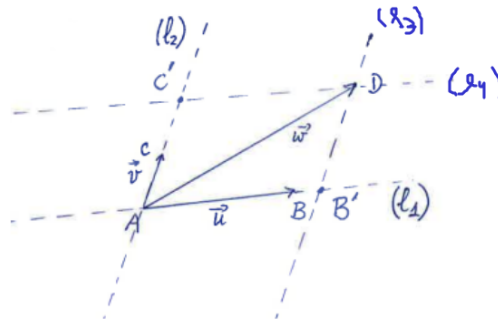


Figura 9:  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  coplanares  
 Fonte: Notas de aula Prof. Farid

- $l_1$ : única reta que contém  $A$  e  $B$
- $l_2$ : única reta que contém  $A$  e  $C$
- $l_3$ : única reta paralela a  $l_2$  passando por  $D$
- $B'$ :  $l_1 \cap l_3$
- $l_4$ : única reta paralela a  $l_1$  passando por  $D$
- $C'$ :  $l_2 \cap l_4$
- $AB'DC'$  é um paralelogramo
- $\exists! \alpha, \beta$  não ambos nulos tais que  $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$
- $\exists \alpha, \beta, \gamma$  não todos nulos tais que  $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = 0$ . (\*)
- $\vec{u}, \vec{w}$  ou  $\vec{v}, \vec{w}$  não são paralelos: mesmo raciocínio.
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  paralelos: (\*) também vale! (verifique!)

**Proposição V.3.4.** *Três vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$  são coplanares se, e somente se, existem escalares  $\alpha, \beta, \gamma$  não todos nulos tais que*

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}. \quad (\text{V.3.2})$$



**Nota:**

1. Três vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$  não são coplanares (**Caso (ii)**) se, e somente se,

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2.  $n = 2$ : Três vetores em  $V^2$  sempre são coplanares.

**V.3.2 Dependência e independência linear (LD/LI)**

**Definição V.3.5.** Dizemos que um vetor  $\vec{v} \in V^n$  é **combinação linear** dos (ou que é **gerado** pelos) vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V^n$  se

existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  tais que

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k.$$

Os escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  são chamados de **coeficientes** da combinação linear.

Os vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V^n$  são **linearmente dependentes**<sup>7</sup> (**LD**) se

existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  **não todos nulos** tais que

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

Os vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V^n$  são **linearmente independentes** (**LI**) se

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

<sup>7</sup>Ou que o conjunto  $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  é LD.

**Nota:**

1.  $\{\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$  é LD  $\iff \exists \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  não todos nulos;  $\alpha\vec{v} + \alpha_1\vec{v}_1 + \dots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$   
 $\iff$  um dos vetores é combinação linear dos outros.
2. Se um dos vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  é o vetor nulo, então  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  são LD.
3. (Proposição V.3.1) Dois vetores  $\vec{u}, \vec{v} \in V^n$  ( $n = 2$  ou  $n = 3$ ) são LD se e somente se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos.
4. (Proposição V.3.4) Três vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$  ( $n = 2^8$  ou  $n = 3^9$ ) são LD se e somente se  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.

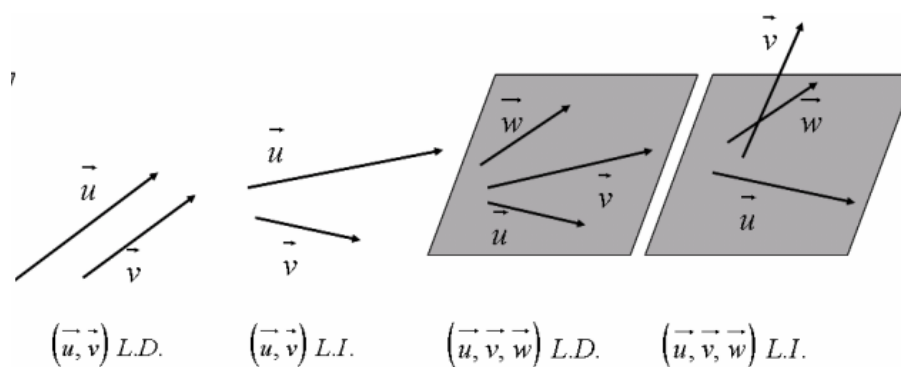


Figura 10: Fonte: internet

**Exemplo V.3.6.** Ver Exercício 9 em [Slide de Exercícios](#).

**Proposição V.3.7.** Se três vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$  são LI, então quaisquer dois deles são LI.<sup>10</sup>

**Exercício.** Verifique que a recíproca da proposição acima não vale! (**tarefa!**)

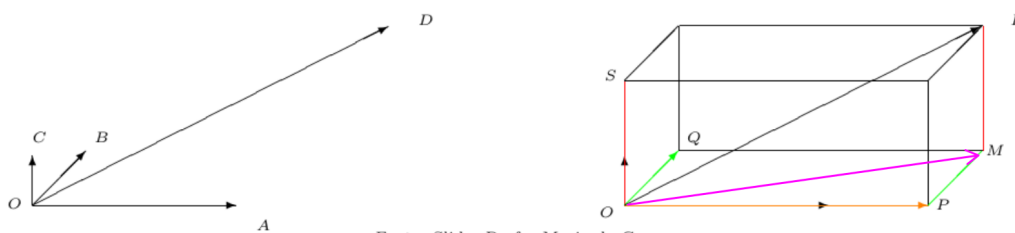
<sup>8</sup>Como três vetores em  $V^2$  são sempre coplanares, segue que três vetores em  $V^2$  são sempre LD!

<sup>9</sup>Segue que três vetores em  $V^3$  são LI se e somente se não são coplanares.

<sup>10</sup>Segue que se três vetores são LI, então não pode quaisquer dois deles serem paralelos.

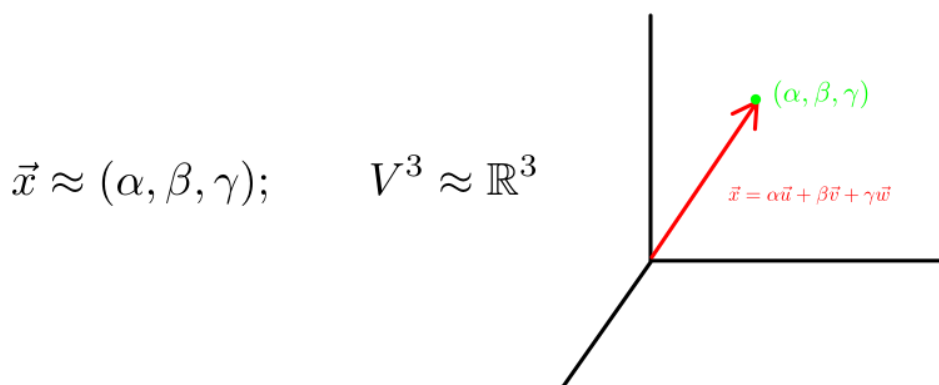
**Exemplo V.3.8.** Ver Exercício 10 em [Slide de Exercícios](#).

**Proposição V.3.9.** Se  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$  são LI, então qualquer vetor  $\vec{x} \in V^3$  é combinação linear única de  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ .



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

**Nota:** Como a combinação linear na proposição acima é única, podemos identificar o vetor  $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$  com a tripla  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de números reais.



**Fortemente recomendado:** revisar matrizes e sistemas lineares.

relembre quando um sistema linear tem: solução única (possível determinado), infinitas soluções (possível indeterminado), não tem solução (indeterminado)

## Objetivo

Apresentar o conceito de **base** e **coordenadas de um vetor** em relação a uma base para auxiliarem no cálculo entre vetores.

## V.4 Base

**Definição V.4.1.** Uma terna ordenada  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de três vetores LI de  $V^3$  chama-se **base** de  $V^3$ .

---

Vimos que (Proposição V.3.9 - Slide 2) um qualquer  $\vec{x} \in V^3$  é combinação linear única dos elementos  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  de uma base, ou seja:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, \quad (\text{V.4.1})$$

onde os escalares  $x_1, x_2, x_3$  são únicos para cada vetor  $\vec{x}$ .

---

**Definição V.4.2.** Chamamos a terna  $(x_1, x_2, x_3)$  de números reais em (V.4.1) de **coordenadas** do vetor  $\vec{x}$  na base  $E$ . Escrevemos

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)_E.$$


---

### Exemplo V.4.3.

(a)  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E = \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E \iff u_1 = v_1, u_2 = v_2 \text{ e } u_3 = v_3.$

(b)  $\vec{0} = (0, 0, 0)_E.$

---

### V.4.1 Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas

**Propriedades:**

Se  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos

(a)  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)_E$

(b)  $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)_E.$

**Dependência linear de dois vetores:**

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $V^3$  são LD/LI através de suas coordenadas:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ LD} \iff \exists \alpha, \beta \text{ não ambos nulos tais que } \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$$

$$\iff \exists \alpha, \beta \text{ não ambos nulos; } (\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)_E = (0, 0, 0)_E$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 = 0 \end{cases} \text{ tem mais de uma solução (nula e não nula, SPI}^{11})$$

**Proposição V.4.4.** *Dois vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$  são LD se e somente se*

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad e \quad \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Corolário.** *Se um dos determinantes acima é não nulo, então os vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  são LI.*

**Exemplo V.4.5.** Ver Exercícios 11 e 12 em [Slide de Exercícios](#).

<sup>1</sup>Sistema Possível e Indeterminado

**Dependência linear de três vetores:**

Queremos obter um critério para analisar quando os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  em  $V^3$  são LD/LI através de suas coordenadas.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E, \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E, \quad \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ LD} \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \text{ não todos nulos tais que } \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 = 0 \end{cases} \text{ tem mais de uma solução (nula e não nula)}$$

**Proposição V.4.6.** *Três vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)_E$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)_E$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_E$  são LD se e somente se*

$$\begin{array}{l} \text{(coordenadas de } \vec{u} \rightarrow) \\ \text{(coordenadas de } \vec{v} \rightarrow) \\ \text{(coordenadas de } \vec{w} \rightarrow) \end{array} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Corolário.** *Se o determinante acima é não nulo, então os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI.*

**Exemplo V.4.7.** Ver Exercícios 13 a 15 em [Slide de Exercícios](#).

---

**Nota:**

- Em  $V^3$ , uma base é formada por 3 vetores LI. As bases não são únicas!!
  - Conhecendo-se uma base, um qualquer vetor pode ser representado de de maneira única por uma tripla ordenada de números reais, ou seja, podemos identificar  $V^3$  com  $\mathbb{R}^3$ .
  - Todas as propriedades de vetores podem ser reescritas usando coordenadas.
  - Computacionalmente é mais fácil e prático realizar as operações sobre vetores usando as coordenadas.
- 

## V.4.2 Mudança de base

Já sabemos que  $V^3$  não possui uma única base.

**Motivação:**

- Reescreva o sistema da resolução do Exercício 15-(b) em forma matricial.
- 

DADO UM VETOR  $\vec{u}$  EM  $V^3$  E DUAS BASES  $E$  E  $F$  DE  $V^3$ , QUAL A RELAÇÃO ENTRE AS COORDENADAS DE  $\vec{u}$  NA BASE  $E$  COM AS COORDENADAS DE  $\vec{u}$  NA BASE  $F$ ?

---

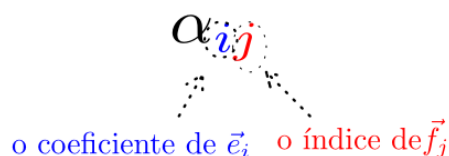
**Mudança de base:**

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  e  $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  bases de  $V^3$
- Dado um  $\vec{u} \in V^3$  com coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)_E$  e  $(y_1, y_2, y_3)_F$ , temos

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{u} = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3.$$

- Cada vetor de  $F$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base  $E$ , ou seja, existem escalares  $\alpha_{ij}$  tais que

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= \alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3.\end{aligned}$$



- Logo,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 \\ &= y_1(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3) + y_2(\alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3) \\ &\quad + y_3(\alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3) \\ &= (\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3)\vec{e}_1 + (\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3)\vec{e}_2 \\ &\quad + (\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

- Pela unicidade das coordenadas,

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ x_3 &= \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3.\end{aligned}$$



Escrevendo as equações acima na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{(\vec{u})_E} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}_{M_{EF}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{(\vec{u})_F}, \quad (\text{V.4.2})$$

- $(\vec{u})_E$ : é a matriz coluna  $n \times 1$  formada pelas coordenadas de  $u$  na base  $E$ ;
- $(\vec{u})_F$ : é a matriz coluna  $n \times 1$  formada pelas coordenadas de  $u$  na base  $F$ ;
- $M_{EF}$ : é a matriz quadrada  $n \times n$  na qual a coluna 1 é formada pelas coordenadas de  $\vec{f}_1$  na base  $E$ ; a coluna 2 é formada pelas coordenadas de  $\vec{f}_2$  na base  $E$  e a coluna 3 é formada pelas coordenadas de  $\vec{f}_3$  na base  $E$ .

**Definição V.4.8.** A matriz  $M_{EF}$  é chamada **matriz de mudança da base  $E$  para a base  $F$** .

Notações:

$$(\vec{u})_E = M_{EF}(\vec{u})_F; \quad ( )_E = M_{EF}( )_F. \quad (\text{V.4.3})$$

**Nota:** Como  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  são LI (pois  $F$  é uma base), temos que o determinante de  $M_{EF}$  é não nulo. Portanto, a matriz mudança de base possui matriz inversa  $(M_{EF})^{-1}$  e vale

$$M_{EF}(M_{EF})^{-1} = (M_{EF})^{-1}M_{EF} = Id,$$

onde  $Id$  é a matriz identidade:

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exemplo V.4.9.** Ver Exercícios 16 a 18 em [Slide de Exercícios](#).

---

Existe alguma relação entre  $M_{EF}$  e  $M_{FE}$ ??

---

**Proposição V.4.10.** *Sejam  $E, F, G$  três bases de  $V^3$ . Então,*

$$M_{EF}M_{FG} = M_{EG}.$$

---

**Corolário V.4.11.** *Sejam  $E$  e  $F$  bases de  $V^3$ . Então,*

$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$

---

**Exemplo V.4.12.** Ver Exercício 19 em [Slide de Exercícios](#).

### Objetivo

Definir o conceito de **produto escalar** entre dois vetores e sua relação com ortogonalidade.

Construir **base ortonormal**: o cálculo com vetores com coordenadas em relação a base ortonormal se torna mais simples.

## V.5 Produto Escalar

---

Para definir produto escalar precisamos responder as seguintes duas perguntas:

1. Como definir a medida do ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do espaço?
  2. Como “calcular” a medida do ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do espaço?
-

### V.5.1 Ângulo entre dois vetores não nulos de $V^3$

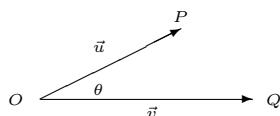
Considere os seguintes vetores não nulos de  $V^3$ :



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Considere os pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$  tais que

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}.$$



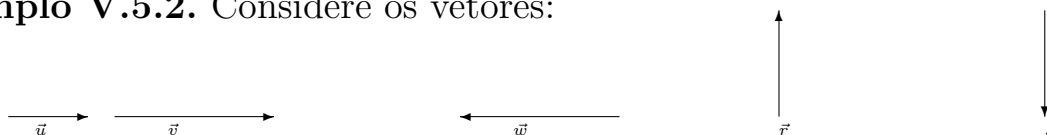
Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

**Definição V.5.1.** A **medida angular** (ou a **medida do ângulo**) entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é a medida  $\theta$  do ângulo  $\widehat{POQ}$  com  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Escrevemos

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}).$$

**Nota:** Existem duas escolhas para definir a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Nossa escolha é aquela de modo que a medida está entre 0 e  $\pi$ .

**Exemplo V.5.2.** Considere os vetores:



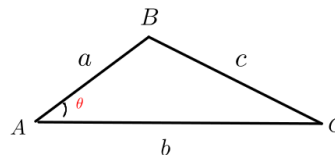
Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ? é zero.
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ ? é  $\pi$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$ ? é  $\pi$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{r}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{s}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{r}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{s}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ ? é  $\pi$ .

Se os vetores não são tão “bem comportados”, como calcular o ângulo?

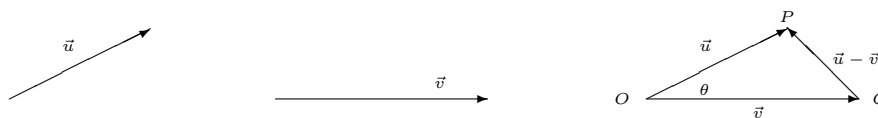
**Lei dos cossenos:** Sejam  $ABC$  um triângulo como na figura abaixo,  $a$  o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ ,  $b$  o comprimento do segmento  $\overline{AC}$ ,  $c$  o comprimento do segmento  $\overline{BC}$  e  $\theta$  o ângulo formado pelos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . Então,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$



Considere dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos e pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$  tais que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{u} \text{ e } \overrightarrow{OQ} = \vec{v}$$



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Pela Lei dos Cossenos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta, \quad \theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}). \quad (\text{V.5.1})$$

### Nota:

1. A equação acima diz que podemos calcular o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  conhecendo os valores:  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  e  $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ .

2. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos. Então,

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \iff \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta = 0.$$

**Definição V.5.3.** Dizemos que dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são **ortogonais** se:

- ou um deles é o vetor nulo;
- ou ambos não nulos e a medida do ângulo entre eles é  $\pi/2$ .

Notação:  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .



## V.5.2 Produto escalar

**Definição V.5.4.** O **produto escalar entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de  $V^3$** , indicado por  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , é o número real tal que

- Se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é o vetor nulo,  $\vec{u} \cdot \vec{v} := 0$ .
- Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são não nulos e  $\theta$  é a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

## Proposição V.5.5.

(P1) Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são não nulos e  $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ , então

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

(P2)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .

(P3)  $\vec{u} \perp \vec{v}$  se e somente se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

(P4) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer que sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $V^3$ ,

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

A igualdade vale se, e somente se,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD.

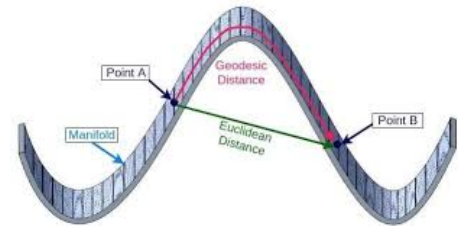
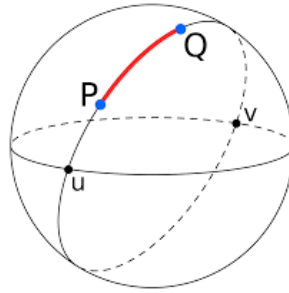
**Curiosidade:** Quando  $x, y \in S_1(0)$  (esfera de raio 1), a função ângulo

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$$

é a **distância geodésica** entre os pontos  $x$  e  $y$ , usualmente dita a função que determina a “distância real” na Terra (“variedades”), veja **Geodésica**.



(a) Delfim Moreira-MG, 2019



(b) Ilustração distância geodésica: fonte internet

**Nota:** As propriedades P1 e P2 da Proposição [V.7.5](#) dizem que podemos calcular o ângulo entre dois vetores conhecendo o produto interno entre vetores.

MAS...

- Não sabemos CALCULAR a norma de um vetor...
- Não sabemos CALCULAR o produto interno entre vetores...
- Tudo o que foi feito é **geométrico**...
- Vamos retomar as coordenadas de vetores e base do espaço!
- Para termos propriedades **analíticas**!

## V.6 Base Ortonormal

**Definição V.6.1.** Uma base  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de  $V^3$  é uma **base ortonormal** quando os vetores  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são unitários e dois a dois ortogonais, isto é,

$$\|\vec{e}_1\| = 1, \quad \|\vec{e}_2\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{e}_3\| = 1,$$

e

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2.$$

**Teorema V.6.2.** *Seja  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base ortonormal de  $V^3$ .*

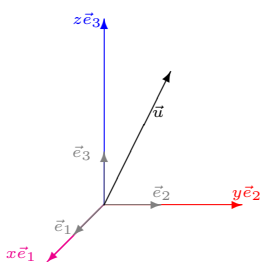
*Se  $\vec{u} = (x, y, z)_E$  e  $\vec{v} = (a, b, c)_E$ , então*

1.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

2.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xa + yb + zc.$$



### Nota.

1. As fórmulas acima valem somente quando a base  $E$  é **ortonormal**.
2. As fórmulas acima valem para **qualquer** base ortonormal.



**Exemplo V.6.3.** Ver Exercícios 20 a 22 em [Slide de Exercícios](#).

**Proposição V.6.4.** Para quaisquer vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  de  $V^3$  e qualquer escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vale:

$$1. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (\text{distributiva})$$

$$2. \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v});$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}; \quad (\text{comutativa})$$

$$4. \text{ Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$$

*Demonstração.* **Tarefa!** (use as coordenadas dos vetores em uma fixada base ortonormal).  $\square$

### Nota.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ ? Não,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  diz que  $\vec{u}$  é ortogonal a  $\vec{v}$ .

- Faz sentido as expressões:  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$  e  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ? Não,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  é número e não se faz produto escalar entre número e vetor. Podemos fazer apenas multiplicação por escalar:  $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ .

- Se sim, vale  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ? (é associativa?)

**Exemplo V.6.5.** Sejam  $\vec{w}$  um vetor não nulo e  $T$  o conjunto dos vetores em  $V^3$  que são ortogonais a  $\vec{w}$ . Prove que:

(a)  $\vec{w} \notin T$ ;

(b) Qualquer combinação linear de vetores em  $T$  pertence a  $T$ ;

(c) Se  $\vec{u}, \vec{v} \in T$  são LI, então  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é LI;

(d) Três vetores quaisquer de  $T$  são LD;

(e) Se  $\vec{u}, \vec{v} \in T$  são LI, então  $\vec{u}, \vec{v}$  geram  $T$ , isto é, todo vetor de  $T$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

$T$  é chamado **plano ortogonal** a  $\vec{w}$ .

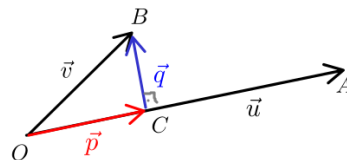
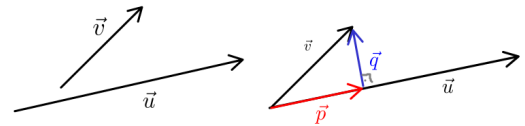
### V.6.1 Projeção Ortogonal

**Motivação:** A projeção será usada na construção de base ortonormal.

Dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $V^3$ , é possível decompor o vetor  $\vec{v}$  como soma de dois vetores  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q},$$

de forma que  $\vec{p}$  seja paralelo a  $\vec{u}$  e  $\vec{q}$  seja ortogonal a  $\vec{u}$ .



- $O, A, B$  tais que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
- $C$ : ponto de intersecção da reta perpendicular à reta  $OA$  que passa por  $B$
- Por construção (geométrica), os vetores

$$\vec{p} := \overrightarrow{OC}, \quad \vec{q} := \overrightarrow{CB}$$

satisfazem:

$$\vec{p} \parallel \vec{u}, \quad \vec{q} \perp \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{p} + \vec{q}.$$

**Definição V.6.6.** Seja  $\vec{u}$  um vetor não nulo em  $V^3$ . Dado um vetor  $\vec{v}$ , a **projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$**  é o vetor  $\vec{p}$ , denotado por  $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ , que satisfaz as condições:

$$\vec{p} \parallel \vec{u} \quad \text{e} \quad (\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}.$$

Sempre existe o vetor projeção ortogonal de um vetor  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u} \neq \vec{0}$  ?

Ele é único?

No caso de existir, temos uma expressão analítica para o vetor projeção  $\vec{p}$ ?

**Proposição V.6.7.** *Seja  $\vec{u}$  um vetor não nulo em  $V^3$ . Para qualquer vetor  $\vec{v}$ , existe uma única projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$  dada por*

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u},$$

cuja norma é

$$\|proj_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

**Exemplo V.6.8.** Ver Exercício [24](#) em [Slide de Exercícios](#).

Vimos como **é fácil** calcular o produto escalar de dois vetores e, portanto, é fácil calcular:

- a norma de vetores,  $(\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})$

- a medida angular entre vetores,  $(\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|})$

- a projeção ortogonal,  $(proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u})$

quando as coordenadas dos vetores são em relação a uma **base ortonormal**.

- E se a base não é ortonormal? 

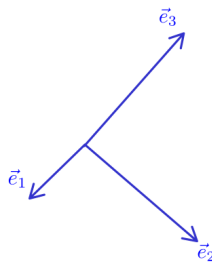
Se  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  é uma base de  $V^3$  que **não é ortonormal**, então é possível construir uma **base ortonormal**  $B = (\vec{l}, \vec{j}, \vec{k})$  a partir de  $E$ !

Como??

**Nota.** Obtendo a base  $B$ , podemos fazer a mudança de base de  $E$  (não ortonormal) para  $B$  (ortonormal) e trabalhar sempre com as coordenadas dos vetores em relação à base ortonormal  $B$ , onde é fácil fazermos os cálculos!!

## V.6.2 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

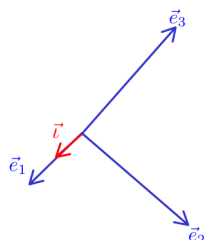
Seja  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base de  $V^3$ .



- **Construção<sup>12</sup> de  $B = (\vec{l}, \vec{j}, \vec{k})$  ortonormal a partir de  $E$ :**

1. Escolher  $\vec{l}$  como o versor  $\vec{e}_1$ :

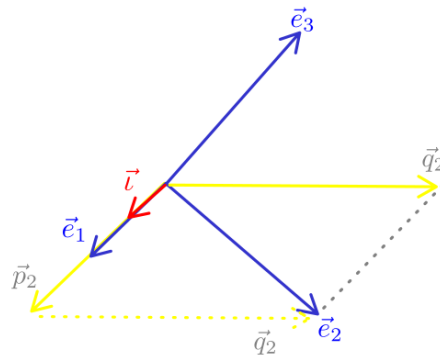
$$\vec{l} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}.$$



<sup>12</sup>Ver simulação no [Wikipedia](#)

2. Decompor  $\vec{e}_2$  em dois vetores  $\vec{p}_2$  e  $\vec{q}_2$  tais que:

- $\vec{e}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$
- $\vec{p}_2 \parallel \vec{t}$
- $\vec{q}_2 \perp \vec{t}$ .



Sabemos que

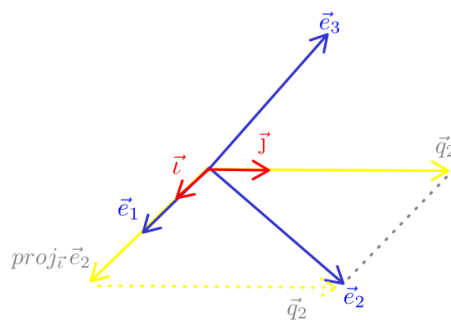
$$\vec{p}_2 = \text{proj}_{\vec{t}} \vec{e}_2 = \left( \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{t}}{\|\vec{t}\|^2} \right) \vec{t} = (\vec{e}_2 \cdot \vec{t}) \vec{t} \quad \text{e} \quad \vec{q}_2 = \vec{e}_2 - \vec{p}_2.$$

Logo,

$$\vec{q}_2 = \vec{e}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \vec{t}) \vec{t}.$$

Escolha<sup>13 14</sup>,

$$\vec{j} = \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}. \quad (\vec{j} \perp \vec{t})$$

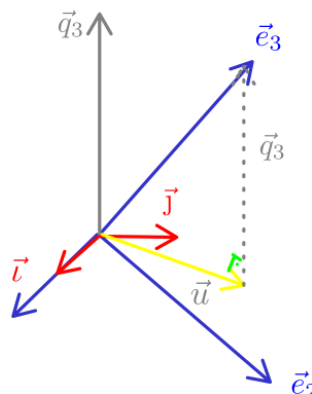


<sup>13</sup> $\vec{q}_2 \neq \vec{0}$  pois  $\{\vec{e}_2, \vec{t}\}$  é LI.

<sup>14</sup>Note:  $\vec{t}$  é paralelo a  $\vec{e}_1$  e  $\vec{j}$  é combinação linear de  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$

3. Decompor  $\vec{e}_3$  em dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{q}_3$  tais que:

- $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$
- $\vec{u}$ ,  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são coplanares;
- $\vec{q}_3$  é ortogonal a  $\vec{i}$  e a  $\vec{j}$ .



$\vec{u}$  é a projeção ortogonal de  $\vec{e}_3$  ao plano gerado por  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$

Segue do Exemplo V.8.5-(e)<sup>a</sup> que existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}.$$

Temos  $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$  e

$\vec{u}, \vec{i}, \vec{j}$  são coplanares  $\implies \vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$  para algum  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\vec{q}_3$  é ortogonal a  $\vec{i} \implies \vec{i} \cdot \vec{q}_3 = 0$ .

$\vec{q}_3$  é ortogonal a  $\vec{j} \implies \vec{j} \cdot \vec{q}_3 = 0$ .

Logo,

$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u} = \vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}$$

e

$$\vec{i} \cdot \vec{q}_3 = 0 \iff \vec{i} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}) = 0 \iff \vec{i} \cdot \vec{e}_3 - \alpha\vec{i} \cdot \vec{i} = 0 \iff \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{e}_3}{\vec{i} \cdot \vec{i}}$$

e

$$\vec{j} \cdot \vec{q}_3 = 0 \iff \vec{j} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}) = 0 \iff \vec{j} \cdot \vec{e}_3 - \beta\vec{j} \cdot \vec{j} = 0 \iff \beta = \frac{\vec{j} \cdot \vec{e}_3}{\vec{j} \cdot \vec{j}}.$$

Logo,

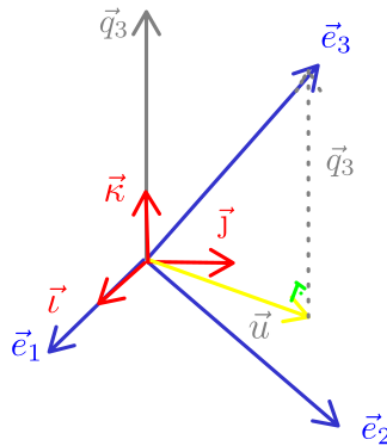
$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{i} \cdot \vec{e}_3)\vec{i} - (\vec{j} \cdot \vec{e}_3)\vec{j}.$$

<sup>a</sup> $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  LI

Escolha<sup>15</sup>,

$$\vec{k} = \frac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}. \quad (\vec{k} \perp \vec{i}, \vec{k} \perp \vec{j})$$

A base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é ortonormal!



**Nota.** A matriz de mudança de base  $E$  para  $B$  é uma matriz triangular superior:

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

**Exemplo V.6.9.** Ver Exercícios 25 e 26 em [Slide de Exercícios](#).

ALGUMA PROPRIEDADE A MAIS SOBRE A RELAÇÃO ENTRE  $M_{EB}$  E  $M_{BE}$ ?

<sup>15</sup> $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$  pois pelo Exemplo V.8.5-(c) temos que  $\{\vec{e}_3, \vec{i}, \vec{j}\}$  é LI.

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  base e  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  base ortonormal de  $V^3$
- $\vec{e}_1 = (a, b, c)_B$ ;  $\vec{e}_2 = (d, e, f)_B$ ;  $\vec{e}_3 = (g, h, i)_B$ ;
- $M_{BE} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
- 

$$(M_{BE})^t M_{BE} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

**Proposição V.6.10.** *Sejam  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base e  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal de  $V^3$ . Então,  $E$  é ortonormal se, e somente se,*

$$(M_{BE})^t M_{BE} = Id. \quad (\text{V.6.1})$$

**Corolário V.6.11.** *Se  $B$  e  $E$  são bases ortonormais de  $V^3$ , então <sup>16</sup>*

$$M_{EB} = (M_{BE})^{-1} = (M_{BE})^t$$

e

$$\det M_{BE} = 1 \quad \text{ou} \quad \det M_{BE} = -1.$$

<sup>16</sup>Veja Nota na pág. [V.33](#)



**Nota.**

1. É muito mais fácil encontrar a matriz transposta que a matriz inversa de uma matriz.
2. Matrizes  $M$  que satisfazem a condição (V.8.1), isto é,

$$M^t M = Id,$$

são chamadas **matrizes ortogonais**.

3. Dada uma matriz  $M$ , ela pode ser pensada como uma matriz de mudança  $M_{BE}$  de uma base ortonormal  $B$  para uma base  $E$  e  
 $M$  é ortogonal se, e somente se  $E$  é ortonormal.

Portanto,  $M$  é ortogonal se, e somente se,

- Cada coluna de  $M$  constitui um vetor unitário.
- Duas a duas de quaisquer colunas (distintas) de  $M$  constituem vetores ortogonais.

**Objetivo**

Definir o conceito de **produto escalar** entre dois vetores e sua relação com ortogonalidade.

Construir **base ortonormal**: o cálculo com vetores com coordenadas em relação a base ortonormal se torna mais simples.

## V.7 Produto Escalar

---

Para definir produto escalar precisamos responder as seguintes duas perguntas:

1. Como definir a medida do ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do espaço?
  2. Como “calcular” a medida do ângulo entre dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do espaço?
-

### V.7.1 Ângulo entre dois vetores não nulos de $V^3$

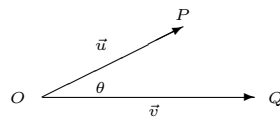
Considere os seguintes vetores não nulos de  $V^3$ :



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Considere os pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$  tais que

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}.$$



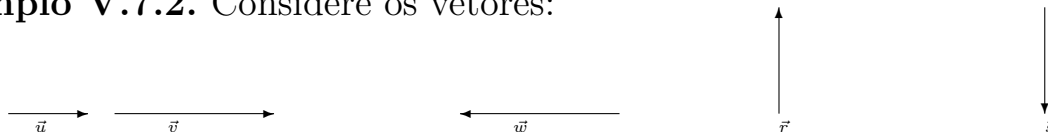
Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

**Definição V.7.1.** A **medida angular** (ou a **medida do ângulo**) entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é a medida  $\theta$  do ângulo  $\widehat{POQ}$  com  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Escrevemos

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}).$$

**Nota:** Existem duas escolhas para definir a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Nossa escolha é aquela de modo que a medida está entre 0 e  $\pi$ .

**Exemplo V.7.2.** Considere os vetores:



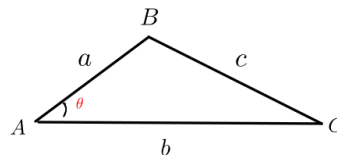
Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ? é zero.
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ ? é  $\pi$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$ ? é  $\pi$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{r}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{s}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{r}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{s}$ ? é  $\pi/2$ .
- Qual a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ ? é  $\pi$ .

Se os vetores não são tão “bem comportados”, como calcular o ângulo?

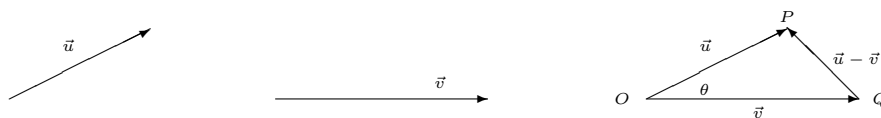
**Lei dos cossenos:** Sejam  $ABC$  um triângulo como na figura abaixo,  $a$  o comprimento do segmento  $\overline{AB}$ ,  $b$  o comprimento do segmento  $\overline{AC}$ ,  $c$  o comprimento do segmento  $\overline{BC}$  e  $\theta$  o ângulo formado pelos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ . Então,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$



Considere dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não nulos e pontos  $O$ ,  $P$  e  $Q$  tais que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{u} \text{ e } \overrightarrow{OQ} = \vec{v}$$



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

Pela Lei dos Cossenos:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta, \quad \theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}). \quad (\text{V.7.1})$$

### Nota:

1. A equação acima diz que podemos calcular o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  conhecendo os valores:  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  e  $\|\vec{u} - \vec{v}\|$ .

2. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores não nulos. Então,

$$\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \iff \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta = 0.$$

**Definição V.7.3.** Dizemos que dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são **ortogonais** se:

- ou um deles é o vetor nulo;
- ou ambos não nulos e a medida do ângulo entre eles é  $\pi/2$ .

Notação:  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .



## V.7.2 Produto escalar

**Definição V.7.4.** O **produto escalar entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de  $V^3$** , indicado por  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , é o número real tal que

- Se  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é o vetor nulo,  $\vec{u} \cdot \vec{v} := 0$ .
- Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são não nulos e  $\theta$  é a medida do ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta.$$

## Proposição V.7.5.

(P1) Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são não nulos e  $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ , então

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

(P2)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .

(P3)  $\vec{u} \perp \vec{v}$  se e somente se  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

(P4) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer que sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $V^3$ ,

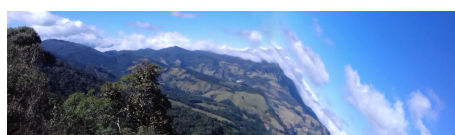
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|.$$

A igualdade vale se, e somente se,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD.

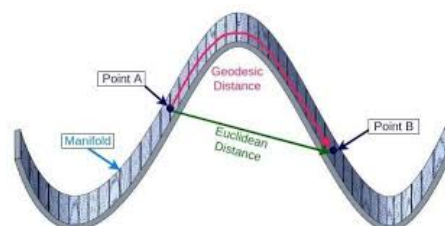
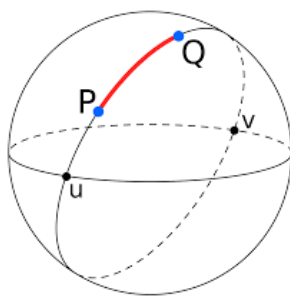
**Curiosidade:** Quando  $x, y \in S_1(0)$  (esfera de raio 1), a função ângulo

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos \left( \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \right) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$$

é a **distância geodésica** entre os pontos  $x$  e  $y$ , usualmente dita a função que determina a “distância real” na Terra (“variedades”), veja **Geodésica**.



(a) Delfim Moreira-MG, 2019



(b) Ilustração distância geodésica: fonte internet

**Nota:** As propriedades P1 e P2 da Proposição [V.7.5](#) dizem que podemos calcular o ângulo entre dois vetores conhecendo o produto interno entre vetores.

MAS...

- Não sabemos CALCULAR a norma de um vetor...
- Não sabemos CALCULAR o produto interno entre vetores...
- Tudo o que foi feito é **geométrico**...
- Vamos retomar as coordenadas de vetores e base do espaço!
- Para termos propriedades **analíticas**!

## V.8 Base Ortonormal

**Definição V.8.1.** Uma base  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de  $V^3$  é uma **base ortonormal** quando os vetores  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são unitários e dois a dois ortogonais, isto é,

$$\|\vec{e}_1\| = 1, \quad \|\vec{e}_2\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{e}_3\| = 1,$$

e

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_2.$$

**Teorema V.8.2.** *Seja  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base ortonormal de  $V^3$ .*

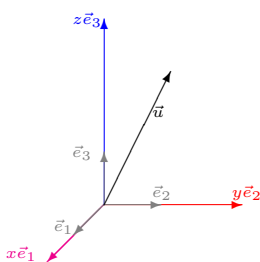
*Se  $\vec{u} = (x, y, z)_E$  e  $\vec{v} = (a, b, c)_E$ , então*

1.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

2.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xa + yb + zc.$$



### Nota.

1. As fórmulas acima valem somente quando a base  $E$  é **ortonormal**.
2. As fórmulas acima valem para **qualquer** base ortonormal.

**Exemplo V.8.3.** Ver Exercícios 20 a 22 em [Slide de Exercícios](#).

**Proposição V.8.4.** Para quaisquer vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  de  $V^3$  e qualquer escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vale:

$$1. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (\text{distributiva})$$

$$2. \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v});$$

$$3. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}; \quad (\text{comutativa})$$

$$4. \text{Se } \vec{u} \neq \vec{0}, \text{ então } \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$$

*Demonstração.* **Tarefa!** (use as coordenadas dos vetores em uma fixada base ortonormal).  $\square$

### Nota.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ ? Não,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  diz que  $\vec{u}$  é ortogonal a  $\vec{v}$ .

- Faz sentido as expressões:  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$  e  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ? Não,  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  é número e não se faz produto escalar entre número e vetor. Podemos fazer apenas multiplicação por escalar:  $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ .

- Se sim, vale  $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ? (é associativa?)

**Exemplo V.8.5.** Sejam  $\vec{w}$  um vetor não nulo e  $T$  o conjunto dos vetores em  $V^3$  que são ortogonais a  $\vec{w}$ . Prove que:

(a)  $\vec{w} \notin T$ ;

(b) Qualquer combinação linear de vetores em  $T$  pertence a  $T$ ;

(c) Se  $\vec{u}, \vec{v} \in T$  são LI, então  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é LI;

(d) Três vetores quaisquer de  $T$  são LD;

(e) Se  $\vec{u}, \vec{v} \in T$  são LI, então  $\vec{u}, \vec{v}$  geram  $T$ , isto é, todo vetor de  $T$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

$T$  é chamado **plano ortogonal** a  $\vec{w}$ .



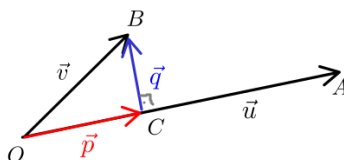
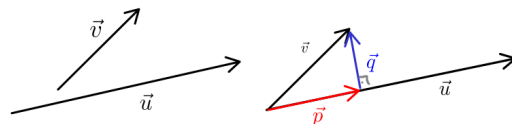
### V.8.1 Projeção Ortogonal

**Motivação:** A projeção será usada na construção de base ortonormal.

Dados dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $V^3$ , é possível decompor o vetor  $\vec{v}$  como soma de dois vetores  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,

$$\vec{v} = \vec{p} + \vec{q},$$

de forma que  $\vec{p}$  seja paralelo a  $\vec{u}$  e  $\vec{q}$  seja ortogonal a  $\vec{u}$ .



- $O, A, B$  tais que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
- $C$ : ponto de intersecção da reta perpendicular à reta  $OA$  que passa por  $B$
- Por construção (geométrica), os vetores

$$\vec{p} := \overrightarrow{OC}, \quad \vec{q} := \overrightarrow{CB}$$

satisfazem:

$$\vec{p} \parallel \vec{u}, \quad \vec{q} \perp \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{p} + \vec{q}.$$

**Definição V.8.6.** Seja  $\vec{u}$  um vetor não nulo em  $V^3$ . Dado um vetor  $\vec{v}$ , a **projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$**  é o vetor  $\vec{p}$ , denotado por  $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ , que satisfaz as condições:

$$\vec{p} \parallel \vec{u} \quad \text{e} \quad (\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}.$$

Sempre existe o vetor projeção ortogonal de um vetor  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u} \neq \vec{0}$  ?

Ele é único?

No caso de existir, temos uma expressão analítica para o vetor projeção  $\vec{p}$ ?

**Proposição V.8.7.** *Seja  $\vec{u}$  um vetor não nulo em  $V^3$ . Para qualquer vetor  $\vec{v}$ , existe uma única projeção ortogonal de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$  dada por*

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u},$$

cuja norma é

$$\|proj_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|}.$$

**Exemplo V.8.8.** Ver Exercício 24 em [Slide de Exercícios](#).

Vimos como **é fácil** calcular o produto escalar de dois vetores e, portanto, é fácil calcular:

- a norma de vetores,  $(\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})$

- a medida angular entre vetores,  $(\theta = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|})$

- a projeção ortogonal,  $(proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u})$

**quando as coordenadas dos vetores são em relação a uma base ortonormal.**

- E se a base não é ortonormal? 

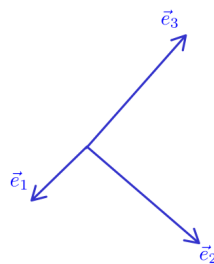
Se  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  é uma base de  $V^3$  que **não é ortonormal**, então é possível construir uma **base ortonormal**  $B = (\vec{l}, \vec{j}, \vec{k})$  a partir de  $E$ !

Como??

**Nota.** Obtendo a base  $B$ , podemos fazer a mudança de base de  $E$  (não ortonormal) para  $B$  (ortonormal) e trabalhar sempre com as coordenadas dos vetores em relação à base ortonormal  $B$ , onde é fácil fazermos os cálculos!!

## V.8.2 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

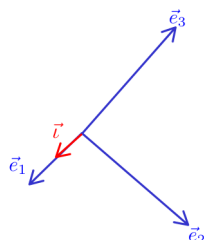
Seja  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base de  $V^3$ .



- **Construção**<sup>17</sup> de  $B = (\vec{l}, \vec{j}, \vec{k})$  ortonormal a partir de  $E$ :

1. Escolher  $\vec{l}$  como o versor  $\vec{e}_1$ :

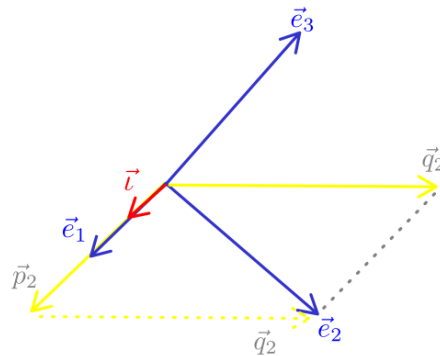
$$\vec{l} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}.$$



<sup>17</sup>Ver simulação no [Wikipedia](#)

2. Decompor  $\vec{e}_2$  em dois vetores  $\vec{p}_2$  e  $\vec{q}_2$  tais que:

- $\vec{e}_2 = \vec{p}_2 + \vec{q}_2$
- $\vec{p}_2 \parallel \vec{t}$
- $\vec{q}_2 \perp \vec{t}$ .



Sabemos que

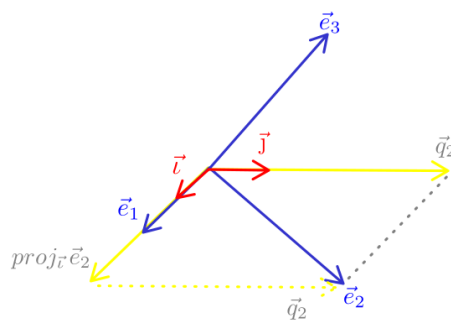
$$\vec{p}_2 = \text{proj}_{\vec{t}} \vec{e}_2 = \left( \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{t}}{\|\vec{t}\|^2} \right) \vec{t} = (\vec{e}_2 \cdot \vec{t}) \vec{t} \quad \text{e} \quad \vec{q}_2 = \vec{e}_2 - \vec{p}_2.$$

Logo,

$$\vec{q}_2 = \vec{e}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \vec{t}) \vec{t}.$$

Escolha<sup>18 19</sup>,

$$\vec{j} = \frac{\vec{q}_2}{\|\vec{q}_2\|}. \quad (\vec{j} \perp \vec{t})$$

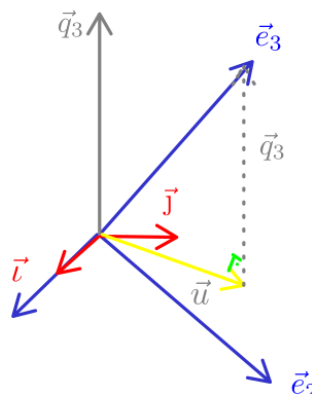


<sup>18</sup>  $\vec{q}_2 \neq \vec{0}$  pois  $\{\vec{e}_2, \vec{t}\}$  é LI.

<sup>19</sup> Note:  $\vec{t}$  é paralelo a  $\vec{e}_1$  e  $\vec{j}$  é combinação linear de  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$

3. Decompor  $\vec{e}_3$  em dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{q}_3$  tais que:

- $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$
- $\vec{u}$ ,  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  são coplanares;
- $\vec{q}_3$  é ortogonal a  $\vec{i}$  e a  $\vec{j}$ .



$\vec{u}$  é a projeção ortogonal de  $\vec{e}_3$  ao plano gerado por  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$

Segue do Exemplo V.8.5-(e)<sup>a</sup> que existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}.$$

Temos  $\vec{e}_3 = \vec{u} + \vec{q}_3$  e

$\vec{u}, \vec{i}, \vec{j}$  são coplanares  $\implies \vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$  para algum  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\vec{q}_3$  é ortogonal a  $\vec{i} \implies \vec{i} \cdot \vec{q}_3 = 0$ .

$\vec{q}_3$  é ortogonal a  $\vec{j} \implies \vec{j} \cdot \vec{q}_3 = 0$ .

Logo,

$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - \vec{u} = \vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}$$

e

$$\vec{i} \cdot \vec{q}_3 = 0 \iff \vec{i} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}) = 0 \iff \vec{i} \cdot \vec{e}_3 - \alpha\vec{i} \cdot \vec{i} = 0 \iff \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{e}_3}{\vec{i} \cdot \vec{i}}$$

e

$$\vec{j} \cdot \vec{q}_3 = 0 \iff \vec{j} \cdot (\vec{e}_3 - \alpha\vec{i} - \beta\vec{j}) = 0 \iff \vec{j} \cdot \vec{e}_3 - \beta\vec{j} \cdot \vec{j} = 0 \iff \beta = \frac{\vec{j} \cdot \vec{e}_3}{\vec{j} \cdot \vec{j}}.$$

Logo,

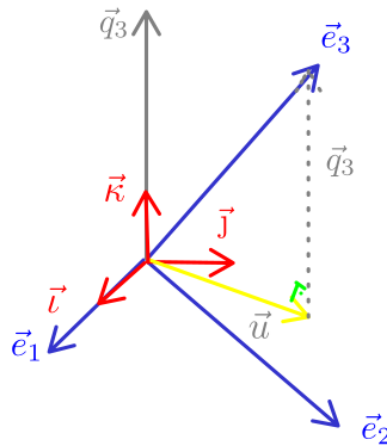
$$\vec{q}_3 = \vec{e}_3 - (\vec{i} \cdot \vec{e}_3)\vec{i} - (\vec{j} \cdot \vec{e}_3)\vec{j}.$$

<sup>a</sup> $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  LI

Escolha<sup>20</sup>,

$$\vec{k} = \frac{\vec{q}_3}{\|\vec{q}_3\|}. \quad (\vec{k} \perp \vec{i}, \vec{k} \perp \vec{j})$$

A base  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é ortonormal!



**Nota.** A matriz de mudança de base  $E$  para  $B$  é uma matriz triangular superior:

$$M_{EB} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

**Exemplo V.8.9.** Ver Exercícios 25 e 26 em [Slide de Exercícios](#).

ALGUMA PROPRIEDADE A MAIS SOBRE A RELAÇÃO ENTRE  $M_{EB}$  E  $M_{BE}$ ?

<sup>20</sup> $\vec{q}_3 \neq \vec{0}$  pois pelo Exemplo V.8.5-(c) temos que  $\{\vec{e}_3, \vec{i}, \vec{j}\}$  é LI.

- $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  base e  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  base ortonormal de  $V^3$
- $\vec{e}_1 = (a, b, c)_B$ ;  $\vec{e}_2 = (d, e, f)_B$ ;  $\vec{e}_3 = (g, h, i)_B$ ;
- $M_{BE} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$
- 

$$(M_{BE})^t M_{BE} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

**Proposição V.8.10.** *Sejam  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base e  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal de  $V^3$ . Então,  $E$  é ortonormal se, e somente se,*

$$(M_{BE})^t M_{BE} = Id. \quad (\text{V.8.1})$$

**Corolário V.8.11.** *Se  $B$  e  $E$  são bases ortonormais de  $V^3$ , então <sup>21</sup>*

$$M_{EB} = (M_{BE})^{-1} = (M_{BE})^t$$

e

$$\det M_{BE} = 1 \quad \text{ou} \quad \det M_{BE} = -1.$$

<sup>21</sup>Veja Nota na pág. [V.33](#)

**Nota.**

1. É muito mais fácil encontrar a matriz transposta que a matriz inversa de uma matriz.
2. Matrizes  $M$  que satisfazem a condição (V.8.1), isto é,

$$M^t M = Id,$$

são chamadas **matrizes ortogonais**.

3. Dada uma matriz  $M$ , ela pode ser pensada como uma matriz de mudança  $M_{BE}$  de uma base ortonormal  $B$  para uma base  $E$  e  
 $M$  é ortogonal se, e somente se  $E$  é ortonormal.

Portanto,  $M$  é ortogonal se, e somente se,

- Cada coluna de  $M$  constitui um vetor unitário.
- Duas a duas de quaisquer colunas (distintas) de  $M$  constituem vetores ortogonais.

**Objetivo**

Definir o **produto vetorial** entre dois vetores e o **produto misto** de três vetores.

Estudar suas propriedades e aplicações ao cálculo de áreas e volumes.

Estudar a relação de produto vetorial com ortogonalidade.

Para isso necessitamos do conceito de “**orientação**” em  $V^3$ .



## V.9 Orientação em $V^3$

**Definição V.9.1.** Sejam  $E$  e  $F$  duas bases de  $V^3$ . Dizemos que a base  $E$  é **equivalente a** (ou **concordante com**)  $F$ , e escrevemos  $E \sim F$ , se

$$\det(M_{EF}) > 0.$$

Seja  $\mathcal{B}$  o conjunto de todas as bases de  $V^3$ .

A relação  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\mathcal{B}$ , ou seja, satisfaz as três seguintes propriedades:

1.  $\sim$  é reflexiva:  $E \sim E$  para todo  $E \in \mathcal{B}$ :

$$M_{EE} = Id.$$

2.  $\sim$  é simétrica: se  $E \sim F$ , então  $F \sim E$ :

$$M_{FE} = (M_{EF})^{-1}.$$

3.  $\sim$  é transitiva: se  $E \sim F$  e  $F \sim G$ , então  $E \sim G$ :

$$M_{EG} = M_{EF}M_{FG}.$$

Seja  $E$  uma base de  $V^3$ .

Definimos a **classe de equivalência de  $E$** , denotada por  $\overline{E}$  como sendo o conjunto de todas as bases equivalentes a  $E$ , ou seja,

$$\overline{E} = \{ F \in \mathcal{B} \mid F \sim E \} = \{ F \in \mathcal{B} \mid \det(M_{EF}) > 0 \}.$$

**Proposição.** *Existem apenas duas classes de equivalência em  $\mathcal{B}$ , ou seja,*

$$\mathcal{B} = \overline{E} \cup \overline{F}, \quad \overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset.$$

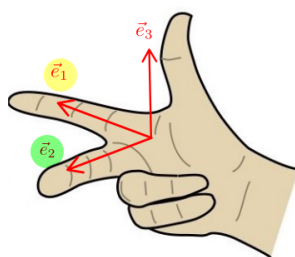
**Definição V.9.2.** Cada classe de equivalência de  $\mathcal{B}$  chama-se **orientação** de  $V^3$ .

Uma vez escolhida e fixada uma classe de equivalência, diz-se que  $V^3$  está **orientado**. Neste caso cada base da orientação escolhida é chamada **base positiva**, e cada base da outra orientação é chamada **base negativa**.

Para uma explicação geométrica da palavra “orientação”, leia, por exemplo, Apêndice O do livro Geometria Analítica - Paulo Boulos.

### Convenção:

Uma base  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  de  $V^3$  obedece a regra da mão direita se podemos representar os vetores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  na seguinte forma



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Regra\\_da\\_m%C3%A3o\\_direita.jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Regra_da_m%C3%A3o_direita.jpg)

**Orientamos  $V^3$  com uma base que obedece a regra da mão direita.**

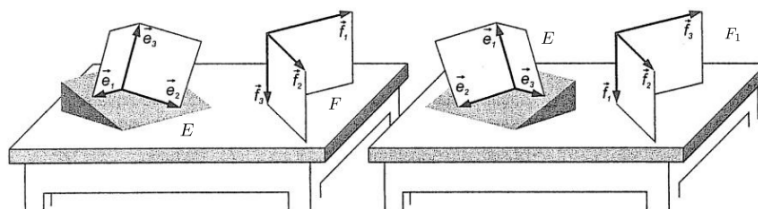


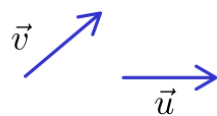
Figura 13:  $E$  e  $F$  obedecem a regra da mão direita,  $F_1$  não obedece. Fonte: Livro Geometria Analítica, Boulos

**Uma base positiva em  $V^3$  é aquela que obedece a regra da mão direita.**

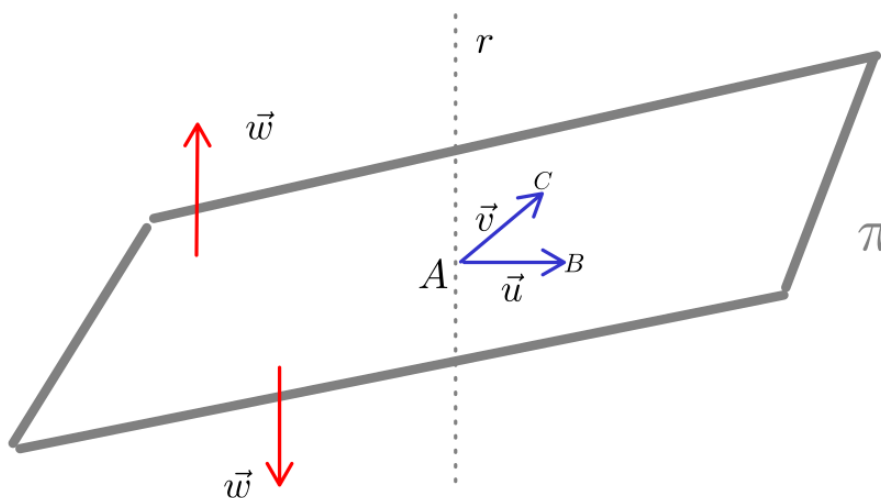
## V.10 Produto Vetorial

### Motivação

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores LI de  $V^3$ .



Então<sup>22</sup>, existe um vetor não nulo  $\vec{w}$  ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :



Se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  determinam um único plano  $\pi$ .

Existe uma única reta  $r$  perpendicular ao plano  $\pi$ .

A **direção** de  $\vec{w}$  é dada pela reta  $r$ , portanto, é **única**.

O **sentido** e o **módulo** de  $\vec{w}$  **não são únicos**.

---

COMO ESCOLHER DE MODO ÚNICO UM VETOR ORTOGONAL A  $\vec{u}$  E  $\vec{v}$ ?

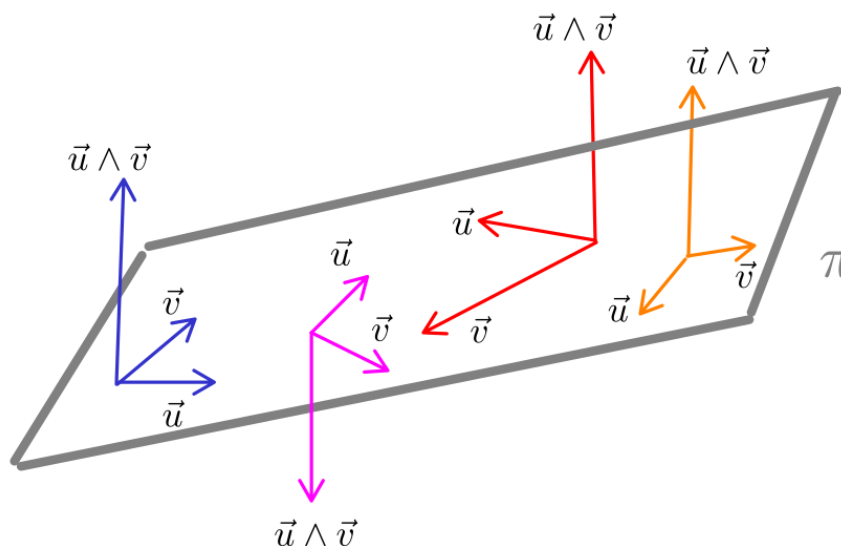
---

<sup>22</sup>Fizemos exercício para determinar  $\vec{w}$ , conhecendo as coordenadas de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em relação a uma base ortonormal. Veja Exercício 22 em [Slide de Exercícios](#).

**Definição V.10.1.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores de  $V^3$ .

O **produto vetorial de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$**  é o vetor, denotado por  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  (ou  $\vec{u} \times \vec{v}$ ), tal que:

1. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD, então  $\vec{u} \wedge \vec{v} := \vec{0}$ .
2. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI, então
  - (a)  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$  (impõem  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  paralelo a  $r$ )
  - (b)  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ , onde  $\theta = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$  ( $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| > 0$  fornece 2 pontos em  $r$ )
  - (c)  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  é uma base positiva. (determina o ponto de  $r$  a ser escolhido)



**Nota.**

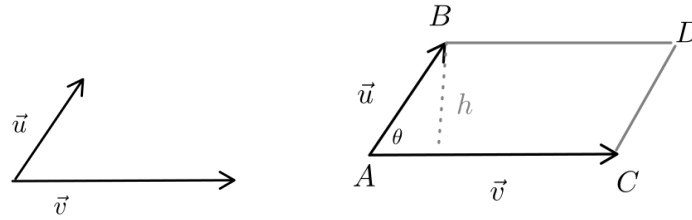
1. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI, as propriedades (a), (b) e (c) da definição determinam unicamente o vetor  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .
2. O produto vetorial é um **vetor**.
3. O produto escalar é um **número real**.
4.  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  se, e somente se,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD.

### V.10.1 Área de paralelogramo

#### Aplicação de produto vetorial:

A área  $A_{ABDC}$  do paralelogramo  $ABDC$  gerado por dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  LI de  $V^3$  é dada por:

$$A_{ABDC} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|.$$



Como calcular  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ?

Lembre-se da condição para dois vetores serem LD/LI: Proposição V.4.4.

**Teorema V.10.2.** *Seja  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva. Se  $\vec{u} = (x, y, z)_E$  e  $\vec{v} = (a, b, c)_E$ , então*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ a & c \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} \vec{k} =: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

**Exemplo V.10.3.** Ver Exercício 29 em [Slide de Exercícios](#).

## V.10.2 Propriedades de produto vetorial

**Proposição V.10.4.** Para quaisquer vetores  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  em  $V^3$  e escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vale:

$$1. \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

(não é comutativa)

$$2. (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

$$3. \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

$$4. (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}.$$

*Demonstração.* Seguem das propriedades de determinante. (tarefa!) □

### Nota.

•  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \implies \vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ ? Não.  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  podem ser não nulos e paralelos

•  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w} \implies \vec{v} = \vec{w}$ ? Não, apenas que  $\vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$

•  $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$ ? Não,  $\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{w})$

• Faz sentido  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  e  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ? Sim.

• Se sim, vale  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ? Não,  $(\vec{j} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{i} = \vec{0}$  e  $\vec{j} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{i}) = -\vec{k}$  (é associativa?)

**Proposição V.10.5.** Para quaisquer vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$ , valem<sup>23</sup>:

$$1. (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v};$$

$$2. \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

*Demonstração.* [Tarefa!](#) □

**Corolário (Identidade de Jacobi).**

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} + (\vec{v} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{u} + (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

**Exemplo V.10.6.** Ver Exercício 30 em [Slide de Exercícios](#).

**Corolário V.10.7.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  vetores LI. Então,

1.  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  é uma combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , para todo vetor  $\vec{w} \in V^3$ ;

2.  $F = (\vec{u}, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  é uma base ortogonal positiva de  $V^3$ .

**Corolário V.10.8.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  vetores LI. Então,  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  onde

$$\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{j} = \frac{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}}{\|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u}\|}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|},$$

é uma base<sup>24</sup> ortonormal positiva de  $V^3$ .

**Exemplo V.10.9.** Ver Exercícios 31 a 33 em [Slide de Exercícios](#).

<sup>23</sup>O duplo produto vetorial não depende da orientação!

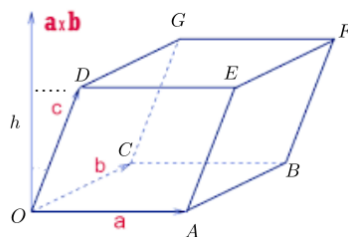
<sup>24</sup>Note que  $\vec{i}$  é paralelo a  $\vec{u}$ , e  $\vec{j}$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e de  $\vec{v}$ .

## V.11 Produto Misto

A definição do produto misto de três vetores (LI) no espaço é motivada pelo cálculo do volume de um paralelepípedo gerado por tais vetores.

### V.11.1 Volume de paralelepípedo e tetraedro

Calcular o volume  $V_P$  do paralelepípedo  $P = OABCDEFG$  determinado por três vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  LI de  $V^3$ .



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

- $V_P = (\text{área da base})(\text{altura}) = (\text{área paralelogramo } OABC)h$
- área da base =  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$
- $h = \|\text{proj}_{\vec{a} \wedge \vec{b}} \vec{c}\| \stackrel{\text{Prop. V.8.7}}{=} \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})|}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}$
- Portanto,

$$V_P = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})| = |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

**Definição V.11.1.** Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  três vetores de  $V^3$ .

O **produto misto** dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , **nessa ordem**, é o número real  $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ , denotado por  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ :

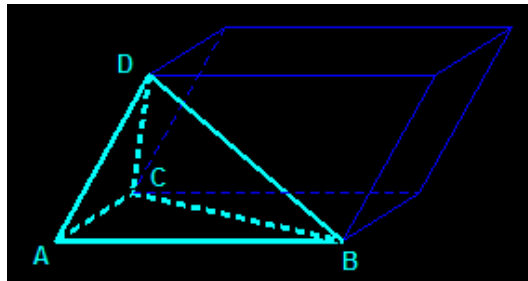
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] := (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$



**Nota.** Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vetores LI de  $V^3$ :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD}.$$

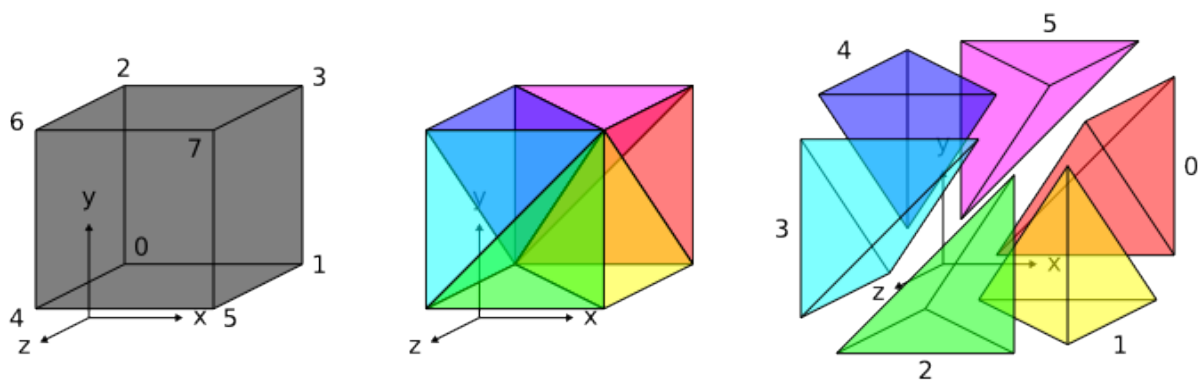
Estes vetores definem também um tetraedro:



Fonte: [http://www.polyhedra-world.nc/tetra\\_.htm](http://www.polyhedra-world.nc/tetra_.htm)

O volume do tetraedro é:

$$V_T = \frac{1}{6}(\text{volume do paralelepípedo determinado por } \vec{a}, \vec{b} \text{ e } \vec{c}).$$



Fonte: [https://www.dune-project.org/doxygen/2.6.0/classDune\\_1\\_1GridFactoryInterface.html](https://www.dune-project.org/doxygen/2.6.0/classDune_1_1GridFactoryInterface.html)

$$V_T = \frac{1}{6} |(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

COMO CALCULAR DE MANEIRA MAIS RÁPIDA O PRODUTO MISTO?

**Proposição V.11.2.** *Seja  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva. Se*

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_E, \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_E, \quad \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_E,$$

então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

**Corolário V.11.3.** *Sejam  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva e  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  três vetores de  $V^3$ .*

1.  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD se e somente se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ .
2.  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI se e somente se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ .

*Demonstração.* Imediata: veja Proposição [V.4.6](#). □

**Corolário V.11.4.** *Sejam  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva,  $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  e  $G = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  bases quaisquer de  $V^3$ . Então,*

1.  $\det M_{EF} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .
2.  $\det M_{FG} = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$ .

**Corolário V.11.5.** *Sejam  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva e  $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ , onde  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$  são três vetores de  $V^3$ .*

1. Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ , então  $F$  não é base.
2. Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ , então  $F$  é base;
  - (a) se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ , então  $F$  é base positiva;
  - (b) se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$ , então  $F$  é base negativa.

**Proposição (Propriedades do produto misto).**

Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i \in V^3$ ,  $i = 1, 2$ .

1. O produto misto é tri-linear:

$$(a) [\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + \beta[\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}];$$

$$(b) [\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w}] + \beta[\vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w}];$$

$$(c) [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1] + \beta[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2].$$

2. O produto misto é alternado:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] \\ &= -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] \\ &= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]. \end{aligned}$$

3. Se  $\vec{a} = a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}$ ,  $\vec{b} = a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}$  e  $\vec{c} = a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}$ , então:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

*Demonstração.* Para os itens 1 e 2 usar a definição de produto misto ([tarefa!](#)) e para o item 3 basta usar o Corolário [V.11.4](#).

□

**Exemplo V.11.6.** Ver Exercícios [34](#) e [35](#) em [Slide de Exercícios](#).

**Objetivo**

Introduzir um [sistema de coordenadas](#) no espaço Euclidiano  $E^3$ .

Apresentar as diferentes formas de [equação de reta](#):

- [vetorial](#) ou [paramétrica](#) ou [simétrica](#),

e de [equação de plano](#):

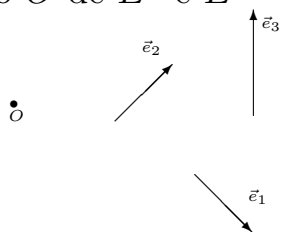
- [vetorial](#) ou [paramétrica](#) ou [geral](#).

Estudar as [posições relativas](#) entre tais objetos.

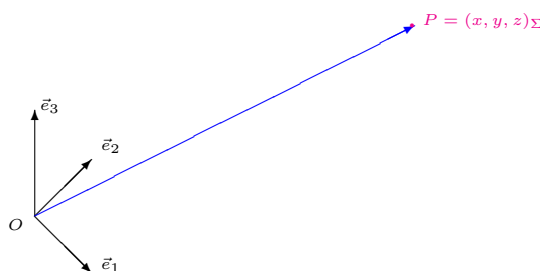
## V.12 Sistema de coordenadas

O sistema de coordenadas fornecerá um método para descrever pontos do espaço Euclidiano  $E^3$  através de números reais (ternas).

Sejam um ponto  $O$  de  $E^3$  e  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base de  $V^3$ .



O par  $\Sigma = (O, E)$  é chamado **sistema de coordenadas** em  $E^3$ , de **origem**  $O$  e **base**  $E$ .



O sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, E)$  é dito **ortogonal** se a base  $E$  é ortonormal.

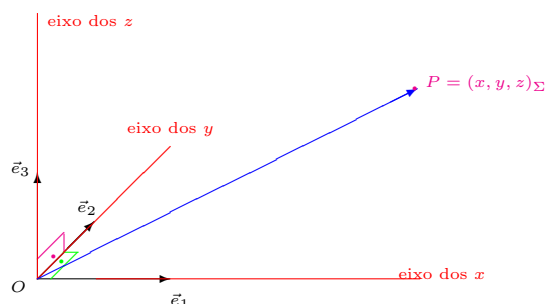
As **coordenadas do ponto**  $P$  em  $E^3$  **no sistema de coordenadas**  $\Sigma$  são as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$  na base  $E$ . Escrevemos:

$$P = (x, y, z)_\Sigma \quad \text{ou} \quad P = (x, y, z) \quad \iff \quad \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_E. \quad (\text{V.12.1})$$

### Cuidado para não confundir Ponto com Vetor!

As retas que passam por  $O$  e são paralelas aos vetores  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são chamadas **eixos coordenados**.

Cada um dos planos determinados por dois eixos coordenados chama-se **plano coordenado**.



**Exemplo V.12.1.** <sup>25</sup> Ver Exercício 36 em [Slide de Exercícios](#).

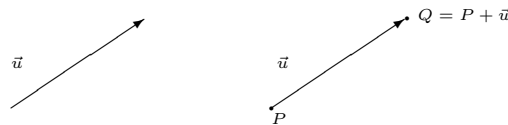
<sup>25</sup>Lembrar como somar vetores: Definição V.2.2 e Lei do Paralelogramo (Exemplo V.2.3)

### V.12.1 Soma de ponto com vetor

Seja  $P$  um ponto em  $E^3$  e  $\vec{u}$  um vetor em  $V^3$ .

O (único) ponto<sup>26</sup>  $Q$  em  $E^3$  tal que  $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$  é chamado **soma de  $P$  com  $\vec{u}$** :

$$P + \vec{u} = Q \iff \vec{u} = \overrightarrow{PQ}. \quad (\text{V.12.2})$$



A seguir obtemos algumas propriedades utilizando as coordenadas de vetor e as coordenadas de ponto<sup>27</sup>.

#### Proposição V.12.2.

Seja  $\Sigma = (O, E)$  um sistema de coordenadas em  $E^3$ . Se

$$A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma, \quad B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma, \quad e \quad \vec{u} = (a, b, c)_E,$$

então

- $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)_E;$

- $A + \lambda\vec{u} = (x_1 + \lambda a, y_1 + \lambda b, z_1 + \lambda c)_\Sigma,$  onde  $\lambda \in \mathbb{R}.$

**Lembre:** a distância,  $d(A, B)$ , entre dois pontos  $A$  e  $B$  é o número real

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

<sup>26</sup>Veja Nota 1 em [Slide 1](#)

<sup>27</sup>Rever Seção [V.4.1](#): Interpretação das propriedades de vetores usando coordenadas

**Proposição V.12.3.** Seja  $\Sigma = (O, E)$  um sistema ortogonal de coordenadas em  $E^3$ . Se

$$A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma, \quad B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma,$$

então

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

*Demonstração.* Ver Teorema V.8.2. □

**Atenção:** A proposição acima só vale quando o sistema é **ortogonal!**

Considere o sistema  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , onde:

- $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  são vetores unitários,
- $\vec{e}_3$  é ortogonal a  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  ;
- $\text{ang}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \pi/3$ .

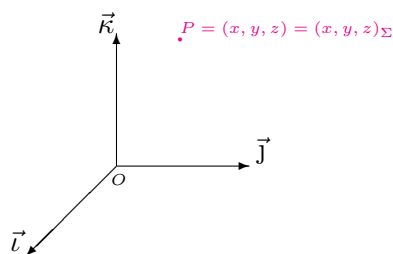
Verifique que ( **tarefa!**):

$$d(A, B) = 1,$$

enquanto

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{2}.$$

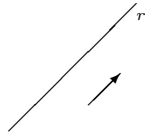
Quando o sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, E)$  for **ortogonal** e a base  $E$  (ortonormal) for **positiva**, indicaremos  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



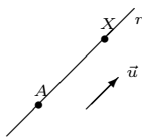
## V.13 Retas

**Objetivo:** Dada uma reta  $r$  em  $E^3$ , encontrar uma equação para  $r$ .

Um vetor não nulo paralelo à reta  $r$  é chamado de **vetor diretor** de  $r$ .



### V.13.1 Equação Vetorial



- $\vec{u}$  um vetor diretor de  $r$
- $A$  um ponto de  $r$  ( $A \in r$ )
- 

$X \neq A, X \in r \iff \overrightarrow{AX}$  e  $\vec{u}$  são paralelos

$\iff \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u}$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$

$\stackrel{\text{Eq. V.12.2}}{\iff} X = A + \lambda \vec{u}$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

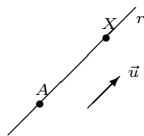
A equação:

$$r: X = A + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{V.13.1})$$

é chamada **equação vetorial da reta  $r$** . O escalar  $\lambda$  é chamado **parâmetro** da reta.



Para as próximas equações da reta, considere **fixado**  $\Sigma = (O, E)$  um sistema de coordenadas ortogonal em  $E^3$ .



- $X = (x, y, z)_\Sigma$
- $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma \in r$
- $\vec{u} = (a, b, c)_E \neq \vec{0}$  vetor diretor

### V.13.2 Equações paramétricas

- Escrevendo a equação vetorial em coordenadas:

$$r: (x, y, z)_\Sigma = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma + \lambda(a, b, c)_E, \lambda \in \mathbb{R}$$

O sistema:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} \quad (\text{V.13.2})$$

é chamado **sistema de equações paramétricas da reta  $r$**  (*equações paramétricas da reta  $r$ .*)

### V.13.3 Equações simétricas

- $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \implies$  é possível isolar  $\lambda$  nas equações em (V.13.2)

Se  $a \neq 0, b \neq 0$  e  $c \neq 0$ , o sistema:

$$r: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (\text{V.13.3})$$

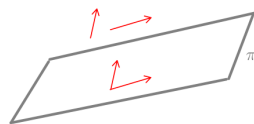
é chamado **sistema de equações simétricas da reta  $r$**  (*equações simétricas da reta  $r$ .*)

**Exemplo V.13.1.** Ver Exercício 37 em [Slide de Exercícios](#).

## V.14 Plano

**Objetivo:** Dado um plano  $\pi$  em  $E^3$ , encontrar uma equação para  $\pi$ .

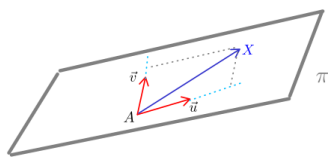
Dois vetores LI paralelos ao plano  $\pi$  são chamados **vetores diretores** de  $\pi$ .



A seguir deduzimos equações do plano  $\pi$  determinado pelos vetores diretores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e pelo ponto  $A \in \pi$ .

### V.14.1 Equação Vetorial

- $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores diretores de  $\pi$
- $A$  um ponto de  $\pi$



- 

$$X \neq A, X \in \pi \iff \overrightarrow{AX}, \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são coplanares}$$

$$\iff \overrightarrow{AX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \text{ para algum } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\iff X = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \text{ para algum } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

A equação:

$$\pi: X = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad (\text{V.14.1})$$

é chamada **equação vetorial do plano  $\pi$** . Os escalares  $\lambda$  e  $\mu$  são chamados **parâmetros** do plano.

Para as próximas equações da reta, considere **fixado**  $\Sigma = (O, E)$  um sistema de coordenadas ortogonal em  $E^3$ .

- $X = (x, y, z)_\Sigma$
- $A = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma$
- $u = (r, s, t)_E, \quad \vec{v} = (m, n, p)_E$

### V.14.2 Equações paramétricas

- Equação vetorial em coordenadas:

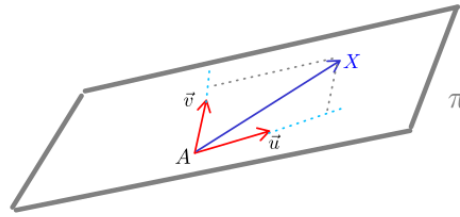
$$\pi: (x, y, z)_\Sigma = (x_0, y_0, z_0)_\Sigma + \lambda(r, s, t)_E + \mu(m, n, p)_E \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

O sistema:

$$\pi: \begin{cases} x = \mathbf{x}_0 + \lambda r + \mu m \\ y = \mathbf{y}_0 + \lambda s + \mu n, & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = \mathbf{z}_0 + \lambda t + \mu p \end{cases} \quad (\text{V.14.2})$$

é chamado **sistema de equações paramétricas do plano**  $\pi$  (*equações paramétricas do plano*  $\pi$ .)

### V.14.3 Equação Geral



$X \in \pi \iff \overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$  são LD

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \underbrace{(sp - tn)}_a x + \underbrace{(mt - rp)}_b y + \underbrace{(rn - sm)}_c z + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_d = 0.$$

A equação<sup>28</sup>:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0, \quad (\text{V.14.3})$$

onde

$$a = \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix}, \quad d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

é chamada **equação geral do plano**  $\pi$ .

**Exemplo V.14.1.** Ver Exercícios 38 a 40 em [Slide de Exercícios](#).

<sup>28</sup>Os números reais  $a, b, c$  não se anulam simultaneamente: veja Proposição V.4.4.

**Resumindo:**

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi, \quad \vec{u} = (r, s, t)_E, \vec{v} = (m, n, p)_E \text{ vetores diretores de } \pi \\ a := \begin{vmatrix} s & t \\ n & p \end{vmatrix}, \quad b := -\begin{vmatrix} r & t \\ m & p \end{vmatrix}, \quad c := \begin{vmatrix} r & s \\ m & n \end{vmatrix} \quad d := -(ax_0 + by_0 + cz_0) \\ ax + by + cz + d = 0 \text{ é uma}^{29} \text{ equação geral de } \pi \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a, b, c \text{ não se anulam simultaneamente} \\ ax + by + cz + d = 0 \text{ é uma equação de } 1^\circ \text{ grau em } x, y, z \end{array} \right.$$

**Pergunta:** Dada uma equação de  $1^\circ$  grau em três incógnitas  $x, y, z$ ,

$$ax + by + cz + d = 0,$$

ela é equação geral de algum plano?

**Proposição V.14.2.** Fixado um sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, E)$ , toda equação de  $1^\circ$  grau em três incógnitas, i.e.,

$$ax + by + cz + d = 0,$$

onde  $a, b$  e  $c$  são números reais que não se anulam simultaneamente, é equação geral de um plano.

**Exemplo V.14.3.** Ver Exercícios 41 a 43 em [Slide de Exercícios](#).

<sup>29</sup> $\alpha(ax + by + c + d) = 0$  para qualquer  $\alpha \neq 0$  também é uma equação geral de  $\pi$  pois:  $\vec{u}, \alpha\vec{v}$  OU  $\alpha\vec{u}, \vec{v}$  são LI, OU mais genericamente  $\alpha\vec{u}, \beta\vec{v}$  ( $\beta \neq 0$ ) são LI e  $\alpha\beta(ax + by + c + d) = 0$  é uma equação geral de  $\pi$ .

## V.15 Posição relativa entre retas e planos

**Objetivo:** Conhecendo equações de retas  $r$ ,  $s$  e de planos  $\pi$ ,  $\pi_1$ , obter um critério para analisar a posição relativa entre tais objetos.

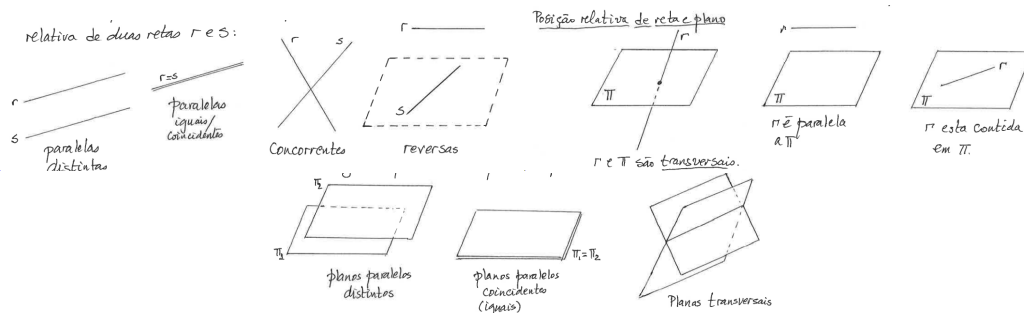


Figura 14: Fonte: Notas de aula prof. Tari

### V.15.1 Posição relativa entre duas retas

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas em  $E^3$ . Existem quatro possibilidades para as posições relativas de  $r$  e  $s$

- paralelas<sup>30</sup> coincidentes
- paralelas distintas
- concorrentes: se interceptam num ponto
- reversas: existe um plano  $\pi$  que contém a reta  $s$  e que é paralelo à reta  $r$  com  $r \not\subset \pi$

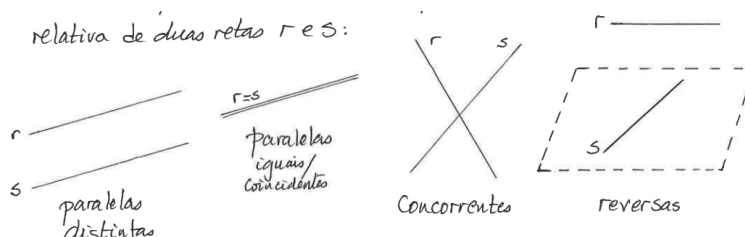


Figura 15: Fonte: Notas de aula prof. Tari

**Objetivo:** Conhecendo equações de  $r$  e  $s$ , obter um critério para analisar a posição relativa.

<sup>30</sup>duas retas são paralelas se possuem vetores diretores paralelos

**Proposição V.15.1.** *Suponha que*

$$r: X = A + \lambda \vec{r}, \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad s: X = B + \mu \vec{s}, \mu \in \mathbb{R}$$

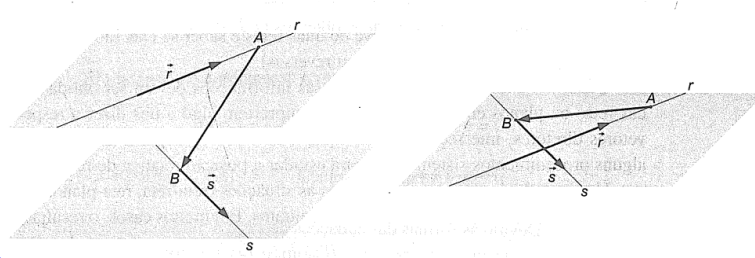


Figura 16: Fonte: Geometria Analítica - Paulo Boulos

1. Se  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  são LD<sup>31</sup>, então

(a)  $r$  e  $s$  são paralelas coincidentes  $\iff A \in s$  (ou  $B \in r$ ).

(b)  $r$  e  $s$  são paralelas distintas  $\iff A \notin s$ .

2. Se  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  são LI, então

(a)  $r$  e  $s$  são concorrentes  $\iff \vec{r}, \vec{s}$  e  $\overrightarrow{AB}$  são LD<sup>32</sup>.

(b)  $r$  e  $s$  são reversas  $\iff \vec{r}, \vec{s}$  e  $\overrightarrow{AB}$  são LI.

Se  $r$  e  $s$  são concorrentes e  $\vec{r} \perp \vec{s}$ , dizemos que  $r$  e  $s$  são **perpendiculares**.

Se  $r$  e  $s$  são reversas e  $\vec{r} \perp \vec{s}$ , dizemos que  $r$  e  $s$  são **ortogonais** ou **perpendiculares**.

**Exemplo V.15.2.** Ver Exercícios 44 e 45 em [Slide de Exercícios](#).

<sup>31</sup>Lembre-se da Proposição V.4.4.

<sup>32</sup>Lembre-se da Proposição V.4.6.

### V.15.2 Posição relativa entre retas e planos

Sejam  $r$  uma reta e  $\pi$  um plano em  $E^3$ . Existem três possibilidades para a posição relativas de  $r$  e  $\pi$

- $r$  e  $\pi$  são transversais: se interceptam num ponto (vetor diretor de  $r$  não é paralelo ao plano)
- $r$  é paralela ao plano  $\pi$ : vetor diretor de  $r$  é paralelo ao plano  $\pi$  e  $r \not\subset \pi$
- $r$  está contida no plano  $\pi$

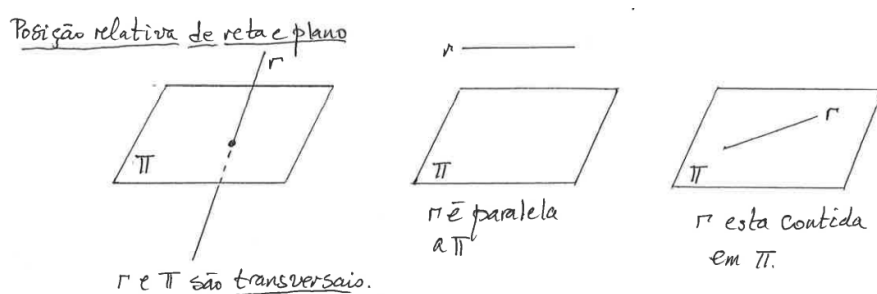


Figura 17: Fonte: Notas de aula prof. Tari

**Objetivo:** Conhecendo equações de  $r$  e  $\pi$ , obter um critério para analisar a posição relativa.

**Proposição V.15.3.** Sejam  $ax + by + cz + d = 0$  uma equação geral de um plano  $\pi$ ,  $\vec{n} := (a, b, c)$  e  $\vec{u} = (m, p, q)$  um vetor. Então,  $\vec{u}$  é paralelo a  $\pi$  se, e somente se,

$$am + bp + cq = 0 \quad \stackrel{\text{s.c.o}}{\iff} \quad \vec{n} \cdot \vec{u} = 0.$$

**Corolário V.15.4.** Sejam  $ax + by + cz + d = 0$  uma equação geral de um plano  $\pi$ ,  $\vec{n} = (a, b, c)$ ,  $A$  um ponto de uma reta  $r$  e  $\vec{r} = (m, p, q)$  um vetor diretor de  $r$ . Então,

1.  $r$  e  $\pi$  são transversais  $\iff am + bp + cq \neq 0 \stackrel{\text{s.c.o}}{\iff} \vec{n} \cdot \vec{r} \neq 0$ ;
2.  $r$  é paralela a  $\pi$   $\iff am + bp + cq = 0$  e  $A \notin \pi \stackrel{\text{s.c.o}}{\iff} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0$  e  $A \notin \pi$ ;
3.  $r$  está contida em  $\pi$   $\iff am + bp + cq = 0$  e  $A \in \pi \stackrel{\text{s.c.o}}{\iff} \vec{n} \cdot \vec{r} = 0$  e  $A \in \pi$ .

**Exemplo V.15.5.** Ver Exercícios 59 e 60 em [Slide de Exercícios](#).



### V.15.3 Posição relativa entre dois planos

Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  dois planos em  $E^3$ . Sabemos que existem três possibilidades para a posição relativas.

- paralelos distintos
- paralelos coincidentes
- concorrentes/transversais: se interceptam numa reta.

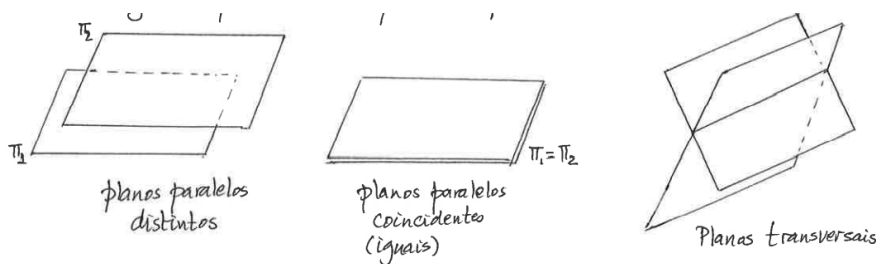


Figura 18: Fonte: Notas de aula prof. Tari

**Objetivo:** Conhecendo equações de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , obter um critério para analisar a posição relativa.

**Proposição V.15.6.** Considere os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  com equações gerais

$$\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad e \quad \pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

e  $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)$ . Então,

1.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos distintos  $\iff$  existe  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que

$$\vec{n}_1 = k \vec{n}_2^{33} \quad e \quad d_1 \neq kd_2.$$

2.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos coincidentes  $\iff$  existe  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que

$$\vec{n}_1 = k \vec{n}_2 \quad e \quad d_1 = kd_2.$$

3.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são transversais  $\iff$  para qualquer  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\vec{n}_1 \neq k \vec{n}_2^{34} \quad e \quad d_1 \neq kd_2.$$

*Demonstração.* **Tarefa!** (veja Boulos, p. 196) (outra técnica é usar **vetor normal ao plano** que veremos mais adiante) □

**Exemplo V.15.7.** Ver Exercício 61 em [Slide de Exercícios](#).

<sup>9</sup> $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1, \vec{n}_2$  são LD.

<sup>34</sup> $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1, \vec{n}_2$  são LI.

### V.15.3.1 Equação de reta: forma planar

Se os vetores  $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)$  são LI, então o sistema

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

descreve uma reta (pois é a intersecção de dois planos transversais) e é chamado **sistema de equações na forma planar** de  $r$ .

**Proposição.** Um vetor  $\vec{u}$  é paralelo à reta  $r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$  se, e somente se,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0 \quad e \quad \vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0.$$

A SEGUIR APRESENTAREMOS UMA TÉCNICA ESPECÍFICA PARA RESOLUÇÃO DE ALGUNS TIPOS DE PROBLEMAS, A QUAL:

- AUXILIA EM REDUZIR O NÚMERO DE INCÓGNITAS NO PROBLEMA
- EFICIENTE EM PROBLEMAS QUE ENVOLVEM ÂNGULOS E DISTÂNCIAS

A TÉCNICA É CHAMADA “**TÉCNICA DO FEIXE**”, ONDE **FEIXE** SIGNIFICA O CONJUNTO DE TODOS OBJETOS DE  $E^3$  COM UMA DADA PROPRIEDADE.

TRATAREMOS DE DOIS CASOS:

- **Feixe de planos paralelos a um plano  $\pi$** : CONJUNTO DE TODOS OS PLANOS DE  $E^3$  QUE SÃO PARALELOS A  $\pi$

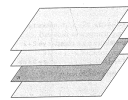
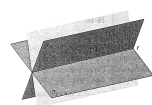


Figura 19: P. Boulos

- **Feixe de planos que contém uma reta  $r$** : CONJUNTO DE TODOS OS PLANOS DE  $E^3$  QUE CONTÉM  $r$



### V.15.4 Feixe de planos paralelos a um plano $\pi$

**Objetivo:** Conhecendo equação de  $\pi$ , obter um critério para obter todos os planos paralelos a  $\pi$ .

---

- $\pi: ax + by + cz + d = 0$

- $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

- $a_1 = ?, b_1 = ?, c_1 = ?, d_1 = ?$

- $\pi_1 \parallel \pi \stackrel{\text{Prop.V.15.6}}{\iff} (a_1, b_1, c_1) = k(a, b, c)$  para alguma  $k \neq 0$ :

$$\pi_1: kax + kby + kcz + d_1 = 0 \iff \pi_1: ax + by + cz + \frac{d_1}{k} = 0$$

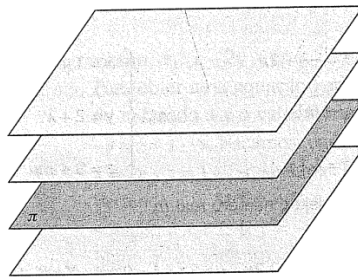
- $\pi_1 \parallel \pi \iff \pi_1: ax + by + cz + \alpha = 0$  para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$

---

**Proposição V.15.8.** Dado o plano  $\pi: ax + by + cz + d = 0$ , a equação

$$ax + by + cz + \alpha = 0$$

quando  $\alpha$  percorre  $\mathbb{R}$  descreve o feixe de planos paralelos a  $\pi$ .



**Exemplo V.15.9.** O feixe de planos paralelos ao plano

$$\pi: x + y + 2z - 1 = 0$$

é dado por

$$\pi_\alpha: x + y + 2z + \alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

### V.15.5 Feixe de planos que contém uma reta $r$

**Objetivo:** Conhecendo equação de  $r$ , obter um critério para obter todos os planos que contém  $r$ .

- $r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$  com  $\vec{n}_1 := (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{n}_2 := (a_2, b_2, c_2)$  LI (eq. planares de  $r$ )

- $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  contém  $r$

- $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  contém  $r$

- $\pi : ax + by + cz + d = 0$  plano qualquer que contenha  $r$ ;  $\vec{n} := (a, b, c)$

- $a = ?, b = ?, c = ?, d = ?$

- 

$$r \in \pi \cap \pi_1 \cap \pi_2 \implies \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ ax + by + cz = -d \end{cases} \text{ é indeterminado (infinitas soluções)}$$

$$\implies \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \implies \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n} \text{ são LD}$$

$$\implies \exists \alpha_1, \beta_1, \gamma \in \mathbb{R} \text{ não todos nulos; } \alpha_1 \vec{n}_1 + \beta_1 \vec{n}_2 + \gamma \vec{n} = 0$$

$$\xrightarrow[\substack{\vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ LI} \\ a, b, c \text{ não todos nulos}}]{\implies} \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (não ambos nulos); } \vec{n} = \alpha \vec{n}_1 + \beta \vec{n}_2$$

$$\implies \begin{cases} a = \alpha a_1 + \beta a_2 \\ b = \alpha b_1 + \beta b_2 \\ c = \alpha c_1 + \beta c_2 \end{cases}$$

- $P = (x_0, y_0, z_0) \in r \cap \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi \implies \begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 = 0 & (\times \alpha) \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 = 0 & (\times \beta) \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 & (\times -1) \end{cases}$

$$\implies d = \alpha d_1 + \beta d_2$$

- $\pi : \alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$

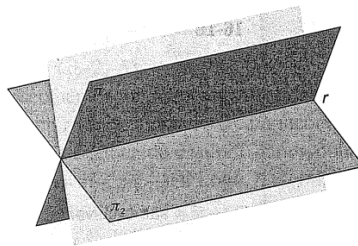
**Proposição V.15.10.** *Seja  $r$  a reta de equações planares*

$$r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

*O feixe de planos que contém  $r$  é descrito pela equação*

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

*com  $\alpha, \beta$  percorrendo  $\mathbb{R}$  tais que  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ .*



**Exemplo V.15.11.** Ver Exercício 62 em [Slide de Exercícios](#).

### Objetivo

Estudar **ortogonalidade** e **perpendicularismo** de retas e planos do espaço Euclidiano  $E^3$ .

Obter a **medida angular** entre retas ou entre planos ou entre reta e plano e a **distância** entre pontos, retas e planos.

### Lembre-se:

Para usarmos as fórmulas para o cálculo de distância entre pontos ou de produto escalar entre vetores precisamos de uma **base ortonormal** e portanto de um **sistema de coordenadas ortogonal**: veja Teorema [V.8.2](#).

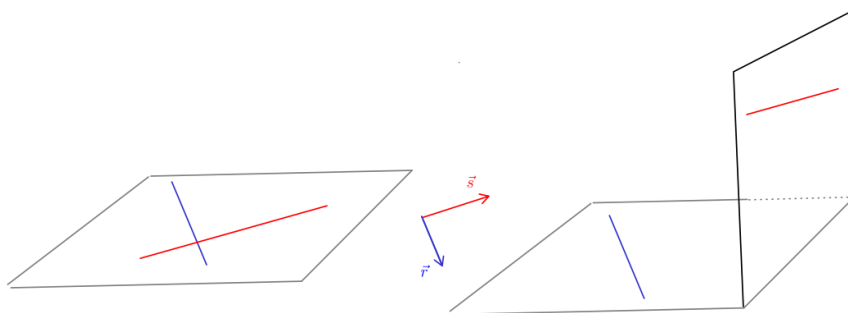
Para usarmos as fórmulas para o cálculo de produto vetorial entre vetores precisamos de uma **base ortonormal positiva**: veja Teorema [V.10.2](#).

SEMPRE QUE USARMOS TAIS FÓRMULAS ESTAREMOS CONSIDERANDO UM SISTEMA ORTOGONAL COM BASE POSITIVA.

## V.16 Ortogonalidade e perpendicularismo

Vimos na Proposição V.15.1 que duas retas  $r$  e  $s$  no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas e que: se  $\vec{r} \perp \vec{s}$ , e

- se  $r$  e  $s$  são concorrentes, então  $r$  e  $s$  são **perpendiculares**.
- se  $r$  e  $s$  são reversas, então  $r$  e  $s$  são **ortogonais** ou **perpendiculares**.




---

QUANDO UMA RETA É PERPENDICULAR A UM PLANO?

QUANDO DOIS PLANOS SÃO PERPENDICULARES?

---

### V.16.1 Vetor Normal

Seja  $\pi$  um plano em  $E^3$ . Um **vetor normal** a  $\pi$  é qualquer vetor não nulo  $\vec{n}$  ortogonal a  $\pi$ .

---

**Nota.**

- Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a qualquer vetor paralelo ao plano.
- Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a quaisquer vetores diretores do plano.
- Um vetor é normal ao plano se, e somente se, é ortogonal a dois vetores diretores do plano.

---

 COMO ENCONTRAR UM VETOR NORMAL A  $\pi$ ?
 

---

- $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores diretores de  $\pi$ .
- 

$\vec{\eta}$  não nulo é normal a  $\pi \iff \vec{\eta}$  é ortogonal a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$

$\begin{array}{c} \vec{u}, \vec{v} \text{ LI} \\ \iff \\ \text{Def. V.10.1} \end{array} \vec{\eta} \text{ e } \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ são paralelos.}$

- $\vec{\eta} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  é um vetor normal a  $\pi$

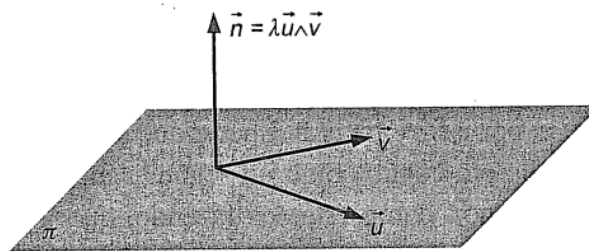


Figura 20: P. Boulos

---

 QUAL A RELAÇÃO ENTRE VETOR NORMAL E EQUAÇÃO GERAL DE  $\pi$ ?
 

---

- $\pi : ax + by + cz + d = 0$  com  $a, b, c$  não todos nulos
- 

$$\vec{u} = (m, n, p) \parallel \pi \quad \begin{array}{c} \text{Prop. V.15.3} \\ \iff \\ \text{base orton.} \end{array} \quad (a, b, c) \cdot (m, n, p) = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{Prop. V.8.2} \\ \iff \\ \text{base orton.} \end{array} \quad \vec{\eta} = (a, b, c) \perp \vec{u}$$

- $\vec{\eta} = (a, b, c) \neq \vec{0}$  é vetor normal a  $\pi$



A recíproca também vale:

**Proposição V.16.1.** *Considere em  $E^3$  um sistema de coordenadas ortogonal. Então  $\vec{\eta} = (a, b, c) \neq \vec{0}$  é um vetor normal a  $\pi$  se, e somente se,  $\pi$  possui equação geral da forma*

$$ax + by + cz + d = 0.$$

**Nota.** A proposição acima **não é válida** se o sistema de coordenadas não é ortogonal.

**Exemplo V.16.2.** Sejam  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal e  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  outra base onde

$$\vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Considere o sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, E)$ . Obtenha um vetor normal ao plano  $\pi$  de equação  $z = 0$  no sistema  $\Sigma$ .

### Consequência:

1. Se  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são vetores normais, respectivamente, aos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  e  $\vec{r}$  é um vetor diretor da reta  $r$ , então
  - (a)  $r$  e  $\pi$  são perpendiculares se e somente se  $\vec{r}$  e  $\vec{n}$  são paralelos;
  - (b)  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são perpendiculares se e somente se  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são ortogonais;
  - (c)  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos se e somente se  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são paralelos.

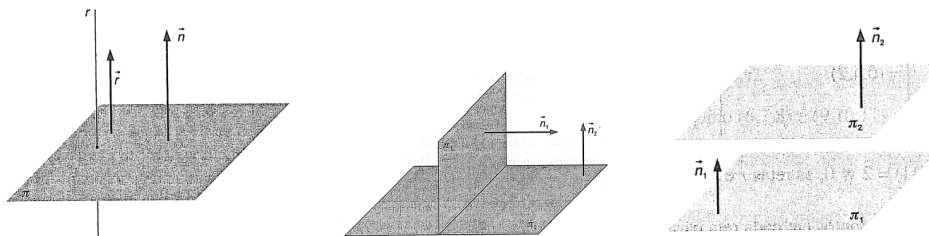


Figura 21: P. Boulos

**Exemplo V.16.3.** Ver Exercícios 63 e 64 em [Slide de Exercícios](#).

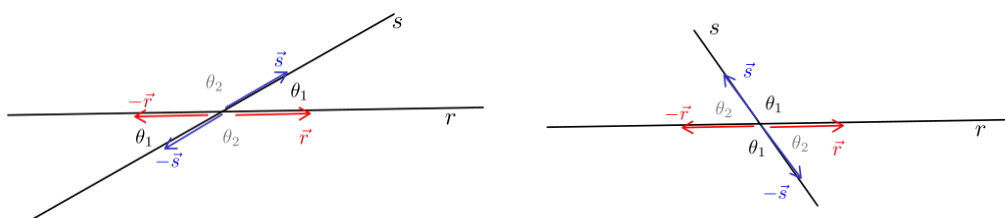
## V.17 Medida Angular

### V.17.1 Medida angular entre retas

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas com vetores diretores  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ <sup>35</sup>.

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre  $r$  e  $s$**  é a menor medida entre as medidas angulares dos vetores diretores de  $r$  e de  $s$ :

$$\min\{ang(\vec{r}, \vec{s}) = ang(-\vec{r}, -\vec{s}), ang(\vec{r}, -\vec{s}) = ang(-\vec{r}, \vec{s}), \}$$



Denotamos por  $ang(r, s)$  a medida angular entre  $r$  e  $s$  e temos

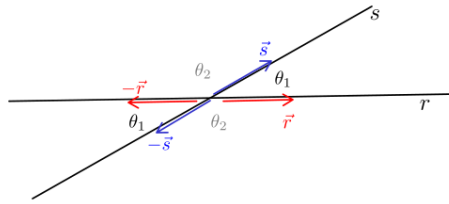
$$0 \leq ang(r, s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

- se  $ang(r, s) = 0$  então  $r$  e  $s$  são paralelas
- se  $ang(r, s) = \frac{\pi}{2}$  então  $r$  e  $s$  são ortogonais (podem ser concorrentes ou reversas)

COMO CALCULAR O ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS?

<sup>35</sup>  $-\vec{r}$  e  $-\vec{s}$  também são vetores diretores

- $\theta_1 = \text{ang}(\vec{r}, \vec{s})$
- $\theta_2 = \text{ang}(-\vec{r}, \vec{s})$



- $\theta_2 = \pi - \theta_1 \implies \cos \theta_2 = -\cos \theta_1$
- $\cos(\text{ang}(r, s)) = \begin{cases} \cos \theta_1, & \theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\cos \theta_1, & \theta_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} = |\cos \theta_1|$
- $\cos \theta_1 \stackrel{\text{Prop. V.7.5}}{=} \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}$

Portanto,

se  $r$  e  $s$  são duas retas em  $E^3$ , então

$$\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|}, \quad (\text{V.17.1})$$

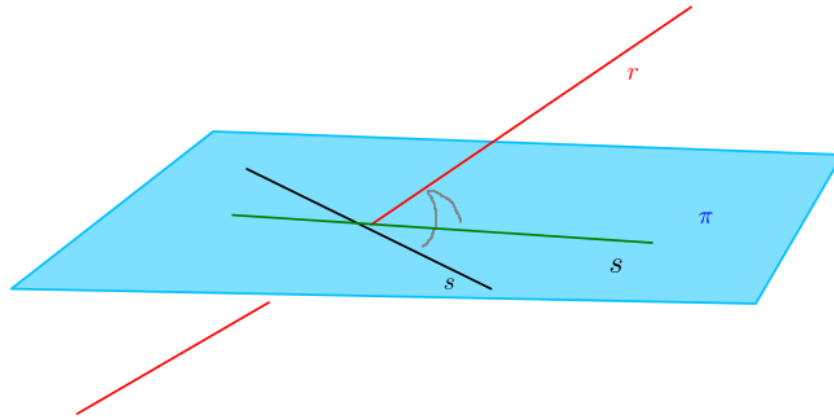
onde  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$  são vetores diretores de  $r$  e  $s$ , respectivamente.

**Exemplo V.17.1.** Ver Exercício 65 em [Slide de Exercícios](#).

### V.17.2 Medida angular entre reta e plano

Sejam  $r$  uma reta transversal a um plano  $\pi$  em  $E^3$ .

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre  $r$  e  $\pi$**  é a menor medida dentre todas as medidas angulares entre  $r$  e retas  $s$  contidas em  $\pi$ .




---

COMO CALCULAR O ÂNGULO ENTRE UMA RETA E UM PLANO?

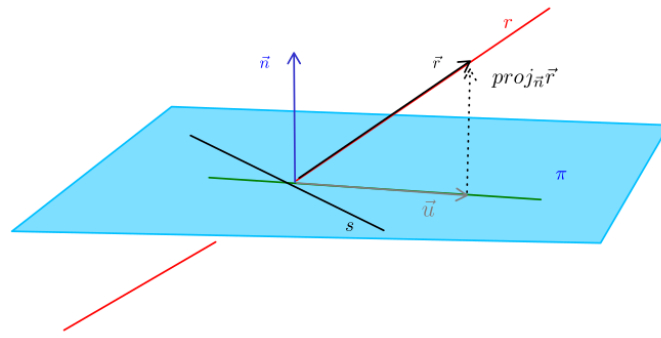
---

- $\vec{r}$  um vetor diretor da reta  $r$
  - $s$  uma reta qualquer em  $\pi$
- 

QUANDO O ÂNGULO ENTRE  $r$  E  $s$  É MÍNIMO?  
 QUAL UM VETOR DIRETOR ADEQUADO PARA  $s$ ?

---

- $\vec{n}$  um vetor normal ao plano  $\pi$ .
- $\vec{u}$  a projeção ortogonal de  $\vec{r}$  ao plano  $\pi$ :



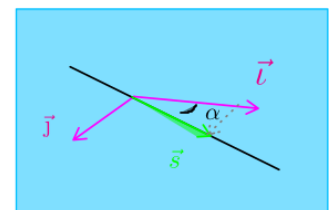
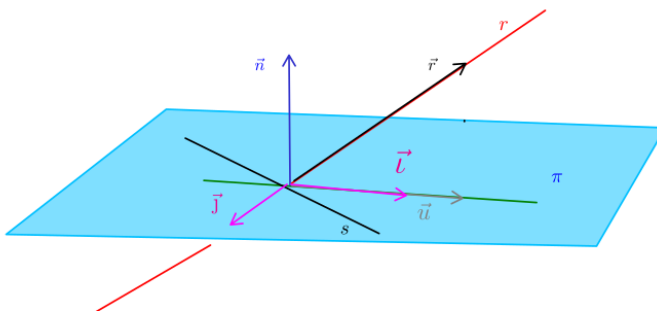
$$proj_{\vec{n}}\vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{r} \quad (\text{Proposição V.8.7})$$

$$\vec{r} = proj_{\vec{n}}\vec{r} + \vec{u} \implies \vec{u} = \vec{r} - proj_{\vec{n}}\vec{r} \implies \vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

$$\vec{s} = ??$$

- $\vec{l} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{j} = \vec{l} \wedge \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

$\vec{l}$  e  $\vec{j}$  são vetores diretores de  $\pi$ , unitários e ortogonais



- $\vec{s} = \cos \alpha \vec{l} + \sin \alpha \vec{j}$  é um vetor diretor unitário de  $s$ ,  $\alpha = \text{ang}(\vec{s}, \vec{l})$

$$\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{s}\|} = ??$$

- $\vec{r} \cdot \vec{s} = (\cos \alpha) \vec{r} \cdot \vec{l} + (\sin \alpha) \vec{r} \cdot \vec{j}$

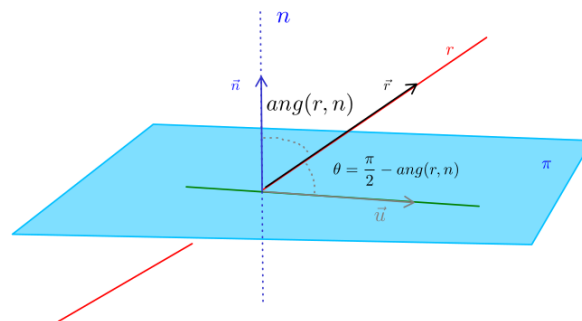
- $\vec{j} \perp \vec{u}$  e  $\vec{j} \perp \vec{n}$  e  $\boxed{\vec{u} = \vec{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}} \implies \vec{r} \cdot \vec{j} = 0$

- $\vec{r} \cdot \vec{s} = (\cos \alpha) \vec{r} \cdot \vec{l}$

- 

$$\cos(\text{ang}(r, s)) = \frac{|\cos \alpha \vec{r} \cdot \vec{l}|}{\|\vec{r}\|} = \frac{|\cos \alpha| |\vec{r} \cdot \vec{l}|}{\|\vec{r}\|} \stackrel{\text{Des. Schwarz V.7.5}}{=} \frac{|\cos \alpha| \|\vec{r}\| \|\vec{l}\|}{\|\vec{r}\|} = |\cos \alpha|$$

- $\text{ang}(r, s)$  é mínimo  $\stackrel{\text{arccos dec.}}{\iff} \boxed{\alpha = 0} \iff s$  é a projeção ortogonal de  $r$  em  $\pi$



**Proposição V.17.2.** A medida angular entre uma reta  $r$  transversal a um plano  $\pi$  é dada por

$$\text{ang}(\mathbf{r}, \pi) = \frac{\pi}{2} - \text{ang}(r, n),$$

onde  $n$  é uma reta ortogonal a  $\pi$ .

- $\sin(\text{ang}(r, \pi)) = \sin(\frac{\pi}{2} - \text{ang}(r, n)) = \cos(\text{ang}(r, n))$

Por (V.17.1),

se  $r$  é uma reta transversal ao plano  $\pi$ , então

$$\sin(\text{ang}(r, \pi)) = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{r}\| \|\vec{n}\|}, \quad (\text{V.17.2})$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor normal a  $\pi$ .

### V.17.3 Medida angular entre planos

Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  dois planos transversais em  $E^3$ .

A **medida angular** (ou o **ângulo**) **entre  $\pi_1$  e  $\pi_2$**  é a medida angular entre duas retas quaisquer  $r_1$  e  $r_2$  perpendiculares a  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente.

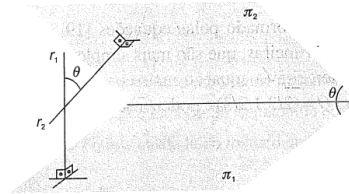


Figura 22: P. Boulos

#### COMO CALCULAR O ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS?

- $\vec{\eta}_1$  um vetor normal ao plano  $\pi_1$
- $\vec{\eta}_2$  um vetor normal ao plano  $\pi_2$
- $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$  são vetores diretores de  $r_1$  e  $r_2$
- $\cos(\text{ang}(\pi_1, \pi_2)) = \cos(\text{ang}(r_1, r_2))$

Por (V.17.1),

se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são planos transversais, então

$$\cos(\text{ang}(\pi_1, \pi_2)) = \frac{|\vec{\eta}_1 \cdot \vec{\eta}_2|}{\|\vec{\eta}_1\| \|\vec{\eta}_2\|}, \quad (\text{V.17.3})$$

onde  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  são vetores normais aos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente.

**Exemplo V.17.3.** Ver Exercícios 66 e 67 em [Slide de Exercícios](#).

## V.18 Distância

### V.18.1 Entre dois pontos

A **distância entre dois pontos**  $A = (x_1, y_1, z_1)_\Sigma$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)_\Sigma$  de  $E^3$  é o número real

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Se  $\Sigma$  é um sistema de coordenadas ortogonal,  $d(A, B)$  pode ser calculada por (ver Proposição V.12.3):

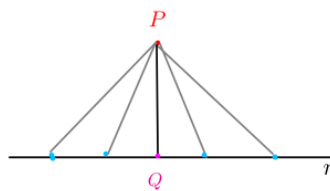
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (\text{V.18.1})$$

**Exemplo V.18.1.** Ver Exercício 68 em [Slide de Exercícios](#).

### V.18.2 Entre um ponto e uma reta

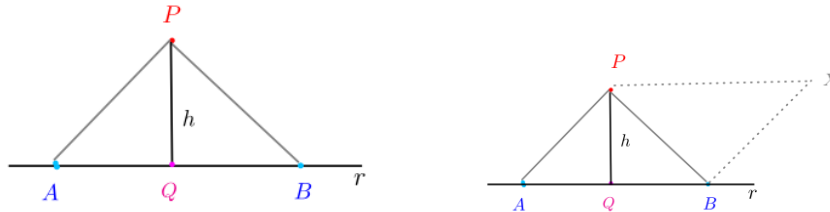
Sejam  $P$  um ponto e  $r$  uma reta em  $E^3$  tais que  $P$  não pertença a  $r$ .

**Definição V.18.2.** A **distância entre o ponto  $P$  e a reta  $r$** , denotada por  $d(P, r)$ , é a menor das distâncias entre  $P$  e os pontos de  $r$ , a qual é dada pela distância de  $P$  ao ponto  $Q$  da projeção ortogonal de  $P$  a  $r$ .



COMO CALCULAR  $d(P, Q)$ ?





- $A$  e  $B$  pontos distintos de  $r$
- $Q$  a projeção ortogonal de  $P$  a  $r$  ( $Q = r \cap s$ ,  $s$  única reta perpendicular a  $r$  passando por  $P$ )
- $h = d(P, Q) = ?$
- área do triângulo  $ABP$  é:

$$\frac{1}{2}h\|\overrightarrow{AB}\|$$

- área do paralelogramo  $ABPX$  é  $\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|$

$$area(ABP) = \frac{1}{2}area(ABXP)$$

Como  $r := \overrightarrow{AB}$  é um vetor diretor de  $r$ , temos

se  $P$  é um ponto não pertencente a uma reta  $r$  em  $E^3$ , então

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}, \quad (\text{V.18.2})$$

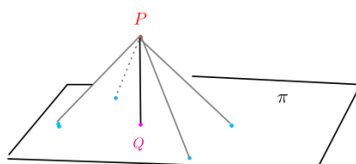
onde  $\vec{r}$  é um vetor diretor de  $r$  e  $A$  um ponto de  $r$  quaisquer.

**Exemplo V.18.3.** Ver Exercício 69 em [Slide de Exercícios](#).

### V.18.3 Entre um ponto e um plano

Sejam  $P$  um ponto e  $\pi$  um plano em  $E^3$  tais que  $P$  não pertença a  $\pi$ .

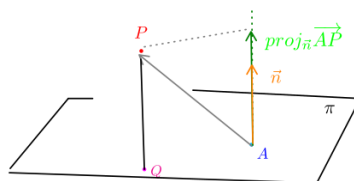
**Definição V.18.4.** A **distância entre o ponto  $P$  e o plano  $\pi$** , denotada por  $d(P, \pi)$ , é a menor das distâncias entre  $P$  e os pontos de  $\pi$  e é dada pela distância  $d(P, Q)$  de  $P$  ao ponto  $Q$  da projeção ortogonal de  $P$  a  $\pi$ .




---

COMO CALCULAR  $d(P, Q)$ ?

---



- $A$  ponto qualquer de  $\pi$
- $Q$  a projeção ortogonal de  $P$  a  $\pi$
- $d(P, \pi) = d(P, Q) = \|\text{proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{AP}\|$

Pela Proposição V.8.7,

se  $P$  é um ponto não pertencente a um plano  $\pi$  em  $E^3$ , então

$$d(P, \pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \quad (\text{V.18.3})$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor normal a  $\pi$  e  $A$  um ponto de  $\pi$  quaisquer.

**Em particular:**

Se  $\pi: ax + by + cz + d = 0$ ,  $P = (x_0, y_0, z_0)$  e  $A = (x_1, y_1, z_1)$ , então

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**Exemplo V.18.5.** Ver Exercício 70 em [Slide de Exercícios](#).

### V.18.4 Entre retas

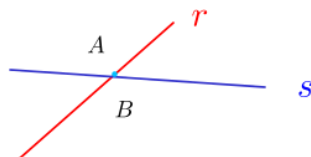
Sejam  $r$  e  $s$  duas retas em  $E^3$ .

**Definição V.18.6.** A **distância entre a reta  $r$  e a reta  $s$** , denotada por  $d(r, s)$ , é a menor das distâncias entre os pontos  $A$  de  $r$  e os pontos  $B$  de  $s$ .

•

Se  $r$  e  $s$  são concorrentes ou paralelas idênticas, então

$$d(r, s) = 0.$$



•

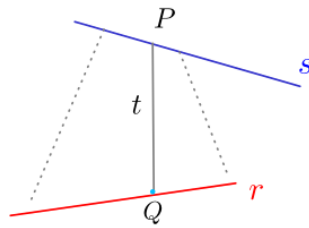
Se  $r$  e  $s$  são paralelas distintas, então

$$d(r, s) = d(A, s) = d(B, r) \stackrel{\text{Eq. V.18.2}}{=} \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|},$$

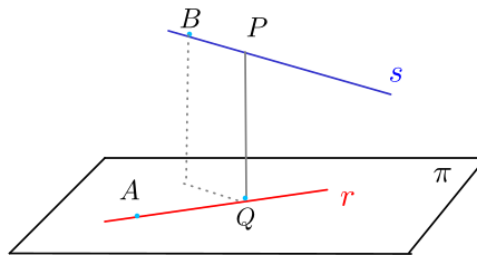
onde  $A \in r$  e  $B \in s$ .



- Se  $r$  e  $s$  são reversas,  $d(r, s) = d(P, Q)$  onde  $P$  e  $Q$  são pontos de intersecção de  $r$  e  $s$ , respectivamente, com uma reta  $t$  perpendicular a  $r$  e  $s$ .



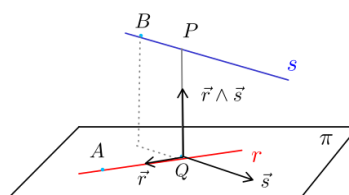
SE  $r$  E  $s$  SÃO REVERSAS, COMO CALCULAR  $d(r, s) = d(P, Q)$ ?



- $\pi$  plano que contém  $r$  e é paralelo a  $s$
- $B$  um ponto qualquer de  $s$
- $d(P, Q) = d(B, \pi)$

PRECISAMOS DE UM PONTO EM  $\pi$  E UM VETOR NORMAL A  $\pi$

- $A$  um ponto qualquer de  $r$  ( $\because A \in \pi$ )
- $\vec{r}$  vetor diretor de  $r$
- $\vec{s}$  vetor diretor de  $s$
- $\vec{r} \wedge \vec{s}$  é vetor normal a  $\pi$



Pela Equação V.18.3,

se  $r$  e  $s$  são retas reversas, então

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{\|\vec{r} \wedge \vec{s}\|}, \quad (\text{V.18.4})$$

onde  $\vec{r}, \vec{s}$  são vetores diretores e  $A, B$  pontos (resp.) de  $r$  e  $s$  quaisquer.

**Exemplo V.18.7.** Ver Exercício 71 em [Slide de Exercícios](#).

### V.18.5 Entre reta e plano

Sejam  $r$  uma reta e  $\pi$  um plano em  $E^3$ .

**Definição V.18.8.** A **distância entre a reta  $r$  e o plano  $\pi$** , denotada por  $d(r, \pi)$ , é a menor das distâncias entre os pontos  $A$  de  $r$  e os pontos  $B$  de  $\pi$ .

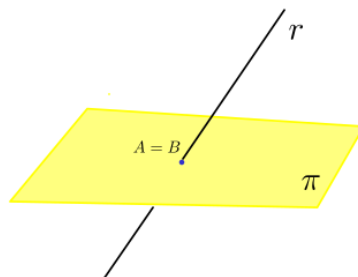
COMO CALCULAR  $d(r, \pi)$ ?

- $\vec{r}$  vetor diretor de  $r$  e  $\vec{n}$  vetor normal a  $\pi$ :

- 

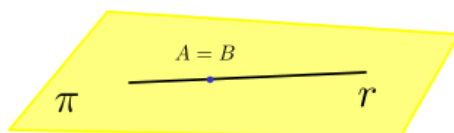
Se  $r$  é transversal a  $\pi$  ( $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$ ), então

$$d(r, \pi) = 0.$$

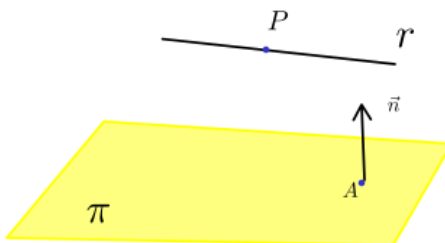


Se  $r$  está contida em  $\pi$  ( $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ ), então

$$d(r, \pi) = 0.$$



• Se  $r$  é paralela a  $\pi$  e  $r \not\subset \pi$  ( $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ ), então  $d(r, \pi) = d(P, \pi)$ .



Pela Equação V.18.3,

se  $r$  é paralela a  $\pi$  e  $r \not\subset \pi$ , então

$$d(r, \pi) = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \quad (\text{V.18.5})$$

onde  $A$  é um ponto de  $\pi$ ,  $\vec{n}$  é vetor normal a  $\pi$  e  $P$  é um ponto de  $r$ .

### V.18.6 Entre planos

Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  planos em  $E^3$ .

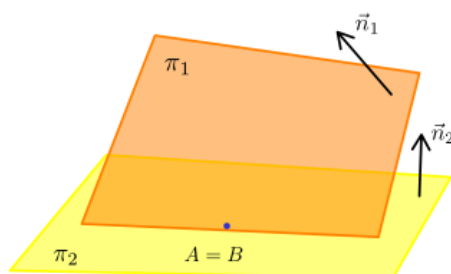
**Definição V.18.9.** A **distância entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$** , denotada por  $d(\pi_1, \pi_2)$ , é a menor das distâncias entre os pontos  $A$  de  $\pi_1$  e os pontos  $B$  de  $\pi_2$ .

COMO CALCULAR  $d(\pi_1, \pi_2)$ ?

- $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  vetores normais a  $\pi_1$  e  $\pi_2$ :

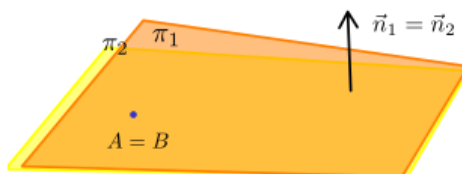
Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são transversais ( $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  LI), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$



Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são idênticos ( $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  LD), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = 0.$$



- Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos distintos ( $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  LD), então

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = d(Q, \pi_1),$$

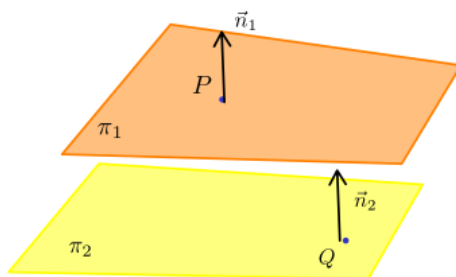
para quaisquer  $P \in \pi_1$  ou  $Q \in \pi_2$ .

Pela Equação [V.18.3](#),

se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos distintos, então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}, \quad (\text{V.18.6})$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor normal a  $\pi_1$  (ou  $\pi_2$ ),  $P$  é um ponto de  $\pi_1$  e  $Q$  um ponto de  $\pi_2$  quaisquer.



Em particular (**Tarefa!**):

Se  $P = (x_0, y_0, z_0)$  é um ponto de  $\pi_1$  e

$$\pi_1: ax + by + cz + d_1 = 0, \quad \pi_2: ax + by + cz + d_2 = 0,$$

então

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Exemplo V.18.10.** Ver Exercícios [72](#) a [75](#) em [Slide de Exercícios](#).



## Objetivo

Tratar sobre a **mudança de sistema de coordenadas**:

- estudar como passar as coordenadas de um ponto em um sistema de coordenadas para um outro sistema de coordenadas;

- estabelecer relações entre as coordenadas de um ponto dado num sistema com as coordenadas relação ao outro sistema.

Estudar os casos particulares de **translação** e **rotação**:  
serão utilizados no estudo de cônicas.

## V.19 Mudança de Sistema de Coordenadas

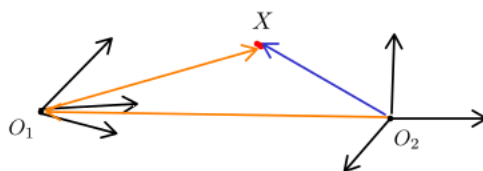
Um sistema de coordenadas em  $E^3$  depende de uma origem  $O$  e de uma base  $E$ . Portanto uma mudança no sistema pode envolver:

- mudar a origem  $O$  e a base  $E$
- mudar a origem  $O$  e manter a mesma base  $E$  (**translações**)
- manter a origem  $O$  e mudar a base  $E$  (**rotações**)

### V.19.1 Origem e Base distintas

- $\Sigma_1 = (O_1, E)$  um sistema de coordenadas em  $E^3$
- $\Sigma_2 = (O_2, F)$  um novo sistema de coordenadas em  $E^3$
- $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1} \stackrel{Def. V.12.1}{\iff} \overrightarrow{O_1 O_2} = (h, k, l)_E$
- $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} \iff \overrightarrow{O_1 X} = (x, y, z)_E$
- $X = (u, v, w)_{\Sigma_2} \iff \boxed{\overrightarrow{O_2 X} = (u, v, w)_F}$

QUAL A RELAÇÃO ENTRE  $x, y, z$  COM  $u, v, w$ ?



- $\overrightarrow{O_2 X} = \overrightarrow{O_2 O_1} + \overrightarrow{O_1 X} \implies$

$$\boxed{\overrightarrow{O_2 X} = (x - h, y - k, z - l)_E}$$

- $M_{EF}$  a matriz de mudança da base  $E$  para a base  $F$  (ver Eq. (V.4.2)):

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

onde as colunas contém as coordenadas dos elementos de  $F$  na base  $E$ ;

- Pela fórmula de mudança de base, Eq. (V.4.3),

$$(\overrightarrow{O_2 X})_E = M_{EF}(\overrightarrow{O_2 X})_F \iff \begin{pmatrix} x - h \\ y - k \\ z - l \end{pmatrix}_E = M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F.$$

Portanto, a relação entre as antigas  $(x, y, z)_{\Sigma_1}$  e novas coordenadas  $(u, v, w)_{\Sigma_2}$  de  $X$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E = \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}_E + M_{EF} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F$$

onde  $\Sigma_1 = (O_1, E)$ ,  $\Sigma_2 = (O_2, F)$  e  $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$ .

As **equações de mudança de coordenadas de  $\Sigma_1$  para  $\Sigma_2$**  são:

$$\begin{cases} x = h + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w \\ y = k + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w \\ z = l + \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w, \end{cases}$$

onde  $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} = (u, v, w)_{\Sigma_2}$ ,  $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$ .

**Nota.** Temos que

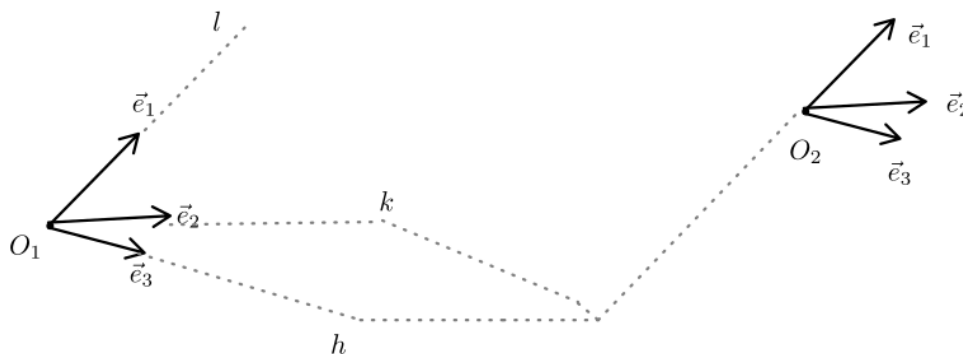
$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_F = M_{EF}^{-1} \begin{pmatrix} x - h \\ y - k \\ z - l \end{pmatrix}_E \stackrel{\text{Corol.V.4.11}}{=} M_{FE} \begin{pmatrix} x - h \\ y - k \\ z - l \end{pmatrix}_E, \quad (\text{V.19.1})$$

o que nos fornece as equações de mudança de coordenadas de  $\Sigma_2$  para  $\Sigma_1$ .

**Exemplo V.19.1.** Ver Exercício 76 em [Slide de Exercícios](#).

### V.19.2 Origens distintas: Translação

Se as origens  $O_1$ ,  $O_2$  são distintas e a base dos sistemas de coordenadas  $\Sigma_1 = (O_1, E)$  e  $\Sigma_2 = (O_2, E)$  são iguais, dizemos que  $\Sigma_2$  é obtido pela **translação de  $\Sigma_1$  para o ponto  $O_2$**



Neste caso,

$$M_{EE} = Id$$

e portanto, as

equações de mudança de coordenadas de  $\Sigma_1 = (O_1, E)$  para  $\Sigma_2 = (O_2, E)$  (por **translação**) são:

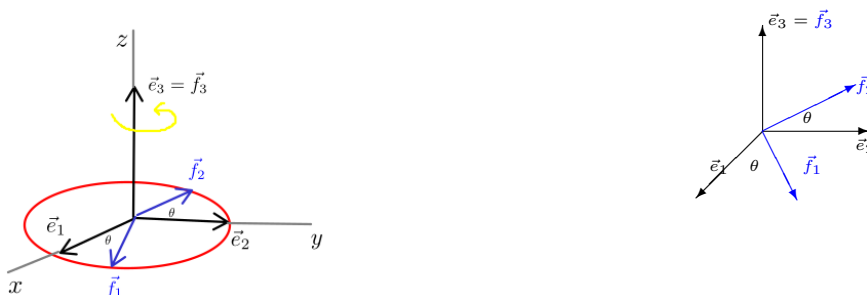
$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \\ z = l + w, \end{cases} \quad (\text{V.19.2})$$

onde  $X = (x, y, z)_{\Sigma_1} = (u, v, w)_{\Sigma_2}$ ,  $O_2 = (h, k, l)_{\Sigma_1}$ .

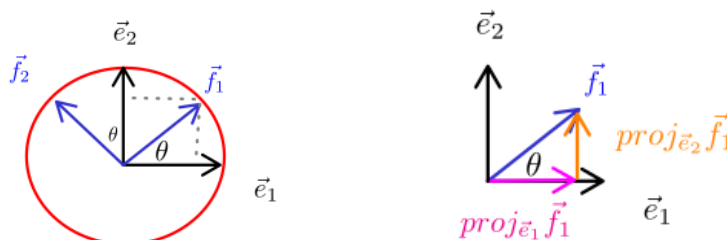
### V.19.3 Bases disitintas: Rotação

Se a origem dos sistemas de coordenadas  $\Sigma_1 = (O, E)$  e  $\Sigma_2 = (O, F)$  são iguais, dizemos que  $\Sigma_2$  é obtido pela **rotação de  $\Sigma_1$** .

**Caso Particular:** a base  $F$  é obtida “girando” a base  $E$  em torno de  $Oz$  no sentido anti-horário por um ângulo  $\theta$



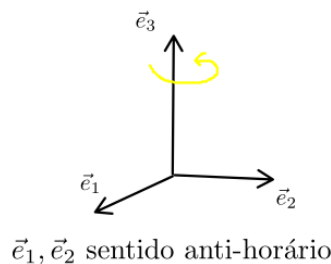
- $\Sigma_1 = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$  sistema **ortogonal**
- $\Sigma_2(O, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$  sistema **ortogonal**
- $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$
- $\vec{f}_1$  e  $\vec{f}_2$  são obtidos “girando”  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  em torno de  $Oz$  no sentido anti-horário por um ângulo  $\theta$ :



Logo,

$$\vec{f}_1 = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2; \quad \vec{f}_2 = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

•  $M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



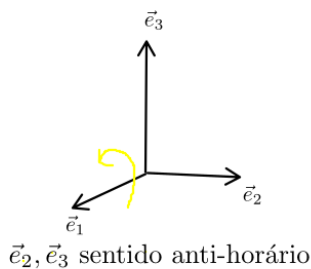
as equações da rotação de  $\Sigma_1$  em torno de  $Oz$ , de  $\theta$  radianos, em sentido anti-horário são:

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \\ z = w, \end{cases} \quad (\text{V.19.3})$$

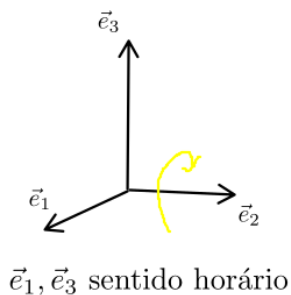
onde  $X = (x, y, z)_{\Sigma_1}$  e  $X = (u, v, w)_{\Sigma_2}$ .

**Nota.** (Verifique!)

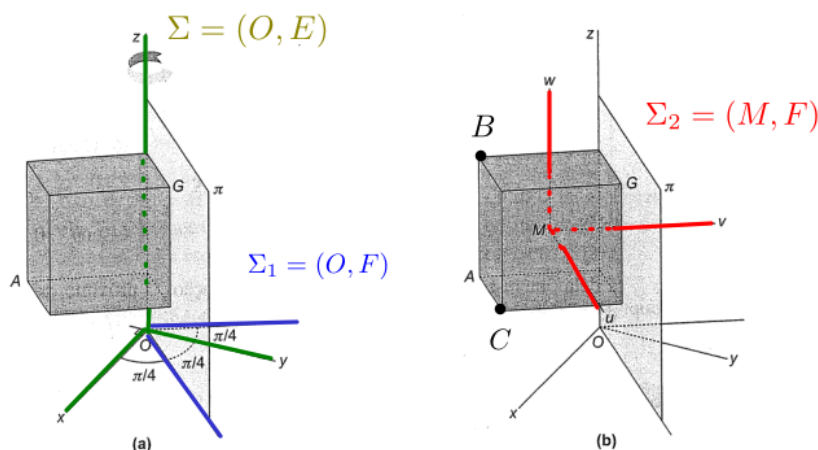
1. Mantendo  $\vec{e}_1$  fixo:  $M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$



2. Mantendo  $\vec{e}_2$  fixo:  $M_{EF} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$



**Tarefa:** Um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, E)$  está fixado. Sabendo-se que um cubo tem uma face contida no plano  $\pi : x - y = 0$ , outras duas faces paralelas a  $Oxy$  e que uma diagonal tem extremidades  $A = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$  e  $G = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$ , aplique translação e rotação para determinar os outros seis vértices.



Fonte: Boulos, Geometria Analítica

- fazer rotação de  $\Sigma$  de  $\pi/4$  radianos:  $\Sigma_1 = (O, F)$ 
  - cada face do cubo é paralela aos planos coordenados de  $\Sigma_1$
- $M = (\sqrt{2}, 0, 2)_{\Sigma_1}$  ponto médio de  $AG$
- fazer translação de  $\Sigma_1$  para  $M$ :  $\Sigma_2 = (M, F)$ 
  - usando a relação (V.19.1) (e lembre-se que  $M_{FE} = M_{EF}^t$ ), encontre as coordenadas de  $A$  em relação a  $\Sigma_2$ :  $A = (a, b, c)_{\Sigma_2}$ ;
  - o cubo é simétrico em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados ou à origem de  $\Sigma_2$ :

$$G = (-a, -b, -c)_{\Sigma_2}, \quad B = (a, b, -c)_{\Sigma_2}, \quad C = (a, -b, -c)_{\Sigma_2}, \dots$$

Resp.:

**Nota.** (Verifique!)

3. No plano:

as equações de mudança de coordenadas por translação de  $\Sigma_1$  para o ponto  $O_2$  são:

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v, \end{cases}$$

onde  $X = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$ ,  $O_2 = (h, k)_{\Sigma_1}$ ;

as equações de mudança de coordenadas por rotação de  $\Sigma_1$  de  $\theta$  radianos em sentido anti-horário são:

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

onde  $X = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$ .

Até o momento estudamos:

- sistemas de coordenadas de pontos no espaço  $E^3$
- lugares geométricos de pontos no espaço  $E^3$ : *retas, planos*
- as equações que determinam tais lugares geométricos satisfazem equações de primeiro grau:

*equações da reta na forma planar, equação geral do plano.*

Próximo passo:

- estudar lugares geométricos de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação de segundo grau:

- *cônicas*: no plano
- *quádricas*: no espaço.

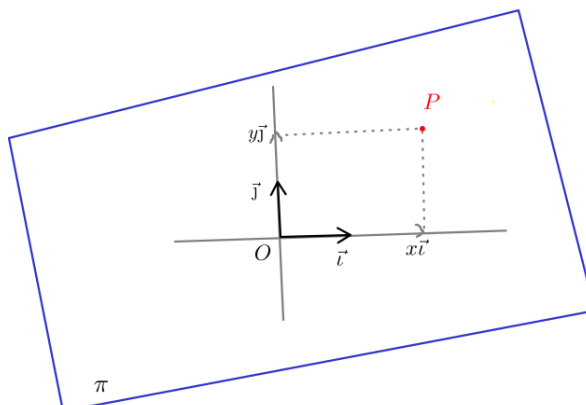


**Objetivo**

Estudar os lugares geométricos de  $E^2$  chamados: **elipse, hipérbole e parábola:**

- deduzir suas equações;
- estudar suas propriedades geométricas.

## V.20 Ambiente



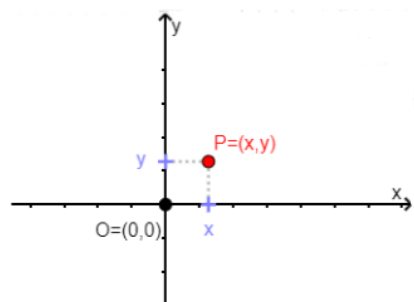
- $\pi$  um plano em  $E^3$
- $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  dois vetores diretores de  $\pi$  tais que

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

- $O$  um ponto de  $\pi$
- $P \in E^3, P \in \pi \iff \exists x, y \in \mathbb{R}$  tais que  $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- $B = (\vec{i}, \vec{j})$ : base ortonormal<sup>36</sup> de  $\pi$
- $\Sigma = (O, B)$ : sistema de coordenadas ortogonal em  $\pi$  (origem  $O$  e base  $B$ )
- as coordenadas de  $P \in \pi$  são as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$  na base  $B$ :

$$P = (x, y)_{\Sigma} = (x, y)$$

Este ambiente é usualmente identificado com o plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ :



As coordenadas de  $P$  são chamadas de *coordenadas cartesianas*

Os eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  são chamados de *eixo-x* e *eixo-y*.

<sup>36</sup>A base não precisa ser ortonormal, mas lembre que esta escolha permite calcular produto escalar, norma de vetores, distância entre pontos de maneira fácil.

**Nota.**

- $\Sigma_1 = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \wedge \vec{j}))$  é um sistema de coordenadas ortogonal<sup>37</sup> em  $E^3$  com base positiva
- Uma equação geral<sup>38</sup> do plano  $\pi$  em relação ao sistema de coordenadas  $\Sigma_1$  é

$$z = 0,$$

e os pontos de  $\pi$  têm coordenadas da forma  $(x, y, 0)$ .

- Uma **equação geral de uma reta  $r$  no plano  $\pi$**  é da forma:<sup>39</sup>

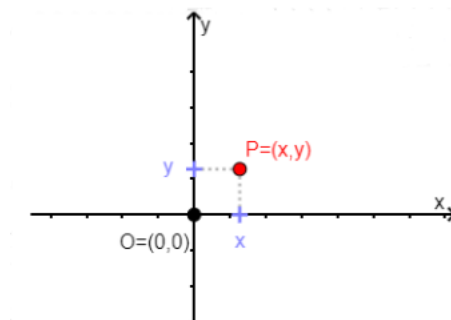
$$r : ax + by + d = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad (\text{V.20.1})$$

onde o vetor  $\vec{n} = (a, b)$  é ortogonal a  $r$  e

$$\vec{r} = (-b, a) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (b, -a)$$

são **vetores diretores** de  $r$ .

VAMOS SUPOR FIXADO UM PLANO  $\pi$  EM  $E^3$  COM UM SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAL (S.C.O.)  $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$ .



<sup>37</sup>Lembre-se da Definição V.10.1 de produto vetorial e que  $\|\vec{i} \wedge \vec{j}\| = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\| \sin \theta$

<sup>38</sup>Ver Exercício 39

<sup>39</sup>Veja Seção V.15.3.1

## V.21 Elipse

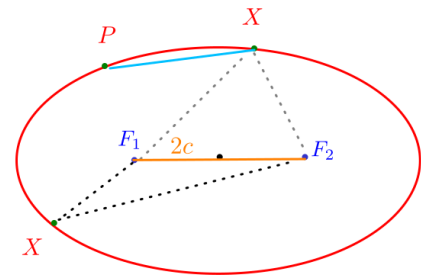
**Definição V.21.1.** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos distintos de  $\pi$  e  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a > c > 0$ , onde

$$2c = d(F_1, F_2).$$

Uma **elipse** é o lugar geométrico dos pontos  $X$  de  $\pi$  tais que

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a. \quad (\text{V.21.1})$$

- **focos da elipse:**  $F_1$  e  $F_2$ ;
- **segmento focal:**  $\overline{F_1F_2}$ ;
- **distância focal:**  $2c = d(F_1, F_2)$ ;
- **reta focal:** reta  $F_1F_2$ ;
- **centro** da elipse: ponto médio de  $\overline{F_1F_2}$ ;
- **corda** da elipse:  $\overline{XP}$ , para quaisquer  $X, P$  na elipse.



### Construção de uma elipse:

**Autoria Atractor:** Método do jardineiro

“o comprimento da corda é  $2a$ , a qual deve ser maior que a distância entre os pinos”

**Autor Paulo Tomson; Autora Luciana Brito:** Geogebra.

**Nota.**

- dois pontos  $F_1, F_2$  e um número real  $2a > d(F_1, F_2)$  determinam uma elipse
- dada uma elipse  $E$ , existem um único par de pontos  $F_1, F_2$  e um único número real  $2a > d(F_1, F_2)$  tais que os pontos de  $E$  satisfazem (V.21.1):  $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ .

Portanto, a cada elipse estão associados um único número real  $a$  e um único segmento focal.

- Quando  $F_1 = F_2$ , temos  $c = 0$  e para todo  $a > 0$  o lugar geométrico dos pontos  $X$  de  $\pi$  tais que  $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ , isto é, dos pontos que são equidistantes de  $F_1$ , é a **circunferência de centro  $F_1$  e raio  $a$** .

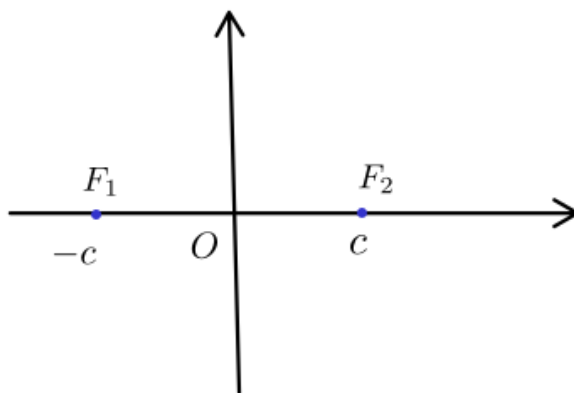
**Exemplo V.21.2.** Ver Exercícios 77 e 78 em [Slide de Exercícios](#).

**V.21.1 Equação da elipse****V.21.1.1 Com focos no eixo  $Ox$** 

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que:

$$F_1 = (-c, 0), \quad F_2 = (c, 0)$$

- $d(F_1, F_2) = 2c$
- $a > c > 0$



$$X = (x, y) \in \text{Elipse} \iff d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\implies \left( \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 = \left( 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2$$

$$\iff \vdots$$

$$\implies \exists b > 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } a^2 = b^2 + c^2$$

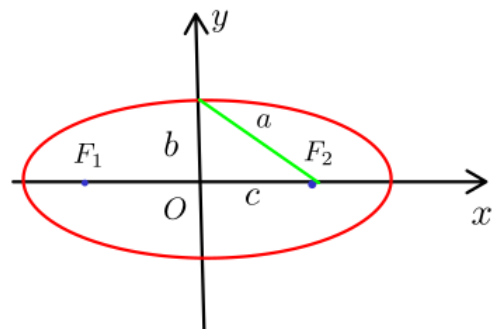
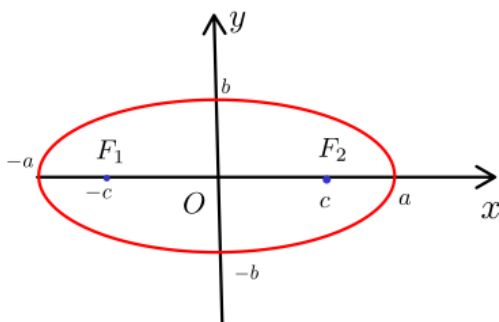
.....

$$X = (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } a^2 = b^2 + c^2 \implies X \in \text{Elipse}$$

A **equação reduzida da elipse** de centro  $O$  e focos no eixo  $Ox$  é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{V.21.2})$$

onde  $a > b > 0$ ,  $a^2 = b^2 + c^2$  e  $2a > 2c = d(F_1, F_2) > 0$ .

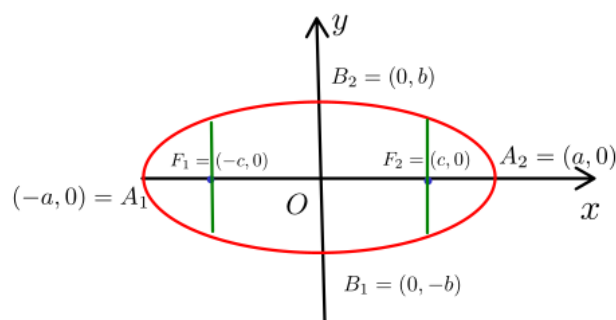


**Proposição V.21.3.** Um ponto  $X = (x, y)$  é um ponto da elipse de equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se, e somente se as distâncias de  $X$  aos focos  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  são

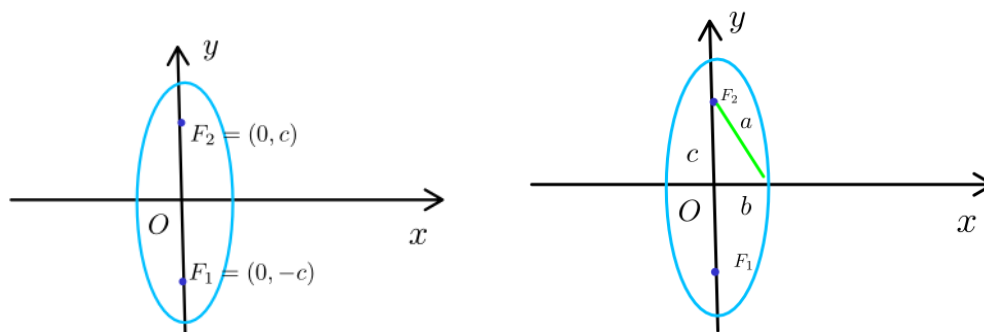
$$d(X, F_1) = a + \frac{c}{a}x, \quad d(X, F_2) = a - \frac{c}{a}x.$$



- $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ ,  $B_1 = (0, -b)$  e  $B_2 = (0, b)$ : **vértices da elipse**,
- corda  $\overline{A_1A_2}$ : **eixo maior** da elipse,
- corda  $\overline{B_1B_2}$ : **eixo menor** da elipse,
- **amplitude focal** é o comprimento de uma corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal.

V.21.1.2 Com focos no eixo  $Oy$ 

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema ortogonal tal que  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ ;



- $a > c > 0$

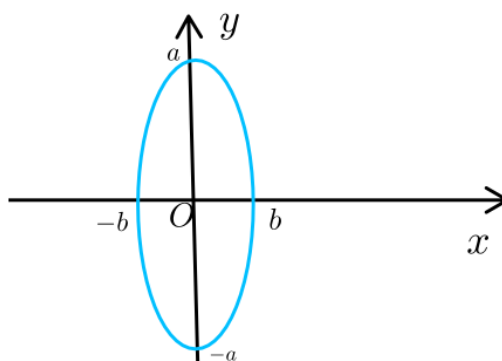
$$X = (x, y) \in \text{Elipse} \iff d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

$$\stackrel{\text{verifique!}}{\iff} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } a^2 = b^2 + c^2$$

A **equação reduzida da elipse** de centro  $O$  e focos no eixo  $Oy$  é dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (\text{V.21.3})$$

onde  $a > b > 0$ ,  $a^2 = b^2 + c^2$  e  $2a > 2c = d(F_1, F_2) > 0$ .





## V.21.2 Algumas propriedades de uma elipse

**Proposição V.21.4.** *A elipse é uma curva simétrica em relação à reta (focal) que passa  $F_1$  e  $F_2$  e em relação à reta mediatriz do segmento (focal)  $F_1F_2$ .*

**Observação.** Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que o desenho da elipse é como o apresentado: sem “bicos”, côncavo para baixo “na parte de cima” e côncavo para cima “na parte de baixo”! O método algébrico que funcionou para retas e planos não é eficiente para curvas e superfícies. 🤔

**Proposição V.21.5.** *Uma equação da forma*

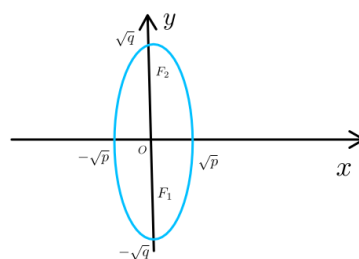
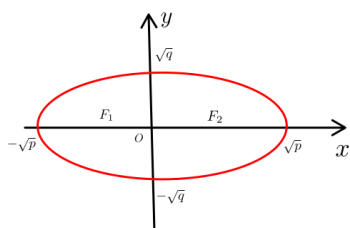
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \quad (\text{V.21.4})$$

*descreve uma elipse em relação a um s.c.o.  $\Sigma = (O, B)$  se, e somente se,  $p$  e  $q$  são números reais distintos e positivos.*

**Corolário.** *Sejam  $p$  e  $q$  são números reais distintos e positivos.*

*A Equação (V.21.4) representa:*

1. *uma elipse com centro  $O$  e focos em  $Ox$  quando  $p > q$ ; (neste caso  $a = \sqrt{p}$  e  $b = \sqrt{q}$ )*
2. *uma elipse com centro  $O$  e focos em  $Oy$  quando  $p < q$ . (neste caso  $a = \sqrt{q}$  e  $b = \sqrt{p}$ )*



**Propriedade óptica da elipse** (Geogebra): (num espelho elíptico) os raios de luz que passam por um foco são refletidos no outro foco.

**Uma aplicação em óptica com elipses** (vídeo)

**Exemplo V.21.6.** Ver Exercício 79 em [Slide de Exercícios](#).

## V.22 Hipérbole

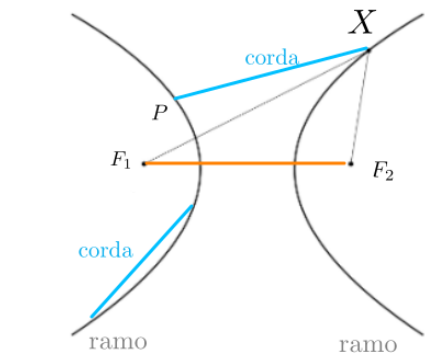
**Definição V.22.1.** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois pontos distintos de  $\pi$  e  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < a < c$ , onde

$$2c = d(F_1, F_2).$$

Uma **hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos  $X$  de  $\pi$  tais que

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a. \quad (\text{V.22.1})$$

- **focos da hipérbole:**  $F_1$  e  $F_2$ ;
- **segmento focal:**  $\overline{F_1F_2}$ ;
- **distância focal:**  $2c = d(F_1, F_2)$ ;
- **reta focal:** reta  $F_1F_2$ ;
- **centro** da hipérbole: ponto médio de  $\overline{F_1F_2}$ ;
- **corda** da hipérbole:  $\overline{XP}$ , para quaisquer pontos  $X \neq P$  na hipérbole.



Fonte: Matika

### Construção de uma hipérbole:

**Autoria Atractor:** Corda e régua

**Matemática para gente grande:** Geogebra

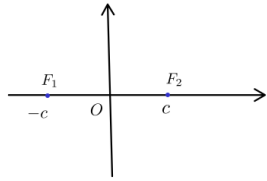
A cada hipérbole estão associados um único número real  $a$  e um único segmento focal.

**Exemplo V.22.2.** Ver Exercícios 80 e 81 em [Slide de Exercícios](#) (tarefa!).

## V.22.1 Equação da hipérbole

### V.22.1.1 Com focos no eixo $Ox$

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  s. c. ortogonal tal que  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$



$$d(F_1, F_2) = 2c$$

- $0 < a < c$

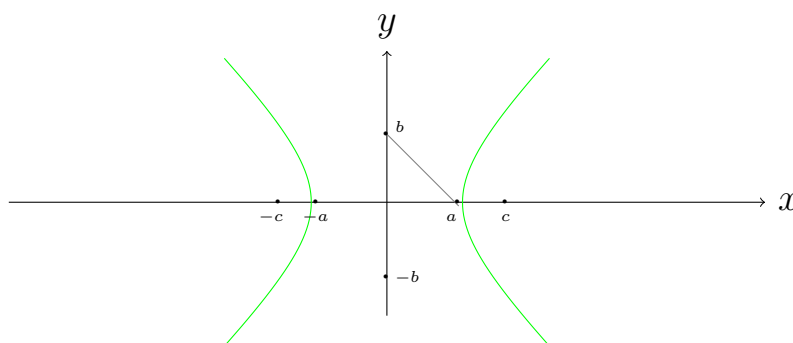
$$X = (x, y) \in \text{Hipérbole} \iff d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

A **equação reduzida da hipérbole** de centro  $O$  e focos no eixo  $Ox$  é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (\text{V.22.2})$$

onde  $c > b > 0$ ,  $c^2 = a^2 + b^2$  e  $2c = d(F_1, F_2) > 2a > 0$ .



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

- $A_1 = (-a, 0)$ ,  $A_2 = (a, 0)$ : **vértices da hipérbole**.

V.22.1.2 Com focos no eixo  $Oy$ 

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema ortogonal tal que  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ ;
- $a > c > 0$

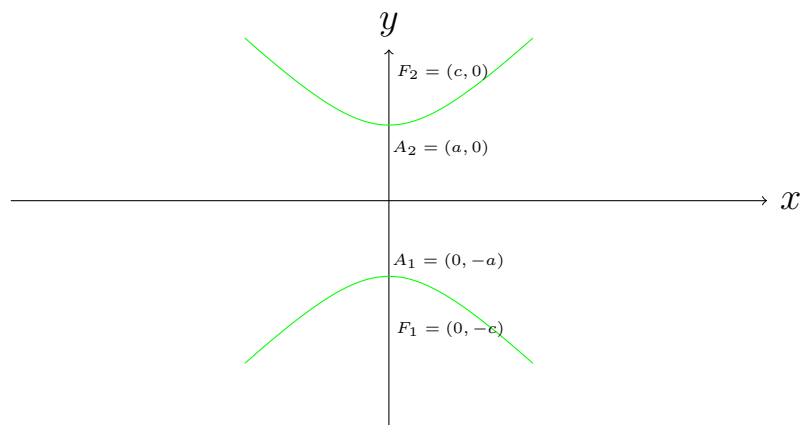
$$X = (x, y) \in \text{Hipérbole} \iff d(X, F_1) - d(X, F_2) = \pm 2a$$

$$\stackrel{\text{verifique!}}{\iff} -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \text{ onde } a > b > 0 \text{ e } a^2 = b^2 + c^2$$

A **equação reduzida da hipérbole** de centro  $O$  e focos no eixo  $Oy$  é dada por

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (\text{V.22.3})$$

onde  $c > b > 0$ ,  $c^2 = a^2 + b^2$  e  $2c = d(F_1, F_2) > 2a > 0$ .



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

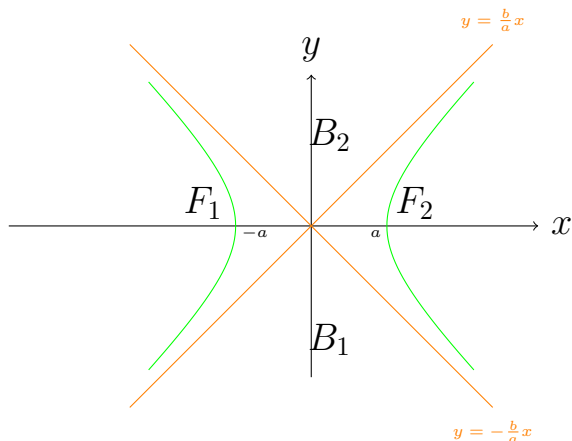
### V.22.2 Algumas propriedades de uma hipérbole

**Proposição V.22.3.** *A hipérbole é uma curva simétrica em relação à reta focal  $F_1F_2$  e em relação à reta mediatriz do segmento focal  $F_1F_2$ .*

**Observação.** Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que o desenho da hipérbole com focos no eixo  $Ox$  é como o apresentado: a hipérbole é a união dos gráficos das funções:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$

Estudando o domínio, crescimento, concavidade e assíntotas, obtemos:



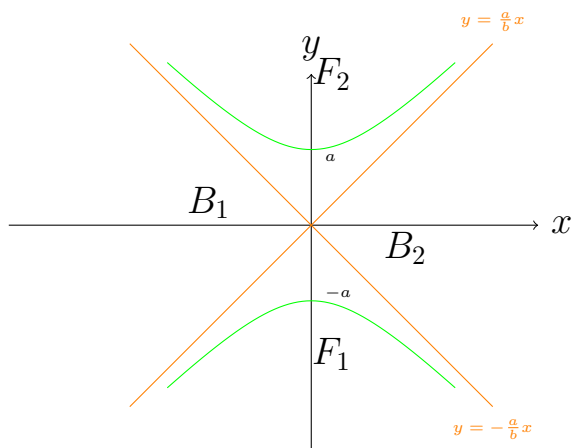
- As retas:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

são as **assíntotas** da hipérbole.

Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

Analogamente, para a hipérbole com focos no eixo  $Oy$ :  $\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1\right)$



- As retas:

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

são as assíntotas da hipérbole.

Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

**Proposição V.22.4.** Uma equação da forma

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1 \quad (\text{V.22.4})$$

descreve uma hipérbole em relação a um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, B)$  se, e somente se,  $pq < 0$ .

**Corolário.** Sejam  $p$  e  $q$  são números reais tais que  $pq < 0$ .

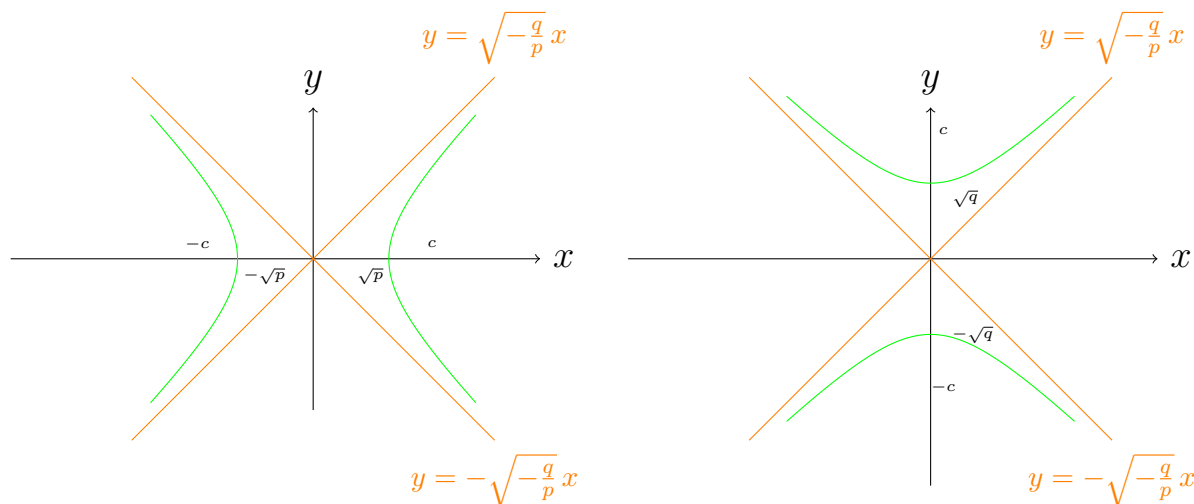
A Equação (V.22.4) representa:

1. uma hipérbole com centro  $O$  e focos em  $Ox$  quando  $p > 0$  e  $q < 0$ ;

(neste caso  $a = \sqrt{p}$  e  $b = \sqrt{-q}$ )

2. uma hipérbole com centro  $O$  e focos em  $Oy$  quando  $p < 0$  e  $q > 0$ .

(neste caso  $a = \sqrt{q}$  e  $b = \sqrt{-p}$ )



**Exemplo V.22.5.** Ver Exercício 82 em [Slide de Exercícios](#).

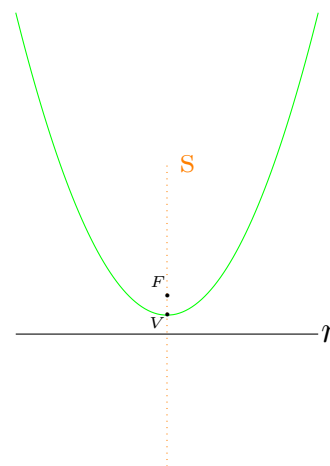
## V.23 Parábola

**Definição V.23.1.** Sejam  $r$  uma reta de  $\pi$  e  $F$  um ponto de  $\pi$ ,  $F \notin r$ .

Uma **parábola** é o lugar geométrico dos pontos  $X$  de  $\pi$  que são equidistantes de  $F$  e de  $r$ , i.e.,

$$d(X, F) = d(X, r). \quad (\text{V.23.1})$$

- **foco da parábola:**  $F$ ;
- **diretriz:** reta  $r$ ;
- **parâmetro  $p$ :**  $p > 0$ ;  $2p = d(F, r) > 0$ ;
- **eixo (de simetria)** da parábola: reta  $s$  que contém  $F$  perpendicular a  $r$ ;
- **vértice da parábola  $V$ :** ponto médio de  $\overline{FH}$ , onde  $H = r \cap s$ ;
- **corda** da parábola:  $\overline{XP}$ , para quaisquer pontos  $X \neq P$  na parábola.



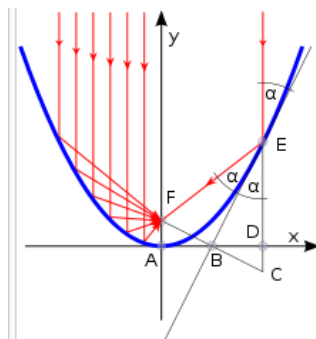
Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

### Construção de uma parábola:

**Autoria Atractor:** Corda e esquadro

**Propriedade refletora:** Wikipedia:

“raios paralelos ao eixo de simetria é direcionado para o seu foco”

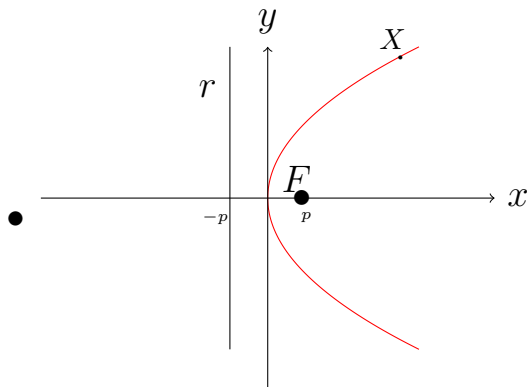


A cada parábola estão associados um único foco  $F$  e uma única diretriz  $r$ .

### V.23.1 Equação da parábola

#### V.23.1.1 Com foco no semi-eixo positivo de $Ox$

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que a origem  $O$  coincide com o vértice da parábola e o foco  $F$  pertence ao semi-eixo positivo de  $Ox$
- $2p = d(F, r)$



$$F = (p, 0), \quad r : x = -p$$

Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

$$X = (x, y) \in \text{Parábola} \iff d(X, F) = d(X, r)$$

$$\iff \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

A **equação reduzida da parábola** de vértice  $O$  e foco no semi-eixo positivo  $Ox$  é dada por

$$y^2 = 4px, \quad (\text{V.23.2})$$

onde  $2p = d(F, r) > 0$ .



V.23.1.2 Com foco no semi-eixo positivo de  $Oy$ 

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que a origem  $O$  coincide com o vértice da parábola e o foco  $F$  pertence ao semi-eixo positivo de  $Oy$

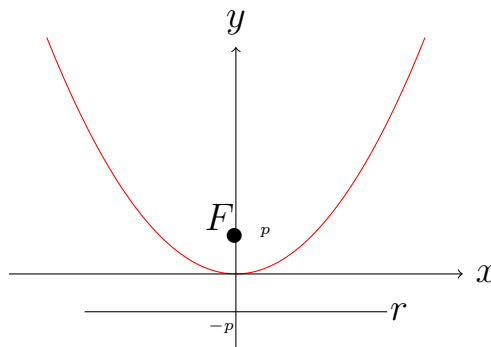
$$X = (x, y) \in \text{Parábola} \iff d(X, F) = d(X, r)$$

$$\iff \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

A **equação reduzida da parábola** de vértice  $O$  e foco no semi-eixo positivo de  $Oy$  é dada por

$$x^2 = 4py, \quad (\text{V.23.3})$$

onde  $2p = d(F, r) > 0$ .



Fonte: Slides da profa. Maria do Carmo

### V.23.2 Algumas propriedades de uma parábola

**Proposição V.23.2.** A parábola<sup>40</sup> é uma curva simétrica em relação ao seu eixo (reta que passa pelo foco  $F$  e é perpendicular à reta diretriz  $r$ ).

**Proposição V.23.3.** As equações da forma

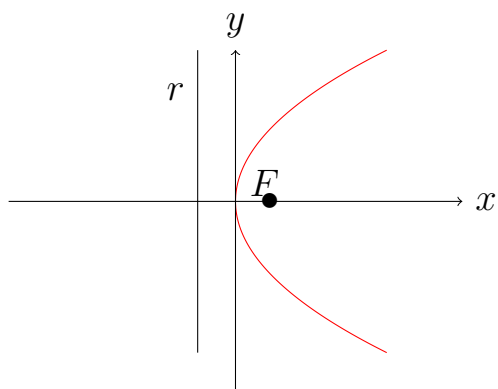
$$y^2 = qx, \quad (\text{V.23.4})$$

$$x^2 = qy \quad (\text{V.23.5})$$

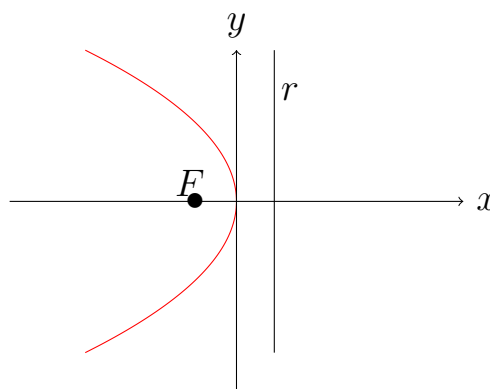
descrevem parábolas em relação a um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, B)$  se, e somente se,  $q \neq 0$ .

**Corolário.** A Equação (V.23.4):  $y^2 = qx$ , representa:


1. uma parábola com vértice  $O$  e foco em  $Ox$  positivo quando  $q > 0$ ;
2. uma parábola com vértice  $O$  e foco em  $Ox$  negativo quando  $q < 0$ ;



$$q > 0: 4p = q, d(F, r) = \frac{q}{2}, r : x = -\frac{q}{4}$$

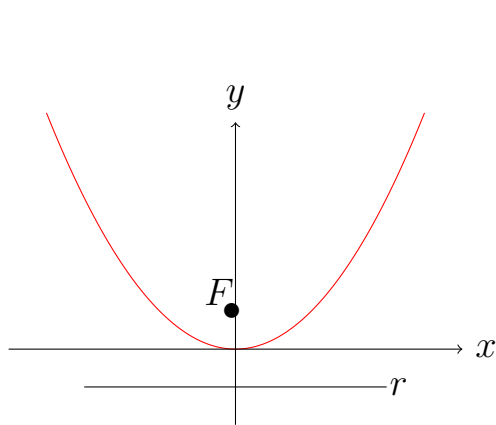


$$q < 0: 4p = -q, d(F, r) = -\frac{q}{2}, r : x = -\frac{q}{4}$$

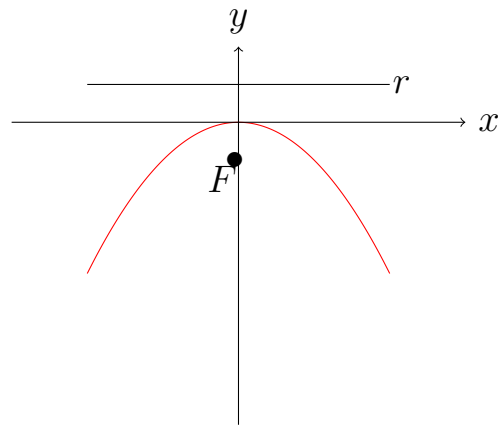
<sup>40</sup>Precisamos de técnicas de Cálculo para ter certeza que os desenhos das parábolas são de fato como os apresentados. 

**Corolário.** A Equação (V.23.5):  $x^2 = qy$ , representa:

1. uma parábola com vértice  $O$  e foco em  $Oy$  positivo quando  $q > 0$ ;
2. uma parábola com vértice  $O$  e foco em  $Oy$  negativo quando  $q < 0$ ;



$$q > 0: 4p = q, d(F, r) = \frac{q}{2}, r : y = -\frac{q}{4}$$



$$q < 0: 4p = -q, d(F, r) = -\frac{q}{2}, r : y = -\frac{q}{4}$$

**Exemplo V.23.4.** Ver Exercício 83 em [Slide de Exercícios](#).

## V.24 Seções Cônicas

As elipse, hipérbole e parábola podem ser definidas como interseções de um cone com um plano.

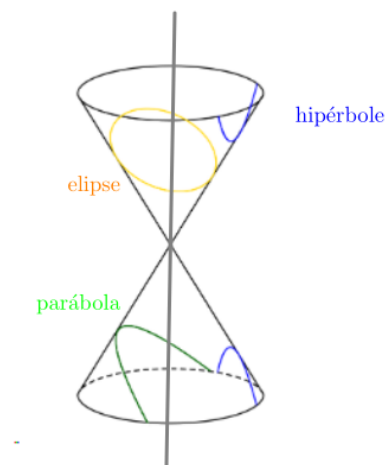


Figura 23: Fonte: [Matika](#)

Se  $C$  é a superfície cônica de duas folhas (rotação de um reta - geratriz - em torno de um eixo) e  $V$  seu vértice:

- **elipse:** intersecção de  $C$  com um plano que não contém  $V$ , intercepta apenas uma das folhas de  $C$  e não é perpendicular ao eixo;
- **hipérbole:** intersecção de  $C$  com um plano que não contém  $V$  e intercepta as duas das folhas de  $C$ ;
- **parábola:** intersecção de  $C$  com um plano que é paralelo a geratriz;

Tais curvas são conhecidas como **seções cônicas**.

---

[Animação 3D das seções cônicas](#)

---

Tal abordagem é equivalente ao que foi feito até aqui (provado por Dandelin, 1822, veja P. Boulos, p. 346) e não trataremos desta nova abordagem neste curso.

### V.24.1 Cônicas

---

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, B)$  em um plano  $\pi$ , vimos que as equações de elipses, hipérbolas e parábolas são casos particulares de uma **equação de grau 2 em duas variáveis**:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad p \neq q, p, q > 0$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1, \quad pq < 0$$

$$y = \frac{1}{q}x^2, \quad q \neq 0.$$

---

**Definição V.24.1.** Uma **cônica** é o lugar geométrico dos pontos  $X = (x, y)$  no plano  $\pi$  que satisfazem uma equação de segundo grau

$$g(x, y) = 0$$

onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $ax^2, bxy, cy^2$ : **termos quadráticos**
  - $bxy$ : **termo quadrático misto**
  - $dx, ey$ : **termos lineares**
  - $f$ : **termo independente**
-

**Exemplo V.24.2.**

1.  $x^2 + y^2 = -1$ : .....
  2.  $x^2 + y^2 = 0$ : .....
  3.  $x + 1 = 0$ : .....
  4.  $x^2 + 2xy + y^2 = 0 \iff (x + y)^2 = 0$ : .....
  5.  $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0 \iff (x + y)(x + y + 1) = 0$ : .....
  6.  $x^2 - y^2 = 0 \iff (x - y)(x + y) = 0$ : .....
  7.  $x^2 + y^2 = 1$ : .....
  8.  $x^2 + 2y^2 = 1$ : .....
  9.  $x^2 - y^2 = 1$ : .....
  10.  $x^2 - y = 0$ : .....
- 

**Proposição V.24.3.** *Um subconjunto  $C$  do plano  $\pi$  é uma cônica se, e somente se  $C$  é:*

1. o conjunto vazio, ou
2. um ponto, ou
3. uma reta, ou
4. duas retas idênticas, ou
5. duas retas paralelas, ou
6. duas retas concorrentes, ou
7. uma circunferência, ou
8. uma elipse, ou
9. uma hipérbole, ou
10. uma parábola.

### V.24.1.1 Identificação de cônicas: translação e rotação

Dada uma equação de 2º grau, identificar e esboçar a cônica.

- fazer mudança do sistema de coordenadas:
  - a geometria da cônica é mantida;
  - a equação dada se reduz a uma mais simples.
- possíveis mudanças:
  - translações;
  - rotações.

$C$ : cônica  $g(x, y) = 0$ , onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $b = d = e = 0$ : sabemos identificar a cônica

**Objetivo: eliminar os termos lineares e o termo quadrático misto:**

- passo 1: eliminar os termos lineares
  - \* buscar alguma translação que transforme  $g$  em um polinômio  $\tilde{g}$  sem os termos lineares
- passo 2: eliminar o termo quadrático misto
  - \* buscar alguma rotação que transforme  $g$  em um polinômio  $\tilde{\tilde{g}}$  sem o termo quadrático misto
- quando necessário aplicar uma translação em  $g$  para obter um polinômio  $\tilde{g}$  sem os termos lineares e uma rotação em  $\tilde{g}$  para obter um polinômio  $\tilde{\tilde{g}}$  sem o termo quadrático misto.

## V.24.1.2 Eliminação dos termos lineares por translação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sistema de coordenadas ortogonal
- $O' = (h, k)_{\Sigma_1}$  ponto no plano  $\pi$
- $\Sigma_2 = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  translação de  $\Sigma_1$  para o ponto  $O'$ <sup>41</sup>
- $P = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$ :

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$$

---

QUAL O EFEITO DA TRANSLAÇÃO NO POLINÔMIO  $g$  ?

---

$$g(h + u, k + v) = au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + g(h, k)$$


---

- Para eliminar os termos lineares:

$$(*) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

- Se o sistema tem solução, encontramos  $\tilde{g}$  dada por:

$$\tilde{g}(u, v) := g(h + u, k + v),$$

$$\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k)$$

---

<sup>41</sup>Veja Seção V.19.2



---

PARA QUAL TRANSLAÇÃO (ESCOLHA DE  $h$  E  $k$ ) O SISTEMA

$$(*) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

TEM SOLUÇÃO?

---

$$D := \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$$

$$\begin{cases} D \neq 0, & (*) \text{ tem uma única solução } (h, k) \text{ (SPD)} \\ D = 0, & (*) \text{ tem infinitas soluções } (h, k) \text{ (SPI)} \\ D = 0, & (*) \text{ não tem solução (incompatível) (SI)}^{42} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D \neq 0, & \text{podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SPI, podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SI, não podemos eliminar os termos lineares} \end{cases}$$

---

**Nota.** Se o sistema  $(*)$  possui infinitas soluções, o valor de  $g(h, k)$  não depende da escolha da solução  $(h, k)$  ([Verifique!](#))

---



---

<sup>5</sup>SPD: sistema possível determinado, SPI: sistema possível indeterminado, SI: sistema impossível

**Roteiro: determinar se é possível e eliminar os termos lineares por meio de uma translação de  $\Sigma_1$  para  $O' = (h, k)$**

Dada a cônica

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ onde } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

• **Passo 1:** Calcular o determinante  $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$ .

• **Passo 2:**

- Se  $D \neq 0$ , então existe uma única translação para o ponto  $O' = (h, k)$  de modo que  $\tilde{g}$  não contém os termos lineares.
- Se  $D = 0$ , então pode ou não existir alguma translação para o ponto  $O' = (h, k)$  de modo que  $\tilde{g}$  não contém os termos lineares.
- Os escalares  $h$  e  $k$ , quando existem, são soluções do sistema

$$(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0. \end{cases}$$

• **Passo 4:** A equação  $\tilde{g}(u, v) = 0$  no novo sistema de coordenadas satisfaz:

- os coeficientes dos termos quadráticos são iguais em  $\tilde{g}$  e  $g$ ;
- os termos lineares são nulos;
- o termo independente em  $\tilde{g}$  é

$$g(h, k),$$

onde  $h$  e  $k$  são soluções de  $(\star)$

isto é,

$$\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k).$$

**Observe:**

- $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$

- 

$$(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

- $g(h, k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$

- $\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$

- $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2 = 0 \iff \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4} = 0$

- 

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} \quad (\text{V.24.1})$$

- $(\star)$  é obtido pelas 2 primeira linhas da matriz acima

- o termo constante de  $\tilde{g}$  é obtido pela última linha da matriz acima

**Definição V.24.4.** A matriz simétrica  $M$  acima é chamada de **matriz de  $g$** .

**Exercício.** Verifique que  $g(x, y) = X^t M X$ , onde  $X = (x \ y \ 1)_{1 \times 3}$ . ([tarefa!](#))

**Exemplo V.24.5.** Ver Exercício [84](#) em [Slide de Exercícios](#).

COMO DECIDIR QUAL CÔNICA A EQUAÇÃO

$$\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k) = 0$$

REPRESENTA?

---

**Definição V.24.6.** Um ponto  $O$  é o **centro** de uma cônica  $C$  não-vazia quando:

$$P \in C \iff P' \in C,$$

onde  $P'$  é o simétrico de  $P$  em relação a  $O$ .

---

Observando as possíveis cônicas (Proposição V.26.3) podemos inferir que a cônica dada por:

1. o conjunto vazio: tem ..... centros
  2. um ponto: tem ..... centros
  3. uma reta: tem ..... centros
  4. duas retas idênticas: tem ..... centros
  5. duas retas paralelas: tem ..... centros
  6. duas retas concorrentes: tem ..... centros
  7. uma circunferência: tem ..... centros
  8. uma elipse: tem ..... centros
  9. uma hipérbole: tem ..... centros
  10. uma parábola: tem ..... centros.
- 

COMO DECIDIR, QUANDO EXISTE, QUAL PONTO É CENTRO DE UMA CÔNICA?

---

**Exemplo V.24.7.** Em  $\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k) = 0$ ,

- $\tilde{g}(-u, -v) = \tilde{g}(u, v)$
- $(-u, -v)$  é o simétrico de  $(u, v)$  em relação a  $O' = (h, k)_{\Sigma_1} = (0, 0)_{\Sigma_2}$
- $O' = (h, k)$  é o centro da cônica de equação  $\tilde{g}(u, v) = 0$ , onde  $(h, k)$  satisfaz o sistema

$$(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

Para uma cônica não vazia  $C$ , se  $h$  e  $k$  satisfazem o sistema  $(\star)$ :

- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- $(h, k)$  ponto no plano, com s.c.o  $\Sigma_1$ , tal que  $h$  e  $k$  satisfazem o sistema  $(\star)$
- translada o sistema  $\Sigma_1$  para  $O' = (h, k)$
- obtemos  $\tilde{g}$  como no Exemplo V.27.4
- $O' = (h, k)$  é o centro da cônica  $C$

Para uma cônica não vazia  $C$ , se  $O'$  é o centro de  $C$ : (tarefa!)

- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- $O' = (h, k)$  é o centro da cônica  $C$
- transladar o sistema  $\Sigma_1$  para  $O' = (h, k)_{\Sigma_1} = (0, 0)_{\Sigma_2}$
- 

$$C : \tilde{g}(u, v) = g(h+u, k+v) = au^2 + buv + cv^2 + \underbrace{(2ah + bk + d)}_{d'} u + \underbrace{(bh + 2ck + e)}_{e'} v + g(h, k)$$

- $(-u, -v)$  é o simétrico de  $(u, v)$  em relação a  $O'$  e  $(u, v) \in C \Leftrightarrow (-u, -v) \in C$ :

$$\tilde{g}(-u, -v) = \tilde{g}(u, v) = 0$$

$$\bullet \quad \begin{cases} au^2 + buv + cv^2 + d'u + e'v + g(h, k) = 0 \\ au^2 + buv + cv^2 - d'u - e'v + g(h, k) = 0 \end{cases} \implies d'u + e'v = 0,$$

$$\text{onde } \begin{cases} d' := 2ah + bk + d \\ e' := bh + 2ck + e \end{cases}$$

■  $d' = e' = 0 \implies h$  e  $k$  satisfazem  $(\star)$

■  $d'$  ou  $e'$  não nulo:

\*  $\Gamma : d'u + e'v = 0$  é uma reta que contém  $(0, 0)$

\*  $C \subset \Gamma$ :<sup>a</sup> ou  $C = \{(0, 0)\}$  ou  $C = \Gamma$  que contém  $(0, 0)$

\* em ambos casos:

$$(0, 0) \in C \implies \tilde{g}(0, 0) = 0 \implies g(h, k) = 0$$

\* em ambos casos:  $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq -\frac{d'}{e'}$  ou  $m \neq -\frac{e'}{d'}$ :

$$\Gamma_1 : v = mx \text{ é tal que } \Gamma_1 \cap C = \{(0, 0)\}$$

\*  $\tilde{g}(x, mx) = 0$  tem solução única

$$\iff x[(a + bm + cm^2)x - (d' - e'm)] = 0$$

$$\iff x = 0 = \frac{d' - e'm}{a + bm + cm^2} (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

$$\implies d' = e'm, \text{ para infinitos valores de } m$$

$$\implies d' = e' = 0$$

•  $h$  e  $k$  satisfazem o sistema  $(\star)$

---

<sup>a</sup>Ver Proposição [V.26.3](#)

**Proposição V.24.8.**  $O = (h, k)$  é centro de uma cônica não vazia de equação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

se, e somente se,  $(h, k)$  é solução do sistema

$$(*) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

Pela discussão das páginas [V.171](#) e [V.168](#) temos um critério preliminar para identificar uma cônica:

**Corolário V.24.9.**

<i>Cônicas com único centro</i>	$4ac - b^2 \neq 0$ (*) é um SPD	<i>ponto, circunferência, elipse, hipérbole, duas retas concorrentes</i>
<i>Cônicas com infinitos centros</i>	$4ac - b^2 = 0$ (*) é um SPI	<i>duas retas paralelas ou idênticas</i>
<i>Cônicas que não possuem centro</i>	$4ac - b^2 = 0$ (*) é um SI	<i>parábola</i>

**Nota.** O conjunto vazio pode ser considerado uma cônica com um, infinitos ou nenhum centro.

- $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- $(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$  SPD ou SPI
- $\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k) = 0$
- COMO IDENTIFICAR A CÔNICA?

### V.24.1.3 Eliminação do termo quadrático misto por rotação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \quad b \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sistema de coordenadas ortogonal
- $\Sigma_2 = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$  rotação de  $\Sigma_1$  de  $\theta$  radianos em sentido anti-horário<sup>43</sup>
- $P = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$ :

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

**Nota.** A matriz do sistema acima, **matriz da rotação**, e sua respectiva matriz inversa são:

$$M_r = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad M_r^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

<sup>43</sup>Veja Seção V.19.3



QUAL O EFEITO DA ROTAÇÃO NO POLINÔMIO  $g$  ?

---

$$g(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) = a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f',$$

onde

$$a' = a \cos^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta$$

$$b' = (c - a) \sin 2\theta + b \cos 2\theta$$

$$c' = a \sin^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$$

$$d' = d \cos \theta + e \sin \theta$$

$$e' = e \cos \theta - d \sin \theta$$

$$f' = f.$$


---

**Nota.**

1. Rotações não alteram o termo independente.
2. Se  $d = e = 0$ , então  $d' = e' = 0$ , ou seja, rotações não criam novos termos lineares.

$$3. \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{inversa da matriz de rotação}} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$


---

- Para eliminar o termo quadrático misto:

$$b' = (c - a) \sin 2\theta + b \cos 2\theta = 0$$

- Neste, encontramos  $\tilde{g}$  dada por:

$$\tilde{g}(u, v) := g(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta),$$

$$\tilde{g}(u, v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f$$

---

PARA QUAL ROTAÇÃO (ESCOLHA DE  $\theta$ ) TEMOS

$$b' = (c - a) \sin 2\theta + b \cos 2\theta = 0?$$

---

Basta escolher  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{a - c}{b}.$$

---

**Nota.** Neste caso, temos:

$$a' - c' = a + c$$

$$a' - c' = \frac{b}{\sin(2\theta)}$$

$$a' - c' = b \sqrt{1 + \frac{(a - c)^2}{b^2}}$$

**Roteiro:** é sempre possível eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação no sentido anti-horário de  $\Sigma_1$  de ângulo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Dada a cônica

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \text{ com } b \neq 0,$$

sempre é possível encontrar uma rotação (**Passo 1**) de modo que a equação

$$\tilde{g}(u, v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f = 0$$

no novo sistema de coordenadas satisfaz:

- o coeficiente do termo quadrático misto é nulo;
- o termo independente fica inalterado;
- os coeficientes dos termos quadráticos são soluções de (\*) (**Passo 2**);
- os coeficientes dos termos lineares são soluções de (\*\*) (**Passo 3**).
- **Passo 1:** Tome  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{a - c}{b}.$$

- **Passo 2:**  $a'$  e  $c'$  são soluções do sistema:

$$(*) \begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \frac{b}{\sin(2\theta)} = b\sqrt{1 + \frac{(a-c)^2}{b^2}} \end{cases}$$

- **Passo 3:**  $d'$  e  $e'$  são soluções do sistema:

$$(**) \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

**Nota.** Como rotações não criam novos termos lineares, podemos alcançar o Objetivo da pág. [V.166](#) se aplicarmos primeiro uma translação para tentar eliminar os termos lineares e depois uma rotação para eliminar o termo quadrático misto!

---

#### V.24.1.4 Fórmulas úteis:

$$\sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cot(2\theta)}}$$

$$\cos(2\theta) = \cot(2\theta) \sin(2\theta)$$


---

**Exemplo V.24.10.** Ver Exercício [85](#) em [Slide de Exercícios](#).

---

#### V.24.2 Retas secantes, tangentes e normais

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal no plano  $\pi$
- 

QUAL A POSIÇÃO RELATIVA DE UMA RETA  $r$  E UMA CÔNICA  $C$  EM  $\pi$  ?

---

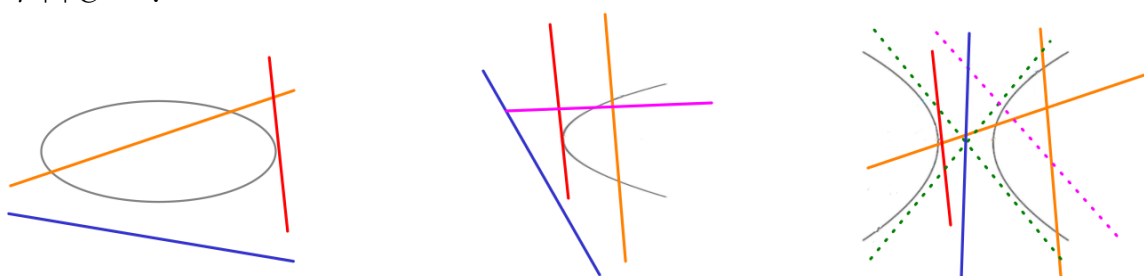
- $r : X = (h, k) + \lambda(m, n), \lambda \in \mathbb{R}$
- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  (Proposição [V.26.3](#)):
  - *o conjunto vazio:* ✓
  - *um ponto:* ✓
  - *uma reta ou duas retas idênticas ou duas retas paralelas ou duas retas concorrentes:* Seção [V.15.1](#): Posição relativa entre retas ✓
  - *uma circunferência (caso particular da elipse),*

- *uma elipse, ou*
- *uma hipérbole, ou*
- *uma parábola.*

- $C$ : uma elipse ou hipérbole ou parábola



- $r \cap C = ?$



- $X \in r \cap C \iff X = (h + \lambda m, k + \lambda n)$  e  $g(X) = 0$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ :
  - uma equação de grau no máximo 2 na variável  $\lambda$ ;
  - cada solução corresponde a um ponto  $X$  de  $r \cap C$ :
    - \*  $r \cap C$  possui 2 pontos distintos;
    - \*  $r \cap C$  possui 1 único ponto;
    - \*  $r \cap C = \emptyset$ .

**Definição V.24.11.** Seja  $C$  uma elipse, hipérbole ou parábola.

1. Uma reta  $r$  é **secante** a  $C$  se  $r \cap C$  possui 2 pontos distintos.
2. Uma reta  $r$  é **tangente** a  $C$  se  $r \cap C$  possui 1 único ponto  $T$ :
  - (a) o ponto  $T$  é chamado **ponto de tangência** e qualquer vetor diretor de  $r$  é chamado **vetor tangente** a  $C$  em  $T$ .
  - (b) a reta perpendicular a  $r$  em  $T$  é chamada **reta normal** a  $C$  em  $T$ .

## V.24.2.1 Elipse

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2} + \frac{(k+\lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$

$$(*) \quad \underbrace{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}_{>0} \lambda^2 + 2 \left( \frac{m}{a^2} h + \frac{n}{b^2} k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

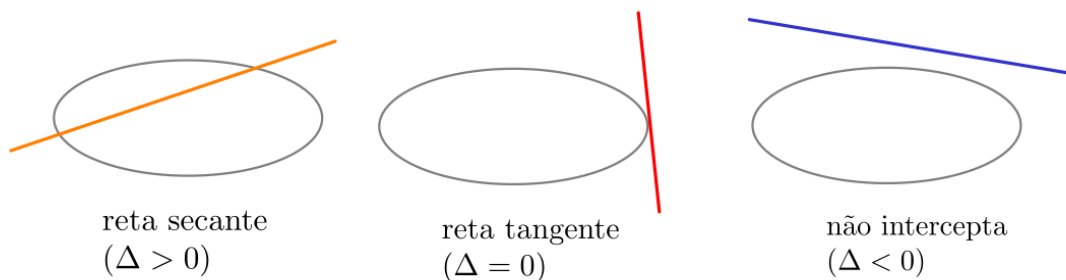
- a equação (\*) é de 2º grau

- 

$$\Delta = 4 \left[ \left( \frac{m}{a^2} h + \frac{n}{b^2} k \right)^2 - \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) \right]$$

Os três possíveis casos da posição relativa da reta e elipse são:

- $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
- $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de (\*)
- $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$



**Proposição V.24.12.** Seja  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  uma equação reduzida da elipse  $C$ .

Se  $T = (h, k)$  é um ponto da elipse, então a equação da reta tangente a  $C$  em  $T$  é dada por

$$\frac{h}{a^2}x + \frac{k}{b^2}y = 1.$$

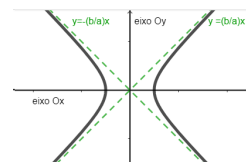
**Exemplo V.24.13.** Ver Exercício 86 em [Slide de Exercícios](#).

### V.24.2.2 Hipérbole

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

cujas assíntotas são<sup>44</sup>  $A_1 : y = \frac{b}{a}x$  e  $A_2 : y = -\frac{b}{a}x$ .



$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

$$\bullet X \in r \cap C \iff \frac{(h + \lambda m)^2}{a^2} - \frac{(k + \lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$$

$$(**) \left( \underbrace{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}}_{\neq 0?} \right) \lambda^2 + 2 \left( \frac{m}{a^2}h - \frac{n}{b^2}k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

<sup>44</sup>Ver p. [V.133](#)

•

$$\iff \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right) \left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) = 0$$

$$\iff \frac{m}{a} = \frac{n}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{a} = -\frac{n}{b}$$

$$\iff \vec{r} = (m, n) \parallel (a, b) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (m, n) \parallel (a, -b)$$

$$\stackrel{(\text{??})}{\iff} r \text{ é paralela a uma das assíntotas de } C$$

- Se  $r$  não é paralela a qualquer das assíntotas de  $C$ :
  - a equação (\*\*) é de segundo grau, e portanto:
    - $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
    - $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de (\*\*)
    - $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$
- Se  $r$  é paralela a uma das assíntotas de  $C$ :
  - a equação (\*\*) é de primeiro grau, e portanto:
    - paralela coincidente:  $r$  é a assíntota e não intercepta  $C$
    - paralela distinta:  $r$  é paralela à assíntota e intercepta  $C$  em  $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$ , onde  $\lambda_1$  é a raiz de (\*\*)



- tome  $\vec{r} = (m, n) = (a, b)$  (o caso  $\vec{r} = (m, n) = (a, -b)$  é similar)

- (\*\*\*) fica:

$$(***) \quad 2 \left( \frac{1}{a}h - \frac{1}{b}k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

- (\*\*\*) tem nenhuma solução:

$$\frac{h}{a} = \frac{k}{b} \iff \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 0 \neq 1 \text{ e } k = \frac{b}{a}h$$

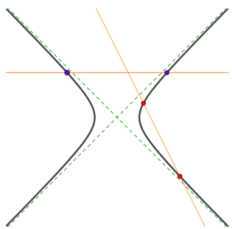
$$\therefore (h, k) \in r \cap A_1 \implies r = A_1$$

- (\*\*\*) tem uma única solução  $\lambda_1$ :

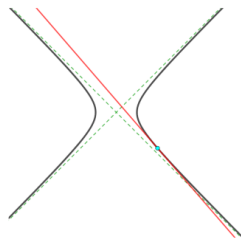
$$P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n) \in r \cap C$$

$$\therefore r \cap A_1 = \emptyset \implies r \parallel A_1, r \neq A_1$$

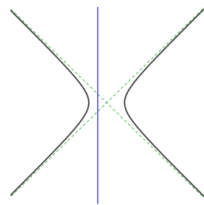
Os cinco possíveis casos da posição relativa da reta e hipérbole são:



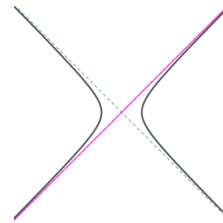
reta secante  
( $\Delta > 0$ )



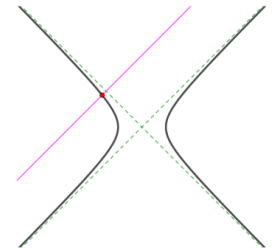
reta tangente  
( $\Delta = 0$ )



não intercepta  
( $\Delta < 0$ )



assíntota

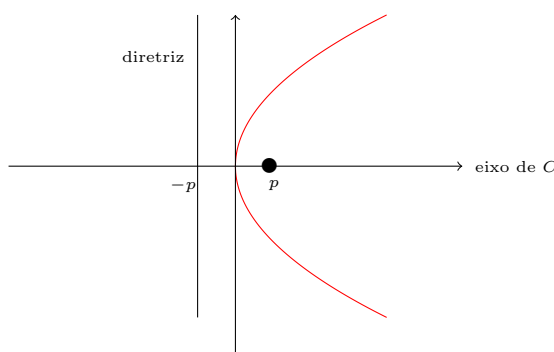


paralela a uma assíntota

## V.24.2.3 Parábola

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = y^2 - 4px = 0.$$

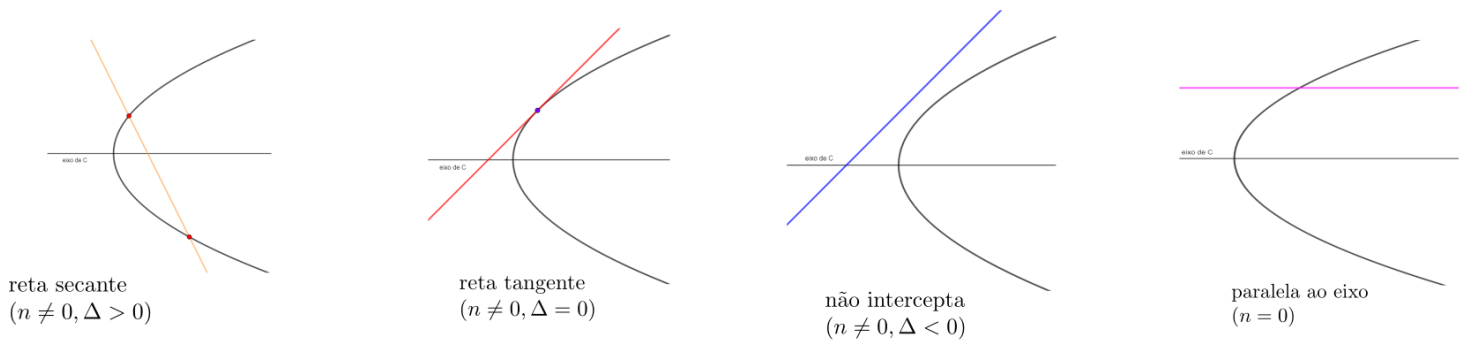


$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff (k + \lambda n)^2 = 4p(h + \lambda m) \iff$   
 $(\diamond) \quad n^2 \lambda^2 + 2(nk - 2pm)\lambda + (k^2 - 4ph) = 0$
- $n \neq 0$ :
  - a equação  $(\diamond)$  é de 2º grau e portanto:
    - $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
    - $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de  $(\diamond)$
    - $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$
- $n = 0$ :
  - $\vec{r} = (m, 0)$ ,  $m \neq 0$  e  $p \neq 0$
  - $(\diamond)$  é de 1º grau e tem uma única solução:  $\lambda_1 = \frac{k^2 - 4ph}{4pm}$
  - $r$  é paralela ao eixo de  $C$ <sup>a</sup> e intercepta  $C$  no ponto  $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$ .

<sup>a</sup>Ver Definição V.23.1 e (V.23.2)

Os quatro possíveis casos da posição relativa da reta e parábola são:



## Objetivo

Estudar o lugar geométrico chamado **cônica**:

- curvas planas descritas por uma equação de segundo grau em duas variáveis.  
(fixado um sistema de coordenadas)

## V.25 Elipse, Hipérbole e Parábola

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, B)$  em um plano  $\pi$ , vimos que as equações reduzidas de elipses, hipérbolas e parábolas são dadas por formas particulares de **equação de grau 2 em duas variáveis**:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1, \quad p \neq q, p, q > 0$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 1, \quad pq < 0$$

$$y = \frac{1}{q}x^2, \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{q}y^2, \quad q \neq 0$$

Trataremos agora do caso geral de uma equação de grau 2 em duas variáveis:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

## V.26 Cônicas: classificação

**Definição V.26.1.** Uma **cônica** é o lugar geométrico dos pontos  $X = (x, y)$  no plano  $\pi$  que satisfazem uma equação de segundo grau

$$g(x, y) = 0$$

onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $ax^2, bxy, cy^2$ : termos quadráticos
- $bxy$ : termo quadrático misto
- $dx, ey$ : termos lineares
- $f$ : termo independente

**Exemplo V.26.2.** Fixe um s.c.o.  $\Sigma = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .<sup>45</sup>

1.  $x^2 + y^2 = -1$ : conjunto vazio
2.  $x^2 + y^2 = 0$ : um ponto  $P = (0, 0)$
3.  $x + 1 = 0$ : uma reta
4.  $x^2 + 2xy + y^2 = 0 \iff (x + y)^2 = 0$ : duas retas paralelas idênticas
5.  $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0 \iff (x + y)(x + y + 1) = 0$ : duas retas paralelas distintas
6.  $x^2 - y^2 = 0 \iff (x - y)(x + y) = 0$ : duas retas concorrentes
7.  $x^2 + y^2 = 1$ : circunferência
8.  $x^2 + 2y^2 = 1$ : elipse
9.  $x^2 - y^2 = 1$ : hipérbole
10.  $x^2 - y = 0$ : parábola

<sup>45</sup>Lembrar da equação geral da reta no plano (V.20.1)

**Proposição V.26.3.** *Um subconjunto  $C$  do plano  $\pi$  é uma cônica se, e somente se  $C$  é:*

1. o conjunto vazio, ou
2. um ponto, ou
3. uma reta, ou
4. duas retas idênticas, ou
5. duas retas paralelas, ou
6. duas retas concorrentes, ou
7. uma circunferência, ou
8. uma elipse, ou
9. uma hipérbole, ou
10. uma parábola.

$\emptyset$   
vazio


•  
ponto

  
duas retas  
idênticas

  
duas retas  
paralelas

  
duas retas  
concorrentes

  
circunferência

  
elipse

  
hipérbole

  
parábola

## V.27 Identificação: uso de translação e rotação

Dada uma equação de 2º grau, identificar e esboçar a cônica.

- fazendo uma mudança do sistema de coordenadas:
  - a geometria da cônica é mantida;
  - a equação da cônica se reduz a uma mais simples.
- possíveis mudanças:
  - translações;
  - rotações.

$C$ : cônica  $g(x, y) = 0$ , onde

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $b = d = e = 0$ : sabemos identificar a cônica

**Objetivo: eliminar os termos lineares e o termo quadrático misto:**

- caso 1: eliminar os termos lineares
  - \* buscar alguma translação que transforme  $g$  em um polinômio  $\tilde{g}$  sem os termos lineares
- caso 2: eliminar o termo quadrático misto
  - \* buscar alguma rotação que transforme  $g$  em um polinômio  $\tilde{g}$  sem o termo quadrático misto
- quando necessário aplicar uma translação em  $g$  para obter um polinômio  $\tilde{g}$  sem os termos lineares e uma rotação em  $\tilde{g}$  para obter um polinômio  $\tilde{\tilde{g}}$  sem o termo quadrático misto (e sem os lineares).

### V.27.1 Eliminação dos termos lineares por translação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sistema de coordenadas ortogonal
- $O' = (h, k)_{\Sigma_1}$  ponto no plano  $\pi$
- $\Sigma_2 = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  translação de  $\Sigma_1$  para o ponto  $O'$  <sup>46</sup>
- $P = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$ :

$$\begin{cases} x = h + u \\ y = k + v \end{cases}$$

---

QUAL O EFEITO DA TRANSLAÇÃO NO POLINÔMIO  $g$  ?

---

$$g(h + u, k + v) = au^2 + buv + cv^2 + (2ah + bk + d)u + (bh + 2ck + e)v + g(h, k)$$


---

- Para eliminar os termos lineares:

$$(*) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

- Se o sistema tem solução, encontramos  $\tilde{g}$  dada por:

$$\tilde{g}(u, v) := g(h + u, k + v),$$

$$\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k)$$

---

<sup>46</sup>Veja Seção [V.19.2](#)

---

PARA QUAL TRANSLAÇÃO (ESCOLHA DE  $h$  E  $k$ ) O SISTEMA

$$(*) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

TEM SOLUÇÃO?

---

$$D := \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$$

$$\begin{cases} D \neq 0, & (*) \text{ tem uma única solução } (h, k) \text{ (SPD)} \\ D = 0, & (*) \text{ tem infinitas soluções } (h, k) \text{ (SPI)} \\ D = 0, & (*) \text{ não tem solução (incompatível) (SI)}^{47} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D \neq 0, & \text{podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SPI, podemos eliminar os termos lineares} \\ D = 0 & \text{e SI, não podemos eliminar os termos lineares} \end{cases}$$

---

**Nota.** Se o sistema  $(*)$  possui infinitas soluções, o valor de  $g(h, k)$  não depende da escolha da solução  $(h, k)$  ([Verifique! veja Boulos, Ex. 23.10, p. 372 \(sugestão p. 525\)](#))

---

<sup>3</sup>SPD: sistema possível determinado, SPI: sistema possível indeterminado, SI: sistema impossível



**Roteiro: determinar se é possível e então eliminar os termos lineares por meio de uma translação de  $\Sigma_1$  para  $O' = (h, k)$**

Dada a cônica

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ onde } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

• **Passo 1:** Calcular o determinante  $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$ .

• **Passo 2:**

- Se  $D \neq 0$ , então existe uma única translação para o ponto  $O' = (h, k)$  de modo que  $\tilde{g}$  não contém os termos lineares.
- Se  $D = 0$ , então pode ou não existir alguma translação para o ponto  $O' = (h, k)$  de modo que  $\tilde{g}$  não contém os termos lineares.
- Os escalares  $h$  e  $k$ , quando existem, são soluções do sistema

$$(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0. \end{cases}$$

• **Passo 4:** A equação  $\tilde{g}(u, v) = 0$  no novo sistema de coordenadas satisfaz:

- os coeficientes dos termos quadráticos são iguais em  $\tilde{g}$  e  $g$ ;
- os termos lineares são nulos;
- o termo independente em  $\tilde{g}$  é

$$g(h, k),$$

onde  $h$  e  $k$  são soluções de  $(\star)$

isto é,

$$\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k).$$

**Observe:**

- $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$

- 

$$(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ah + \frac{b}{2}k + \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{b}{2}h + ck + \frac{e}{2} = 0 \end{cases}$$

- $g(h, k) = \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$

- $\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + \frac{d}{2}h + \frac{e}{2}k + f$

- $D = \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2 = 0 \iff \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} = ac - \frac{b^2}{4} = 0$

- 

$$M = \left( \begin{array}{cc|c} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \hline \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{array} \right) \quad (\text{V.27.1})$$

- $(\star)$  é obtido pelas 2 primeira linhas da matriz acima
- o termo constante de  $\tilde{g}$  é obtido pela última linha da matriz acima
- $D$  é o determinante da submatriz principal

**Definição V.27.1.** A matriz simétrica  $M$  acima é chamada de **matriz de  $g$** .

**Exercício.** Verifique que  $g(x, y) = X^t M X$ , onde  $X = (x \ y \ 1)_{1 \times 3}$ . (**tarefa!**)

**Exemplo V.27.2.** Ver Exercício 84 em [Slide de Exercícios](#).

## V.27.2 Classificação das cônicas através do centro

---

COMO DECIDIR QUAL É A CÔNICA QUE TEM EQUAÇÃO

$$\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k) = 0?$$


---

**Definição V.27.3.** Um ponto  $O$  é o **centro** de uma cônica  $C$  não-vazia quando:

$$P \in C \iff P' \in C,$$

onde  $P'$  é o simétrico de  $P$  em relação a  $O$ .

---

Observando as possíveis cônicas (Proposição V.26.3) podemos inferir que a cônica dada por:

1. um ponto: tem um único centro,
  2. uma reta: tem infinitos centros,
  3. duas retas idênticas: tem infinitos centros,
  4. duas retas paralelas: tem infinitos centros,
  5. duas retas concorrentes: tem um único centro,
  6. uma circunferência: tem um único centro,
  7. uma elipse: tem um único centro,
  8. uma hipérbole: tem um único centro,
  9. uma parábola: tem 0 centro.
  10. o conjunto vazio: tem 0, 1 ou infinitos centros
- 

COMO DECIDIR, QUANDO EXISTE, QUAL PONTO É CENTRO DE UMA CÔNICA?

---

**Exemplo V.27.4.** Em  $\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k) = 0$ ,

- $\tilde{g}(-u, -v) = \tilde{g}(u, v)$
- $(-u, -v)$  é o simétrico de  $(u, v)$  em relação a  $O' = (h, k)_{\Sigma_1} = (0, 0)_{\Sigma_2}$
- $O' = (h, k)$  é o centro da cônica de equação  $\tilde{g}(u, v) = 0$ , onde  $(h, k)$  satisfaz o sistema

$$(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$$

Para uma cônica não vazia  $C$ , se  $h$  e  $k$  satisfazem o sistema  $(\star)$ :

- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- $(h, k)$  ponto no plano, com s.c.o  $\Sigma_1$ , tal que  $h$  e  $k$  satisfazem o sistema  $(\star)$
- translada o sistema  $\Sigma_1$  para  $O' = (h, k)$
- obtemos  $\tilde{g}$  como no Exemplo V.27.4
- $O' = (h, k)$  é o centro da cônica  $C$

Para uma cônica não vazia  $C$ , se  $O' = (h, k)$  é o centro de  $C$ : (tarefa!)

- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- $O' = (h, k)$  é o centro da cônica  $C$
- transladar o sistema  $\Sigma_1$  para  $O' = (h, k)_{\Sigma_1} = (0, 0)_{\Sigma_2}$
- 

$$C : \tilde{g}(u, v) = g(h+u, k+v) = au^2 + buv + cv^2 + \underbrace{(2ah + bk + d)}_{d'} u + \underbrace{(bh + 2ck + e)}_{e'} v + g(h, k)$$

- $(-u, -v)$  é o simétrico de  $(u, v)$  em relação a  $O'$  e  $(u, v) \in C \Leftrightarrow (-u, -v) \in C$ :

$$\tilde{g}(-u, -v) = \tilde{g}(u, v) = 0$$

$$\bullet \quad \begin{cases} au^2 + buv + cv^2 + d'u + e'v + g(h, k) = 0 \\ au^2 + buv + cv^2 - d'u - e'v + g(h, k) = 0 \end{cases} \implies d'u + e'v = 0,$$

$$\text{onde } \begin{cases} d' := 2ah + bk + d \\ e' := bh + 2ck + e \end{cases}$$

■  $d' = e' = 0 \implies h$  e  $k$  satisfazem  $(\star)$

■  $d'$  ou  $e'$  não nulo:

\*  $\Gamma : d'u + e'v = 0$  é uma reta que contém  $(0, 0)$

\*  $C \subset \Gamma$ :<sup>a</sup> ou  $C = \{(0, 0)\}$  ou  $C = \Gamma$  que contém  $(0, 0)$

\* em ambos casos:

$$(0, 0) \in C \implies \tilde{g}(0, 0) = 0 \implies g(h, k) = 0$$

\* em ambos casos:  $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq -\frac{d'}{e'}$  ou  $m \neq -\frac{e'}{d'}$ :

$$\Gamma_1 : v = mx \text{ é tal que } \Gamma_1 \cap C = \{(0, 0)\}$$

\*  $\tilde{g}(x, mx) = 0$  tem solução única

$$\iff x[(a + bm + cm^2)x - (d' - e'm)] = 0$$

$$\iff x = 0 = \frac{d' - e'm}{a + bm + cm^2} (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$$

$$\implies d' = e'm, \text{ para infinitos valores de } m$$

$$\implies d' = e' = 0$$

•  $h$  e  $k$  satisfazem o sistema  $(\star)$

<sup>a</sup>Ver Proposição V.26.3

**Proposição V.27.5.**  $O = (h, k)$  é centro de uma cônica não vazia de equação


$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

se, e somente se,  $(h, k)$  é solução do sistema

$$(*) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0. \end{cases}$$

Pela discussão das páginas [V.171](#) e [V.168](#) temos um critério preliminar para identificar uma cônica:

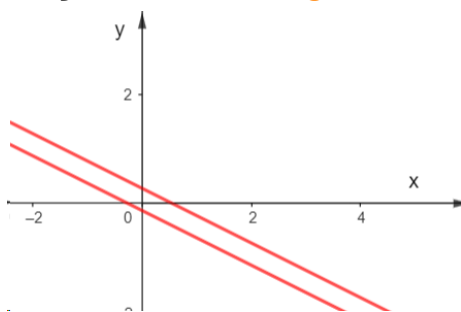
**Corolário V.27.6.**

<i>Cônicas com único centro</i>	$4ac - b^2 \neq 0$ (*) é um SPD	<i>ponto, circunferência, elipse, hipérbole, duas retas concorrentes</i>
<i>Cônicas com infinitos centros</i>	$4ac - b^2 = 0$ (*) é um SPI	<i>duas retas paralelas ou idênticas, uma reta</i>
<i>Cônicas que não possuem centro</i>	$4ac - b^2 = 0$ (*) é um SI	<i>parábola</i> 

**Nota.** O conjunto vazio pode ser considerado uma cônica com um, infinitos ou nenhum centro.

Para uma dada cônica, sabemos:

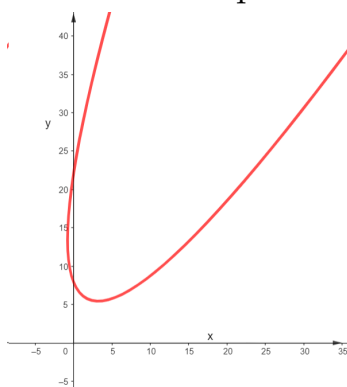
- sua equação:  $g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ;
  - determinar se:  $(\star) \begin{cases} 2ah + bk + d = 0 \\ bh + 2ck + e = 0 \end{cases}$  é SPD ou SPI ou SI:
    - se SPD: é possível eliminar termos lineares e a cônica tem um centro: como decidir qual é a cônica (ponto, circunf., elipse, hip., retas concorrentes)?
    - se SPI: é possível eliminar termos lineares e a cônica tem infinitos centros: como decidir qual é a cônica (retas paralelas ou idênticas)?
- \* no Ex. 84b (esboço feito no [Geogebra Classic](#)):



$$\tilde{g}(u, v) = 7u^2 + 28uv + 28v^2 - \frac{8}{7}$$

[Wolfram](#), [MathPapa](#), [OnlineCalculator.Guru](#) não fatoram a expressão da cônica (nem de  $g$  nem de  $\tilde{g}$ )!

- se SI: é impossível eliminar termos lineares e a cônica não tem centro (parábola):
- \* no Ex. 84a, a cônica é uma parábola: como fazer seu esboço<sup>48</sup>?



$$g(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 30y + 175$$

- nos casos SPD e SPI, escrever:  $\tilde{g}(u, v) = au^2 + buv + cv^2 + g(h, k) = 0$

<sup>48</sup>Feito no [Geogebra Classic](#)

### V.27.3 Eliminação do termo quadrático misto por rotação

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, b \neq 0.$$

- $\Sigma_1 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  sistema de coordenadas ortogonal
- $\Sigma_2 = (O, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$  rotação de  $\Sigma_1$  de  $\theta$  radianos em sentido anti-horário<sup>49</sup>
- $P = (x, y)_{\Sigma_1} = (u, v)_{\Sigma_2}$ :

$$\begin{cases} x = u \cos \theta - v \sin \theta \\ y = u \sin \theta + v \cos \theta \end{cases}$$

**Nota.** A matriz do sistema acima, **matriz da rotação**<sup>50</sup>, e sua respectiva matriz inversa são:

$$M_r = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad M_r^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

QUAL O EFEITO DA ROTAÇÃO NO POLINÔMIO  $g$  ?

$$g(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) = ?$$

<sup>49</sup>Veja Seção V.19.3

<sup>50</sup>É uma matriz ortogonal.



$$g(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) = a'u^2 + b'uv + c'v^2 + d'u + e'v + f',$$

onde

$$a' = a \cos^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta$$

$$b' = (c - a) \sin 2\theta + b \cos 2\theta$$

$$c' = a \sin^2 \theta - b \sin \theta \cos \theta + c \cos^2 \theta$$

$$d' = d \cos \theta + e \sin \theta$$

$$e' = e \cos \theta - d \sin \theta$$

$$f' = f.$$

**Nota.**

1. Rotações não alteram o termo independente.
2. Se  $d = e = 0$ , então  $d' = e' = 0$ , ou seja, rotações não criam novos termos lineares.

$$3. \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}_{\text{inversa da matriz de rotação}} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

- Para eliminar o termo quadrático misto:

$$b' = (c - a) \sin 2\theta + b \cos 2\theta = 0$$

- Neste caso, encontramos  $\tilde{g}$  dada por:

$$\tilde{g}(u, v) := g(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta),$$

$$\tilde{g}(u, v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f$$

PARA QUAL ROTAÇÃO (ESCOLHA DE  $\theta$ ) TEMOS

$$b' = (c - a) \sin 2\theta + b \cos 2\theta = 0 ?$$

.....

Basta escolher  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que<sup>51</sup>

$$\cot(2\theta) = \frac{a - c}{b}.$$

**Nota.** Valem as relações:

$$a' - c' = a + c$$

$$a' - c' = \frac{b}{\sin(2\theta)}$$

$$a' - c' = b \sqrt{1 + \frac{(a - c)^2}{b^2}}$$

<sup>51</sup>Podemos considerar  $b \neq 0$ , pois caso contrário a equação da cônica já não possui o termo misto e não é preciso fazer rotação.

**Roteiro:** é sempre possível eliminar o termo quadrático misto por meio de uma rotação no sentido anti-horário de  $\Sigma_1$  de ângulo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

Dada a cônica

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \text{ com } b \neq 0,$$

sempre é possível encontrar uma rotação (**Passo 1**) de modo que a equação

$$\tilde{g}(u, v) = a'u^2 + c'v^2 + d'u + e'v + f = 0$$

no novo sistema de coordenadas satisfaz:

- o coeficiente do termo quadrático misto é nulo;
- o termo independente fica inalterado;
- os coeficientes dos termos quadráticos são soluções de (\*) (**Passo 2**);
- os coeficientes dos termos lineares são soluções de (\*\*) (**Passo 3**).
- **Passo 1:** Tome  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{a - c}{b}.$$

- **Passo 2:**  $a'$  e  $c'$  são soluções do sistema:

$$(*) \begin{cases} a' + c' = a + c \\ a' - c' = \frac{b}{\sin(2\theta)} = b\sqrt{1 + \frac{(a-c)^2}{b^2}} \end{cases}$$

- **Passo 3:**  $d'$  e  $e'$  são soluções do sistema:

$$(**) \begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

**Nota.** Como rotações não criam novos termos lineares, podemos alcançar o Objetivo da pág. [V.166](#) se aplicarmos primeiro uma translação para eliminar (quando possível) os termos lineares e depois uma rotação para eliminar o termo quadrático misto!

---

### Fórmulas úteis:

Sabendo o valor de  $\cot(2\theta)$ , sabemos o valor de  $\sin(2\theta)$ :

$$\sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cot(2\theta)}},$$

e portanto de  $\cos(2\theta)$ :

$$\cos(2\theta) = \cot(2\theta) \sin(2\theta).$$

Consequentemente, mesmo sem saber o exato valor do ângulo  $\theta$  que nos fornece a rotação desejada, podemos determinar os valores de  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$  através do sistema:

$$\begin{cases} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta) \end{cases}$$

Assim, os coeficientes de  $\tilde{g}$  ficam bem determinados através dos sistemas (\*) e (\*\*) nos Passos 2 e 3 do Roteiro na página [V.179](#) e a cônica pode ser identificada.

---

**Exemplo V.27.7.** Ver Exercício [85](#) em [Slide de Exercícios](#).

---

## V.28 Retas secantes, tangentes e normais

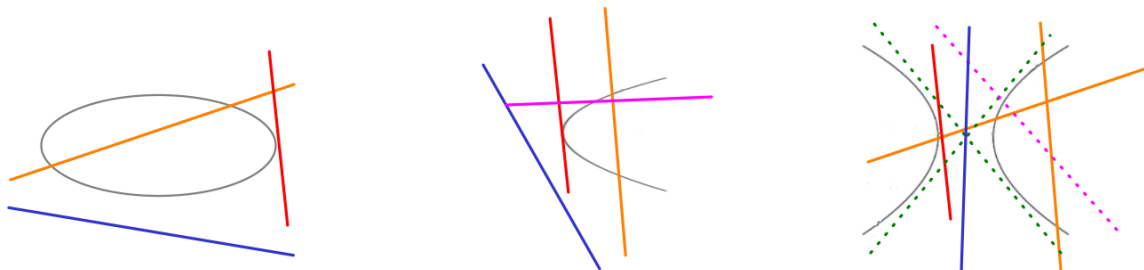
- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal no plano  $\pi$

QUAL A POSIÇÃO RELATIVA DE UMA RETA  $r$  E UMA CÔNICA  $C$  EM  $\pi$  ?

- $r : X = (h, k) + \lambda(m, n), \lambda \in \mathbb{R}$
- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  (Proposição [V.26.3](#)):
  - o conjunto vazio: ✓
  - um ponto: ✓
  - uma reta ou duas retas idênticas ou duas retas paralelas ou duas retas concorrentes: Seção [V.15.1](#): Posição relativa entre retas ✓
  - uma circunferência (caso particular da elipse),
  - uma elipse, ou
  - uma hipérbole, ou
  - uma parábola.
- $C$ : uma elipse ou hipérbole ou parábola



- $r \cap C = ?$



•  $X \in r \cap C \iff X = (h + \lambda m, k + \lambda n)$  e  $g(X) = 0$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

■ uma equação de grau no máximo 2 na variável  $\lambda$ , a saber:

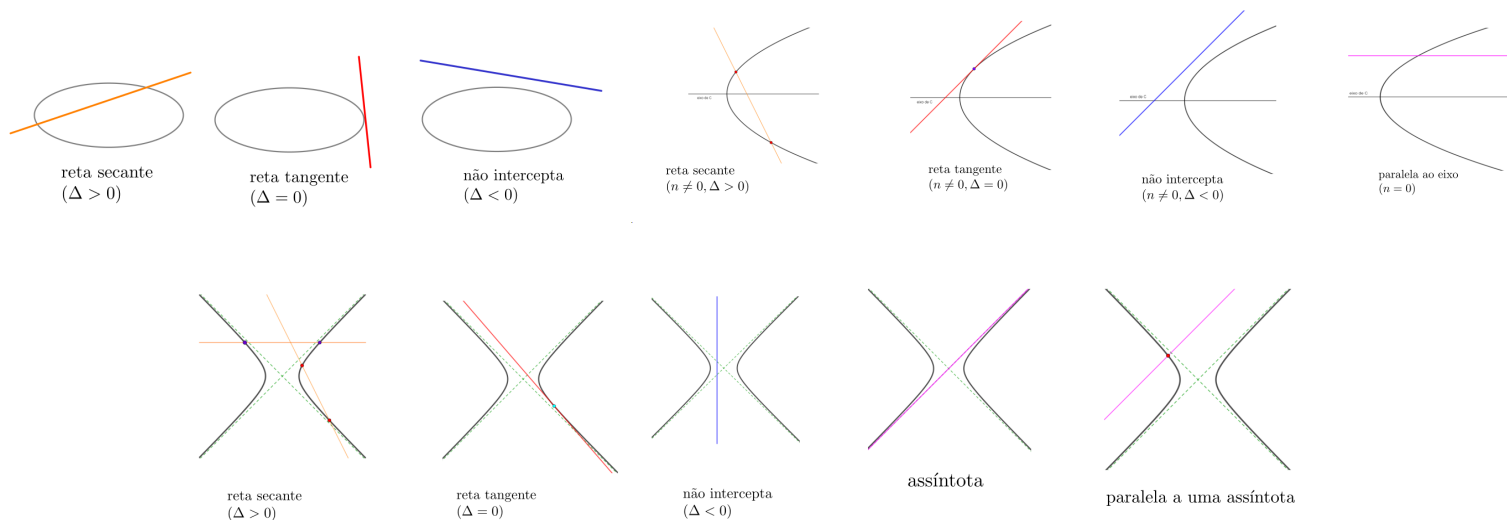
$$(am^2 + bmn + cn^2)\lambda^2 + (2ahm + bmk + bnh + 2cnk + dm + en)\lambda + (f + ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek) = 0$$

■ cada solução  $\lambda$  da equação acima corresponde a um ponto  $X$  de  $r \cap C$ :

- \*  $r \cap C$  pode possuir 2 pontos distintos;
- \*  $r \cap C$  pode possuir 1 único ponto;
- \*  $r \cap C$  pode ser  $\emptyset$ .

**Definição V.28.1.** Seja  $C$  uma elipse, hipérbole ou parábola.

1. Uma reta  $r$  é **secante** a  $C$  se  $r \cap C$  possui 2 pontos distintos.
2. Uma reta  $r$  é **tangente** a
  - (a) elipse  $C$  se  $r \cap C$  possui 1 único ponto  $T$ ;
  - (b) hipérbole  $C$  se  $r \cap C$  possui 1 único ponto  $T$  e  $r$  não é paralela a uma assíntota;
  - (c) parábola  $C$  se  $r \cap C$  possui 1 único ponto  $T$  e  $r$  não é paralela ao eixo de simetria.
    - i. O ponto  $T$  é chamado **ponto de tangência** e qualquer vetor diretor de  $r$  é chamado **vetor tangente** a  $C$  em  $T$ .
    - ii. A reta perpendicular a  $r$  em  $T$  é chamada **reta normal** a  $C$  em  $T$ .



### V.28.1 Elipse

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2} + \frac{(k+\lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$

$$(*) \quad \underbrace{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}_{>0} \lambda^2 + 2 \left( \frac{m}{a^2} h + \frac{n}{b^2} k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

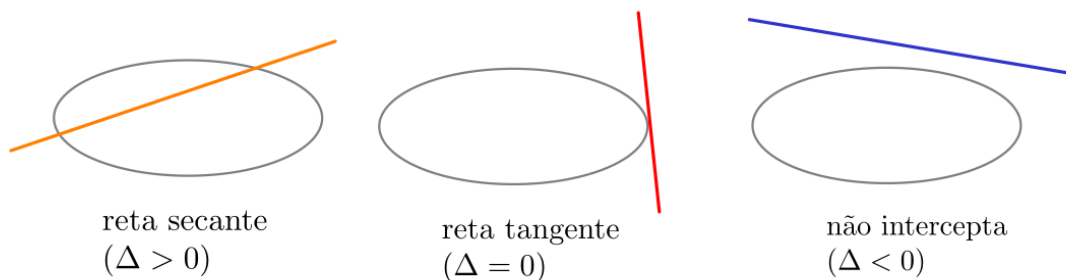
- a equação (\*) é de 2º grau

- 

$$\Delta = 4 \left[ \left( \frac{m}{a^2} h + \frac{n}{b^2} k \right)^2 - \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) \right]$$

Os três possíveis casos da posição relativa da reta e elipse são:

- $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
- $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de (\*)
- $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$



**Proposição V.28.2.** Seja  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  uma equação reduzida da elipse  $C$ .

Se  $T = (h, k)$  é um ponto da elipse, então a equação da reta tangente a  $C$  em  $T$  é dada por

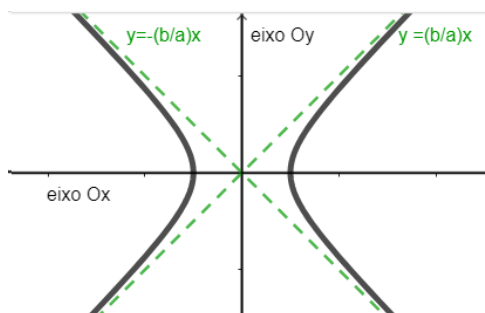
$$\frac{h}{a^2}x + \frac{k}{b^2}y = 1.$$

## V.28.2 Hipérbole

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

cujas assíntotas são<sup>52</sup>  $A_1 : y = \frac{b}{a}x$  e  $A_2 : y = -\frac{b}{a}x$ .



$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

$$X \in r \cap C \iff \frac{(h + \lambda m)^2}{a^2} - \frac{(k + \lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$$

<sup>52</sup>Ver p. V.133



$$(**) \left( \underbrace{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}}_{\neq 0?} \right) \lambda^2 + 2 \left( \frac{m}{a^2} h - \frac{n}{b^2} k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

•

$$\iff \frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = \left( \frac{m}{a} - \frac{n}{b} \right) \left( \frac{m}{a} + \frac{n}{b} \right) = 0$$

$$\iff \frac{m}{a} = \frac{n}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{a} = -\frac{n}{b}$$

$$\iff \vec{r} = (m, n) \parallel (a, b) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (m, n) \parallel (a, -b)$$

$$\stackrel{\text{(V.20.1)}}{\iff} r \text{ é paralela a uma das assíntotas de } C$$

- Se  $r$  não é paralela a qualquer das assíntotas de  $C$ :
  - a equação  $(**)$  é de segundo grau, e portanto:
    - $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
    - $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de  $(**)$
    - $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$
- Se  $r$  é paralela a uma das assíntotas de  $C$ :
  - a equação  $(**)$  é de primeiro grau, e portanto:
    - paralela coincidente:  $r$  é a assíntota e não intercepta  $C$
    - paralela distinta:  $r$  é paralela à assíntota e intercepta  $C$  em  $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$ , onde  $\lambda_1$  é a raiz de  $(**)$

- tome  $\vec{r} = (m, n) = (a, b)$  (o caso  $\vec{r} = (m, n) = (a, -b)$  é similar)

- a eq. de 2º grau (\*\*\*) fica:

$$(***) \quad 2 \left( \frac{1}{a}h - \frac{1}{b}k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

- (\*\*\*) tem nenhuma solução:

$$\frac{h}{a} = \frac{k}{b} \iff \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 0 \neq 1 \text{ e } k = \frac{b}{a}h$$

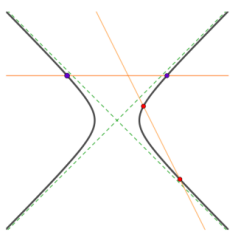
$$\therefore (h, k) \in r \cap A_1 \implies r = A_1$$

- (\*\*\*) tem uma única solução  $\lambda_1$ :

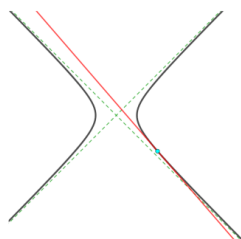
$$P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n) \in r \cap C$$

$$\therefore r \cap A_1 = \emptyset \implies r \parallel A_1, r \neq A_1$$

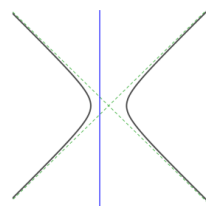
Os cinco possíveis casos da posição relativa da reta e hipérbole são:



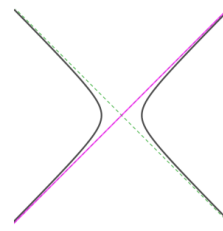
reta secante  
( $\Delta > 0$ )



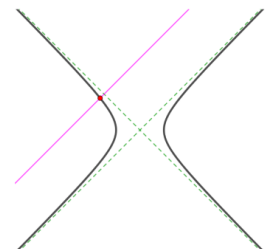
reta tangente  
( $\Delta = 0$ )



não intercepta  
( $\Delta < 0$ )



assíntota

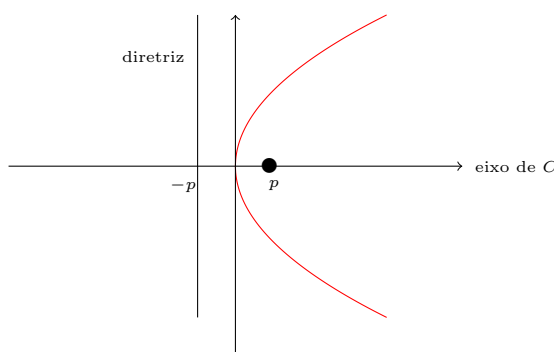


paralela a uma assíntota

### V.28.3 Parábola

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = y^2 - 4px = 0.$$

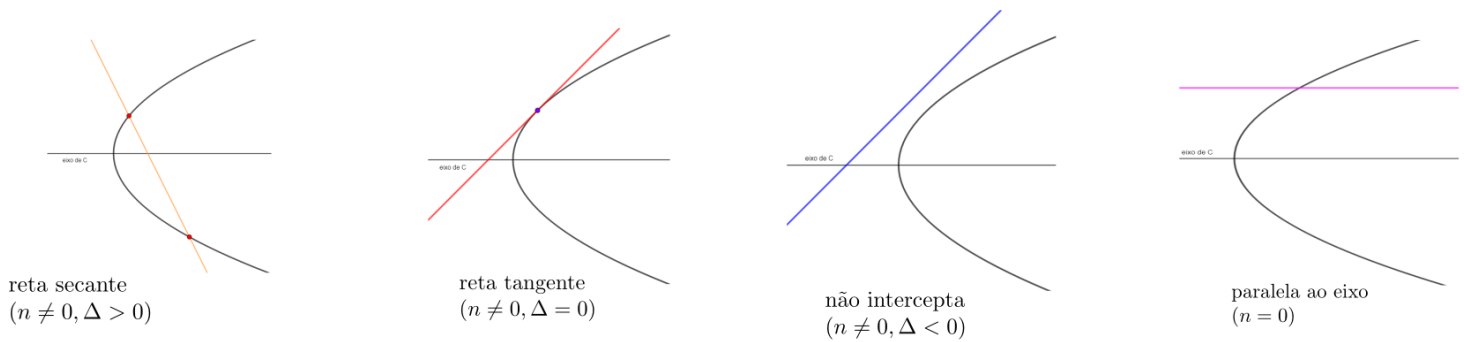


$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff (k + \lambda n)^2 = 4p(h + \lambda m) \iff$   
 $(\diamond) \underbrace{n^2}_{\neq 0?} \lambda^2 + 2(nk - 2pm)\lambda + (k^2 - 4ph) = 0$
- $n \neq 0$ :
  - a equação  $(\diamond)$  é de 2º grau e portanto:
    - $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
    - $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de  $(\diamond)$
    - $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$
- $n = 0$ :
  - $\vec{r} = (m, 0)$ ,  $m \neq 0$  e  $p \neq 0$
  - $(\diamond)$  é de 1º grau e tem uma única solução:  $\lambda_1 = \frac{k^2 - 4ph}{4pm}$
  - $r$  é paralela ao eixo de  $C$ <sup>a</sup> e intercepta  $C$  no ponto  $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$ .

<sup>a</sup>Ver Definição V.23.1 e (V.23.2)

Os quatro possíveis casos da posição relativa da reta e parábola são:



Se  $r$  é uma reta tangente a  $C$  no ponto  $T$  e  $\vec{r} = (m, n)$  é um vetor diretor de  $r$ , então a **reta normal** a  $C$  no ponto  $T$  é a reta que passa por  $T$  e tem  $(n, -m)$  como um vetor diretor.

**Exemplo V.28.3.** Ver Exercício 86 em [Slide de Exercícios](#).

### Objetivo

Verificar a posição relativa de uma reta e uma cônica e suas intersecções.

## V.29 Retas secantes, tangentes e normais

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal no plano  $\pi$

QUAL A POSIÇÃO RELATIVA DE UMA RETA  $r$  E UMA CÔNICA  $C$  EM  $\pi$  ?

- $r : X = (h, k) + \lambda(m, n), \lambda \in \mathbb{R}$

- $C : g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  (Proposição [V.26.3](#)):
  - *o conjunto vazio: ✓*
  - *um ponto: ✓*
  - *uma reta ou duas retas idênticas ou duas retas paralelas ou duas retas concorrentes: Seção [V.15.1](#): Posição relativa entre retas ✓*
  - *uma circunferência (caso particular da elipse),*
  - *uma elipse, ou*
  - *uma hipérbole, ou*
  - *uma parábola.*
- Vamos considerar  $C$  uma elipse ou hipérbole ou parábola

•  $X \in r \cap C \iff X = (h + \lambda m, k + \lambda n)$  e  $g(X) = 0$  para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

■ equação de grau no máximo 2 na variável  $\lambda$ , a saber:

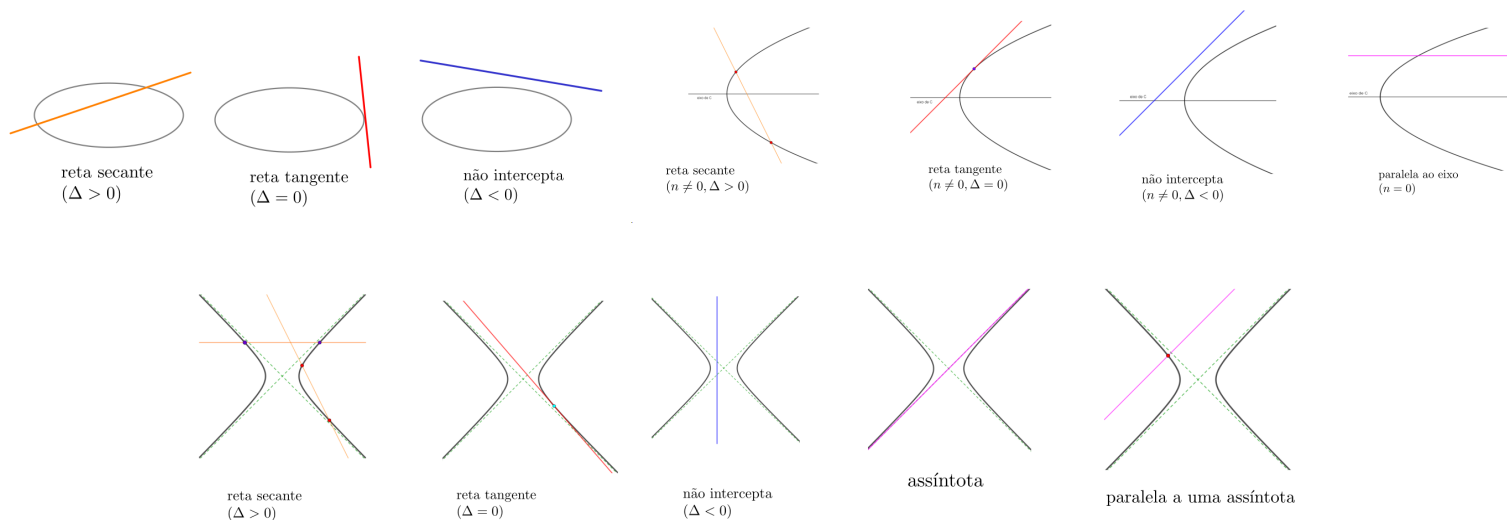
$$(am^2 + bmn + cn^2)\lambda^2 + (2ahm + bmk + bn h + 2cnk + dm + en)\lambda + (f + ah^2 + bhk + ck^2 + dh + ek) = 0$$

■ cada solução  $\lambda$  da equação acima corresponde a um ponto  $X$  de  $r \cap C$ :

- \*  $r \cap C$  pode possuir 2 pontos distintos;
- \*  $r \cap C$  pode possuir 1 único ponto;
- \*  $r \cap C$  pode ser  $\emptyset$ .

**Definição V.29.1.** Seja  $C$  uma elipse, hipérbole ou parábola.

1. Uma reta  $r$  é **secante** a  $C$  se  $r \cap C$  possui 2 pontos distintos.
2. Uma reta  $r$  é **tangente** a
  - (a) elipse  $C$  se  $r \cap C$  possui 1 único ponto  $T$ ;
  - (b) hipérbole  $C$  se  $r \cap C$  possui 1 único ponto  $T$  e  $r$  não é paralela a uma assíntota;
  - (c) parábola  $C$  se  $r \cap C$  possui 1 único ponto  $T$  e  $r$  não é paralela ao eixo de simetria.
    - i. O ponto  $T$  é chamado **ponto de tangência** e qualquer vetor diretor de  $r$  é chamado **vetor tangente** a  $C$  em  $T$ .
3. A reta perpendicular a reta tangente no ponto de tangência  $T$  é chamada **reta normal** a  $C$  em  $T$ .



### V.29.1 Elipse

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff \frac{(h+\lambda m)^2}{a^2} + \frac{(k+\lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$

$$(*) \quad \underbrace{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}_{>0} \lambda^2 + 2 \left( \frac{m}{a^2} h + \frac{n}{b^2} k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

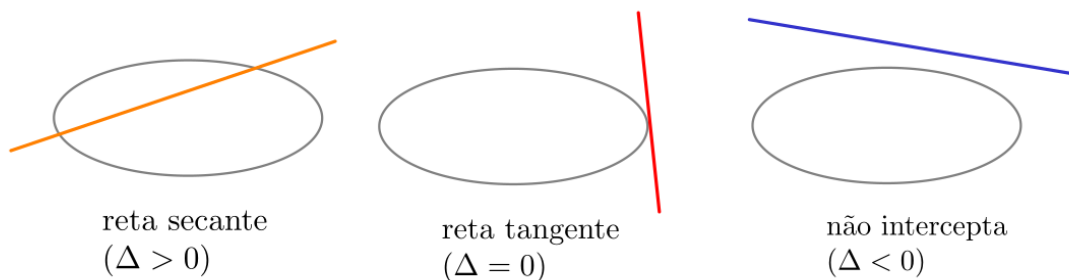
- a equação (\*) é de 2º grau

- 

$$\Delta = 4 \left[ \left( \frac{m}{a^2} h + \frac{n}{b^2} k \right)^2 - \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) \right]$$

Os três possíveis casos da posição relativa da reta e elipse são:

- $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
- $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de (\*)
- $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$



**Proposição V.29.2.** Seja  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  uma equação reduzida da elipse  $C$ .

Se  $T = (h, k)$  é um ponto da elipse, então a equação da reta tangente a  $C$  em  $T$  é dada por

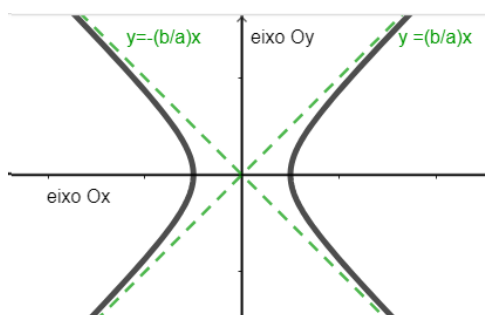
$$\frac{h}{a^2}x + \frac{k}{b^2}y = 1.$$

## V.29.2 Hipérbole

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

cujas assíntotas são<sup>53</sup>  $A_1 : y = \frac{b}{a}x$  e  $A_2 : y = -\frac{b}{a}x$ .



$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

$$X \in r \cap C \iff \frac{(h + \lambda m)^2}{a^2} - \frac{(k + \lambda n)^2}{b^2} - 1 = 0 \iff$$

<sup>53</sup>Ver p. V.133



$$(**) \left( \underbrace{\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2}}_{\neq 0?} \right) \lambda^2 + 2 \left( \frac{m}{a^2} h - \frac{n}{b^2} k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = \left( \frac{m}{a} - \frac{n}{b} \right) \left( \frac{m}{a} + \frac{n}{b} \right) = 0$$

$$\iff \frac{m}{a} = \frac{n}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{a} = -\frac{n}{b}$$

$$\iff \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n} = -\frac{a}{b}$$

$$\iff \vec{r} = (m, n) \parallel (a, b) \quad \text{ou} \quad \vec{r} = (m, n) \parallel (a, -b)$$

$$\stackrel{\text{(V.20.1)}}{\iff} r \text{ é paralela a uma das assíntotas de } C$$

- Se  $r$  não é paralela a qualquer das assíntotas de  $C$ :
  - a equação  $(**)$  é de segundo grau, e portanto:
    - $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
    - $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de  $(**)$
    - $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$
- Se  $r$  é paralela a uma das assíntotas de  $C$ :
  - a equação  $(**)$  é de primeiro grau, e portanto:
    - paralela coincidente:  $r$  é a assíntota e não intercepta  $C$
    - paralela distinta:  $r$  é paralela à assíntota e intercepta  $C$  em  $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$ , onde  $\lambda_1$  é a raiz de  $(**)$

- tome  $\vec{r} = (m, n) = (a, b)$  (o caso  $\vec{r} = (m, n) = (a, -b)$  é similar)

- a eq. de 2º grau (\*\*\*) fica:

$$(***) \quad 2 \left( \frac{1}{a}h - \frac{1}{b}k \right) \lambda + \left( \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} - 1 \right) = 0$$

- (\*\*\*) tem nenhuma solução:

$$\frac{h}{a} = \frac{k}{b} \iff \frac{h^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 0 \neq 1 \text{ e } k = \frac{b}{a}h$$

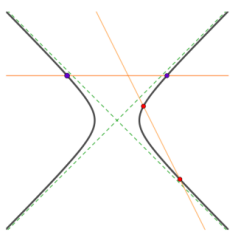
$$\therefore (h, k) \in r \cap A_1 \implies r = A_1$$

- (\*\*\*) tem uma única solução  $\lambda_1$ :

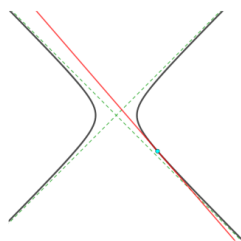
$$P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n) \in r \cap C$$

$$\therefore r \cap A_1 = \emptyset \implies r \parallel A_1, r \neq A_1$$

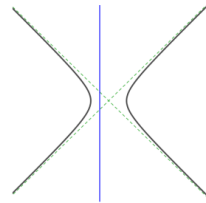
Os cinco possíveis casos da posição relativa da reta e hipérbole são:



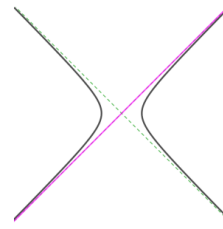
reta secante  
( $\Delta > 0$ )



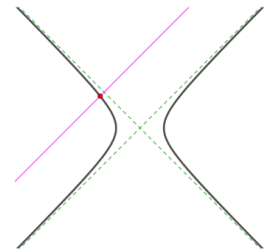
reta tangente  
( $\Delta = 0$ )



não intercepta  
( $\Delta < 0$ )



assíntota

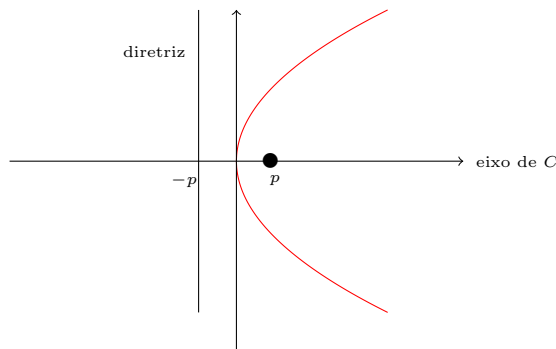


paralela a uma assíntota

### V.29.3 Parábola

- $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$C : g(x, y) = y^2 - 4px = 0.$$

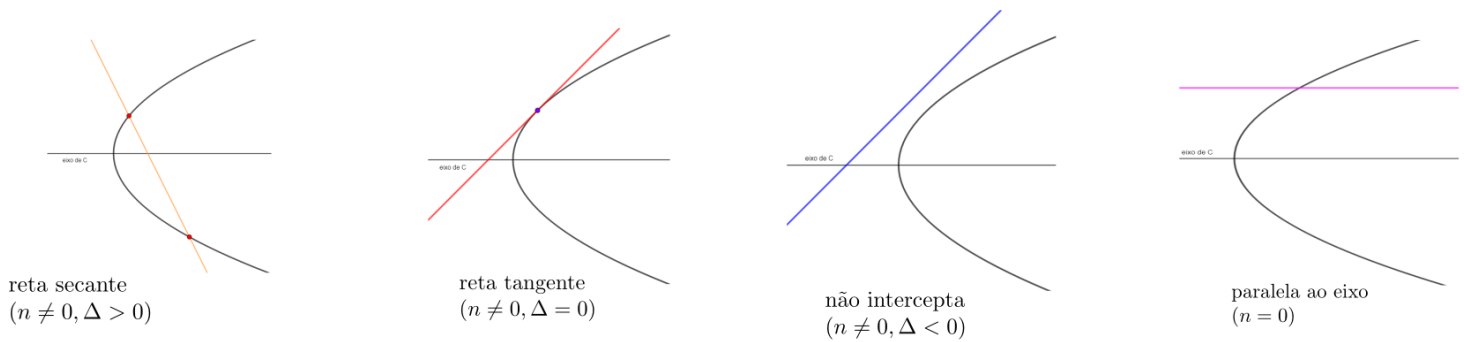


$$r : X = (h + \lambda m, k + \lambda n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{r} = (m, n) \neq \vec{0}$$

- $X \in r \cap C \iff (k + \lambda n)^2 = 4p(h + \lambda m) \iff$   
 $(\diamond) \underbrace{n^2}_{\neq 0?} \lambda^2 + 2(nk - 2pm)\lambda + (k^2 - 4ph) = 0$
- $n \neq 0$ :
  - a equação  $(\diamond)$  é de 2º grau e portanto:
    - $\Delta > 0$ :  $r$  é reta secante a  $C$
    - $\Delta = 0$ :  $r$  é reta tangente a  $C$  em  $T = (h + \lambda_0 m, k + \lambda_0 n)$ , onde  $\lambda_0$  é a raiz de  $(\diamond)$
    - $\Delta < 0$ :  $r$  não intercepta  $C$
- $n = 0$ :
  - $\vec{r} = (m, 0)$ ,  $m \neq 0$  e  $p \neq 0$
  - $(\diamond)$  é de 1º grau e tem uma única solução:  $\lambda_1 = \frac{k^2 - 4ph}{4pm}$
  - $r$  é paralela ao eixo de simetria de  $C^a$  e intercepta  $C$  no ponto  $P_1 = (h + \lambda_1 m, k + \lambda_1 n)$ .

<sup>a</sup>Ver Definição V.23.1 e (V.23.2)

Os quatro possíveis casos da posição relativa da reta e parábola são:



Se  $r$  é uma **reta tangente** a  $C$  no ponto  $T$  e  $\vec{r} = (m, n)$  é um vetor diretor de  $r$ , então a **reta normal** a  $C$  no ponto  $T$  é a reta que passa por  $T$  e tem  $\vec{n} = (n, -m)$  como um vetor diretor.

**Exemplo V.29.3.** Ver Exercício 86 em [Slide de Exercícios](#).

## Objetivo

Definir o lugar geométrico chamado **quádricas**:

- superfícies descritas por uma equação de segundo grau em três variáveis.
- listar o elenco de quádricas

Estudar os lugares geométricos de  $E^3$  chamados: **esfera, elipsóide, hiperbolóide, cone e parabolóide**:

- aprender suas equações;
- estudar suas propriedades geométricas.

(fixado um sistema de coordenadas)

---

FIXE EM  $E^3$  UM SISTEMA DE COORDENADAS ORTOGONAL  $\Sigma = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ .

---

## V.30 Quádricas

Uma **quádrica** é o lugar geométrico de pontos de  $E^3$  descrito, em relação a um sistema de coordenadas ortogonal, por uma equação de segundo grau em  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

Um estudo análogo ao que foi feito em cônicas pode ser feito para quádricas, e uma lista completa de todas as quádricas são:

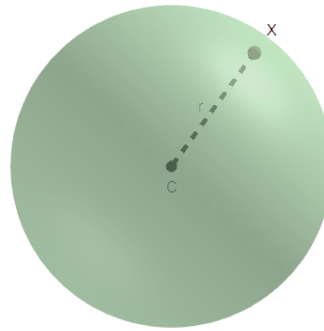
1. superfície esférica;
2. elipsóide;
3. hiperbolóide;
4. parabolóide;
5. quádrica cilíndrica;
6. quádrica cônica;
7. conjunto vazio;
8. conjunto de um único ponto;
9. reta;
10. plano;
11. reunião de dois planos paralelos;
12. reunião de dois planos transversais.

Destacamos os casos particulares: **esfera, elipsóide, hiperbolóide e parabolóide**.

## V.31 Esfera

**Definição V.31.1.** Sejam  $C$  um ponto de  $E^3$  e  $\rho$  um número real positivo. A **esfera** (ou **superfície esférica**)  $S$  de centro  $C$  e raio  $\rho$  é o lugar geométrico dos pontos  $X$  de  $E^3$  tais que

$$d(X, C) = \rho.$$



- $C = (x_0, y_0, z_0)$

- $X = (x, y, z)$

- 

$$X \in S \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2$$

A equação acima é chamada **equação reduzida** da esfera de centro  $C$  e raio  $\rho$ .

- $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \rho^2 \iff$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \quad (\text{V.31.1})$$

onde

$$a = -2x_0; \quad b = -2y_0; \quad c = 2z_0; \quad d = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \rho^2$$

A equação acima é chamada **equação geral** da esfera de centro  $C$  e raio  $\rho$ .

**Nota.**

- Nem toda equação da forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad (\text{V.31.2})$$

é equação de uma esfera. Por exemplo,

$$\emptyset : x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

- A Eq. (V.31.2) é equivalente a:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}.$$

**Proposição V.31.2.** *A equação (V.31.2) descreve:*

- a esfera de centro  $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$  e raio  $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$ , se  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$ ;
- o ponto  $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ , se  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$ ;
- o conjunto vazio  $\emptyset$ , se  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$ .

**Exemplo V.31.3.** Ver Exercícios 87 a 89 em [Slide de Exercícios](#).

**Proposição V.31.4.** *Existe uma única esfera que contém quatro pontos distintos  $P, Q, R$  e  $S$  se, somente se, esses pontos não são coplanares.*

### V.31.1 Posição relativa de reta/plano e esfera

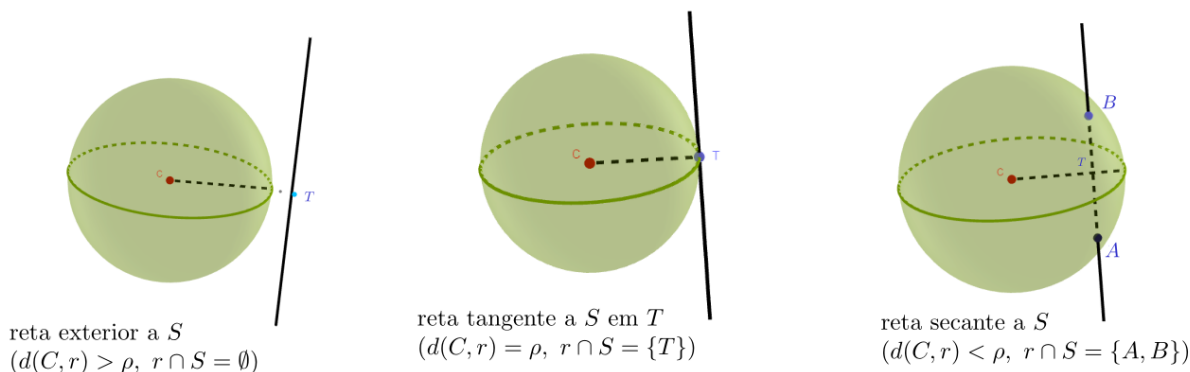
**Definição V.31.5.** Seja  $S$  uma superfície esférica de centro  $C$  e raio  $\rho$ . Dizemos que um ponto  $P$  é

- **interior a  $S$**  se  $d(P, C) < \rho$ ;
- **exterior a  $S$**  se  $d(P, C) > \rho$ .

Um **conjunto de pontos** é **interior** (respec., **exterior**) a  $S$  quando todos seus pontos são interiores (respec., exteriores) a  $S$ .

**Exemplo V.31.6.** Ver Exercício 90 em [Slide de Exercícios](#).

#### V.31.1.1 Posição relativa e intersecção de reta e esfera



- $S$  esfera de centro  $C$  e raio  $\rho$
- $r$  uma reta
- a posição relativa de  $r$  e  $S$  é determinada pela comparação entre  $\rho$  e a distância de  $r$  a  $C$ <sup>54</sup>:

$$d(r, C) := \min\{d(P, C); P \in r\} = d(T, C), \quad (\text{V.31.3})$$

onde  $T$  é a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $r$ .

<sup>54</sup>Ver Definição V.18.2



- fixe  $\Sigma = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$O = C \quad \text{e} \quad \vec{r} \parallel \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

- $S : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
- $T = (x_0, y_0, 0)$  a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $r$
- $r : X = T + \lambda(0, 0, 1) = (x_0, y_0, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$

QUANDO  $T$  É EXTERIOR, PERTENCE OU É INTERIOR A  $S$ ?

$$\begin{aligned} X \in r \cap S &\iff X = (x_0, y_0, \lambda) \text{ e } X \in S \\ &\iff x_0^2 + y_0^2 + \lambda^2 = \rho^2 \\ &\iff \lambda^2 = \rho^2 - (x_0^2 + y_0^2) \end{aligned}$$

$$\iff \boxed{\lambda^2 = \rho^2 - (d(T, C))^2} \quad (\text{V.31.4})$$

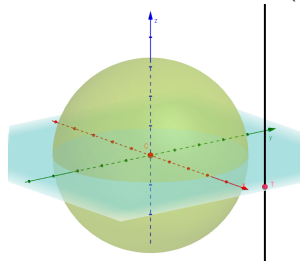
- $d(T, C) > \rho$ :

- $r \cap S = \emptyset$

- 

$$d(P, C) \geq d(r, C) = d(T, C) > \rho; \quad \forall P \in r$$

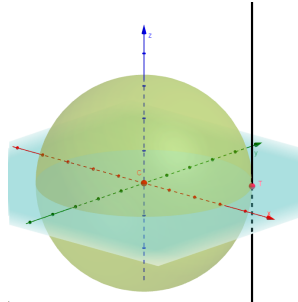
$\therefore$  todo ponto de  $r$  é exterior a  $S$  ( $r \cap S = \emptyset$ )



- $d(T, C) = \rho$ :

- pela Eq. (V.31.4) (que tem única solução,  $\lambda = 0$ ):  
existe um único ponto em  $r \cap S$ :  $T = (x_0, y_0, 0)$ ;
- pela Eq (V.31.3):  
 $d(P, C) > d(T, C) = \rho$ , para todo  $P \in r, T \neq C$ .

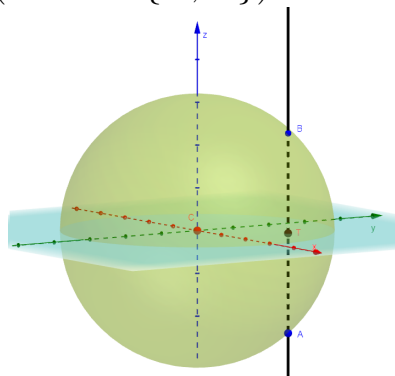
$\therefore$  todo ponto de  $r$ , exceto  $T$ , é exterior a  $S$  ( $r \cap S = \{T\}$ )



- $d(T, C) < \rho$ :

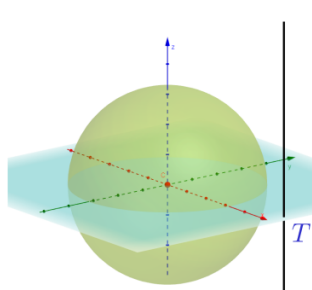
- pela Eq. (V.31.4) (que tem duas soluções  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ):
  - \* existem 2 pontos em  $r \cap S$ :  $A = (x_0, y_0, \lambda_2)$  e  $B = (x_0, y_0, \lambda_1)$ ;
  - \*  $\lambda_1 = -\lambda_2$  e  $T$  é o ponto médio de  $\overline{AB}$ ;
  - \*  $X = (x_0, y_0, \lambda)$ ,  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , pontos de  $r$  entre  $A$  e  $B$ : são pontos interiores a  $S$ ;
  - \*  $X = (x_0, y_0, \lambda)$ ,  $\lambda < \lambda_1$  ou  $\lambda > \lambda_2$ , demais pontos de  $r$ : são pontos exteriores a  $S$

$\therefore$  os pontos de  $r$  entre  $A$  e  $B$  são interiores e os demais são exteriores a  $S$  ( $r \cap S = \{A, B\}$ )

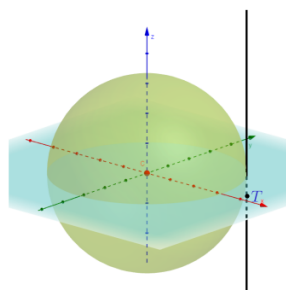


**Proposição V.31.7.** *Sejam  $r$  uma reta e  $S$  uma superfície esférica de centro  $C$  e raio  $\rho$ .*

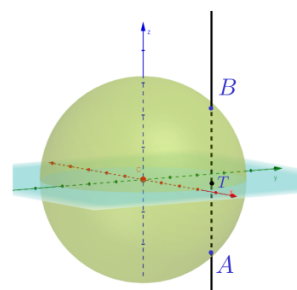
1. *Se  $d(r, C) > \rho$ , então  $r \cap S = \emptyset$  e  $r$  é exterior a  $S$ ;*
2. *Se  $d(r, C) = \rho$ , então  $r \cap S = \{T\}$ , onde  $T$  é a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $r$  e os demais pontos de  $r$  são exteriores a  $S$ . Neste caso,  $r$  é **reta tangente** a  $S$  em  $T$ ;*
3. *Se  $d(r, C) < \rho$ , então  $r \cap S = \{A, B\}$ , onde  $A$  e  $B$  são distintos e o ponto médio de  $\overline{AB}$  é a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $r$ . Todos os pontos do segmento  $\overline{AB}$  são interiores a  $S$  e todos os demais pontos de  $r$  exteriores a  $S$ . Neste caso,  $r$  é **reta secante** a  $S$ .*



reta exterior a  $S$   
( $d(C, r) > \rho$ ,  $r \cap S = \emptyset$ )

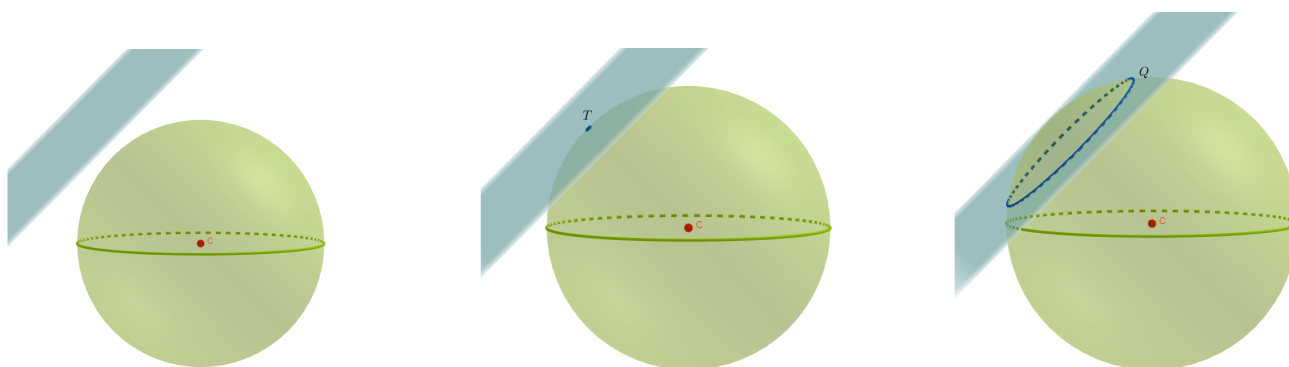


reta tangente a  $S$  em  $T$   
( $d(C, r) = \rho$ ,  $r \cap S = \{T\}$ )



reta secante a  $S$   
( $d(C, r) < \rho$ ,  $r \cap S = \{A, B\}$ )

### V.31.1.2 Posição relativa e intersecção de plano e esfera



- $S$  esfera de centro  $C$  e raio  $\rho$
- $\pi$  um plano

- a posição relativa de  $\pi$  e  $S$  é determinada pela comparação entre  $\rho$  e a distância de  $\pi$  a  $C$ <sup>55</sup>:

$$d(\pi, C) := \min\{d(P, C); P \in \pi\} = d(T, C), \quad (\text{V.31.5})$$

onde  $T$  é a projeção ortogonal de  $C$  a  $\pi$ .

- fixe  $\Sigma = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$  sistema de coordenadas ortogonal tal que

$$O = C \quad \text{e} \quad \vec{\eta}_\pi \parallel \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

- $S : x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
- $\pi : z = m$
- $T = (0, 0, m)$  é a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $r$
- $d(\pi, C) = |m|$
- 

$$\begin{aligned} X \in \pi \cap S &\iff X = (x_0, y_0, m) \text{ e } X \in S \\ &\iff \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + m^2 = \rho^2 \\ z = m \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = \rho^2 - d(\pi, C)^2 \\ z = m \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{V.31.6})$$

---

QUANDO  $T$  É EXTERIOR, PERTENCE OU É INTERIOR A  $S$ ?

---

- $d(\pi, C) > \rho$ :
  - $\pi \cap S = \emptyset$

---

<sup>55</sup>Ver Definição V.18.4

$$\blacksquare d(\pi, C) > \rho \iff d(X, C) \geq d(\pi, C) > \rho; \forall X \in \pi$$

$\therefore$  todo ponto de  $\pi$  é exterior a  $S$  ( $\pi \cap S = \emptyset$ )

•  $d(\pi, C) = \rho$ :

■ pela Eq. (V.31.6) (que tem única solução):

\* existe um único ponto em  $\pi \cap S$ :  $T = (0, 0, m)$ ;

\*  $T$  é a projeção ortogonal de  $C$  em  $\pi$

■ pela Eq (V.31.3):

$d(P, C) > d(T, C) = \rho$ , para todo  $P \in \pi, T \neq C$ .

$\therefore$  todo ponto de  $\pi$ , exceto  $T$ , é exterior a  $S$  ( $\pi \cap S = \{T\}$ )

•  $d(\pi, C) < \rho$ :

■ pela Eq. (V.31.6) (que tem única solução):

\* existem infinitos pontos em  $\pi \cap S$ :  $Q = (x, y, m)$ ;  
 $x^2 + y^2 = \rho^2 - d(\pi, C)^2$ ;

\* o centro de  $Q$  é a projeção ortogonal  $T$  de  $C$  em  $\pi$ ;

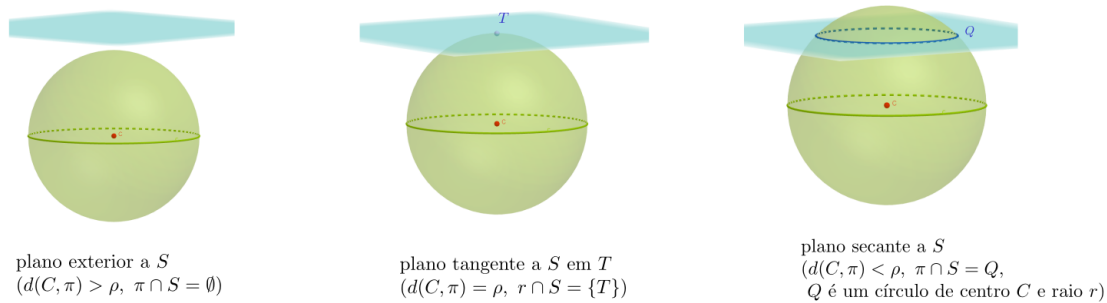
\* os pontos no interior do círculo  $Q$  são interiores a  $S$ ;

\* os pontos exteriores ao círculo  $Q$  são exteriores a  $S$ .

$\therefore$  os pontos de  $\pi$  interiores ao círculo  $Q$  são interiores a  $S$  e os demais são exteriores a  $S$  ( $\pi \cap S = Q$ )

**Proposição V.31.8.** *Sejam  $\pi$  um plano e  $S$  uma superfície esférica de centro  $C$  e raio  $\rho$ .*

1. *Se  $d(\pi, C) > \rho$ , então  $\pi \cap S = \emptyset$  e  $\pi$  é exterior a  $S$ ;*
2. *Se  $d(\pi, C) = \rho$ , então  $\pi \cap S = \{T\}$ , onde  $T$  é a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $\pi$  e os demais pontos de  $\pi$  são exteriores a  $S$ . Neste caso,  $\pi$  é **plano tangente** a  $S$  em  $T$  e  $\overline{CT}$  é um vetor normal a  $\pi$ ;*
3. *Se  $d(\pi, C) < \rho$ , então  $\pi \cap S$  é um círculo  $Q$  de raio  $r = \sqrt{\rho^2 - d(\pi, C)^2}$  cujo centro é a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $\pi$ . Todos os pontos interiores a  $Q$  são interiores a  $S$  e todos os demais pontos de  $\pi$  exteriores a  $Q$  são exteriores a  $S$ . Neste caso,  $\pi$  é **plano secante** a  $S$ .*



**Exemplo V.31.9.** Ver Exercício 91 em [Slide de Exercícios](#).

## V.32 Elipsóide

Uma quádrlica  $\Omega$  é um **elipsóide** se existem números reais positivos  $a, b, c$ , pelo menos dois deles distintos, e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual  $\Omega$  pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

chamada **equação reduzida** de  $\Omega$ .

### Nota.

1. Se  $a = b = c > 0$ , então  $\Omega$  é uma esfera de centro  $(0, 0, 0)$  e raio  $a$ .
2. A intersecção com os eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  ocorrem respectivamente em  $(\pm a, 0, 0)$ ,  $(0, \pm b, 0)$  e  $(0, 0, \pm c)$ .
3.  $\Omega$  é **totalmente simétrico em relação ao sistema de coordenadas**: é simétrico em relação aos planos coordenados, eixos coordenados e à origem:  
 $P = (x, y, z) \in \Omega \iff P_1 = (-x, y, z), P_2 = (-x, -y, z), P_3 = (-x, -y, -z) \in \Omega.$

COMO É UM ELIPSÓIDE?

V.32.0.1 Interseção de elipsóide e planos paralelos aos planos coordenados

As equações dos planos coordenados são:  $z = 0$ ,  $x = 0$  e  $y = 0$ .

- $\pi : z = k$ ,  $\pi_1 : x = m$ ,  $\pi : y = n$

- 

$$X = (x, y, z) \in \pi \cap \Omega \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$$

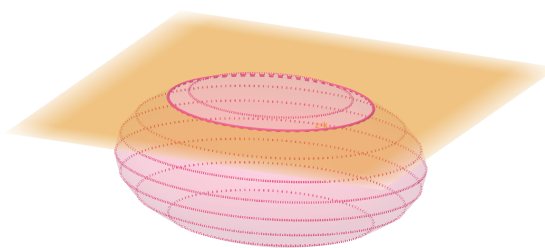
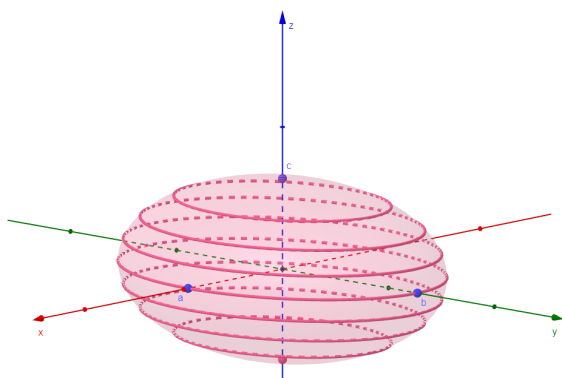
- $p := 1 - \frac{k^2}{c^2}$

- $\pi \cap \Omega: \emptyset$ , se  $p < 0$ , isto é,  $|k| > c$

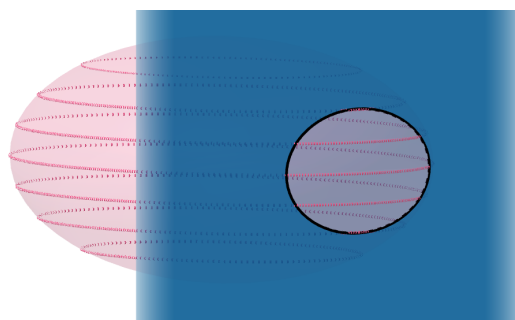
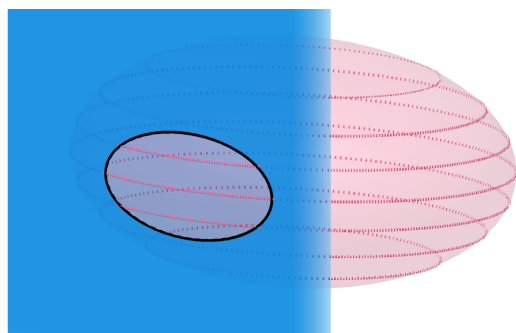
- $\pi \cap \Omega: \text{o ponto } T = (0, 0, k)$ , se  $p = 0$ , isto é,  $|k| = c$

- $\pi \cap \Omega: \frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{pb^2} = 1$  (elipse<sup>56</sup>), se  $p > 0$ , isto é,  $|k| < c$

- vértices da elipse no plano  $z = k$ :  $(\pm a \sqrt{p}, 0, k)$  e  $(0, \pm b \sqrt{p}, k)$



(Geogebra-elipsóide)



<sup>56</sup>Se  $a = b$ , uma circunferência, no plano  $z = k$ , de centro  $(0, 0, k)$  e raio  $a \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2}}$ .

## V.33 Hiperbolóide de uma folha

Uma quádrlica  $\Omega$  é um **hiperbolóide de uma folha** se existem números reais positivos  $a, b, c$  e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual  $\Omega$  pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

chamada **equação reduzida** de  $\Omega$ .

### Nota.

1.  $\Omega$  é totalmente simétrico em relação ao sistema de coordenadas.
2. A intersecção com os eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  ocorrem respectivamente em  $(\pm a, 0, 0)$  e  $(0, \pm b, 0)$  e  $\Omega$  não intercepta o eixo  $Oz$  (chamado **eixo distinguido**).

### COMO É UM HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA?

#### V.33.0.1 Intersecção de hiperbolóide de uma folha e planos paralelos aos coordenados

- $\pi : z = k,$

- $X = (x, y, z) \in \pi \cap \Omega \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}$

- $p := 1 + \frac{k^2}{c^2} > 0$

- $\pi \cap \Omega: \frac{x^2}{pa^2} + \frac{y^2}{pb^2} = 1$  (elipse<sup>57</sup>)

<sup>57</sup>Se  $a = b$ , uma circunferência, no plano  $z = k$ , de centro  $(0, 0, k)$  e raio  $a\sqrt{1 + \frac{k^2}{c^2}}$ .



- $\pi_1 : x = m,$

- $\pi : y = n$

- $X = (x, y, z) \in \pi \cap \Omega \iff \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{n^2}{b^2} \\ y = n \end{cases}$

- $p := 1 - \frac{n^2}{b^2}$

- $\pi \cap \Omega: \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0,$  se  $p = 0,$  isto é,  $|n| = b$

- duas retas concorrentes no plano  $y = n$  de equações

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \\ y = n \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = n \end{cases}$$

- $\pi \cap \Omega: \frac{x^2}{pa^2} - \frac{z^2}{pc^2} = 1,$  se  $p \neq 0:$

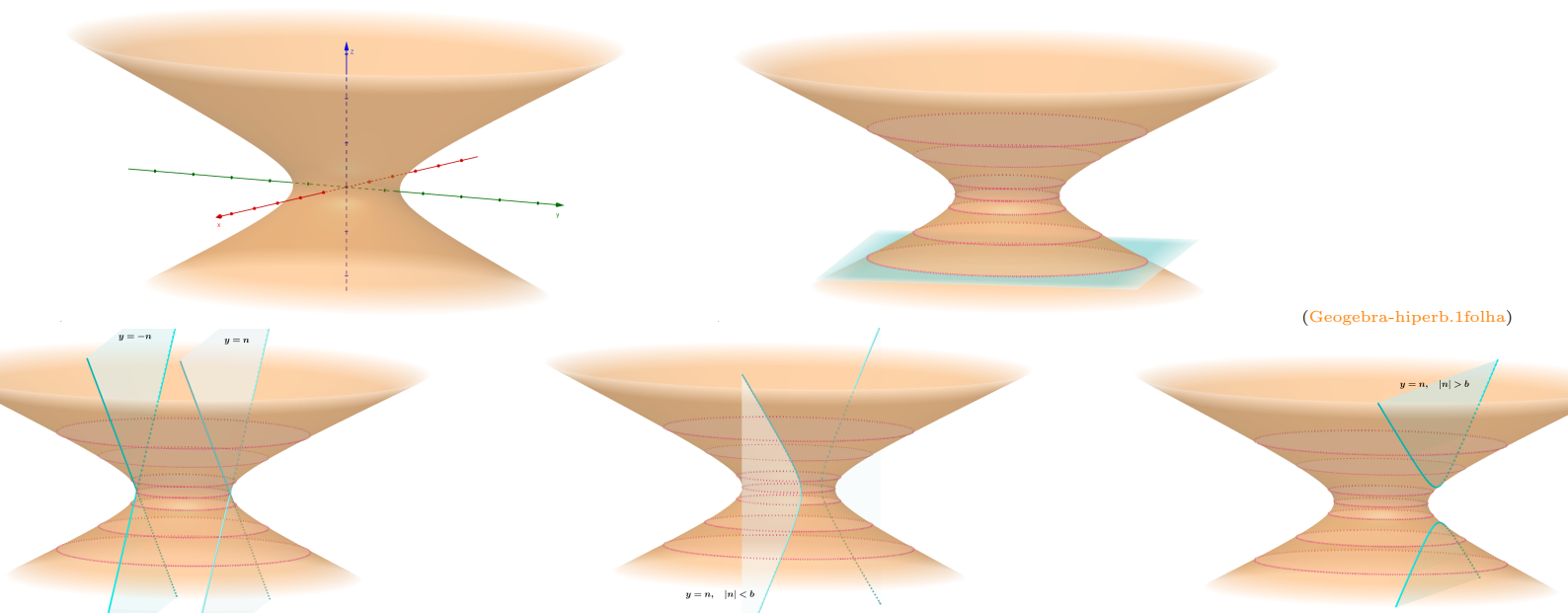
- hipérbole no plano  $y = n$  de centro  $(0, n, 0)$

- \*  $p > 0$  (i.e..  $|n| < b$ ): os focos da hipérbole estão na reta

$$r : X = (0, n, 0) + \lambda(1, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

- \*  $p < 0$  (i.e..  $|n| > b$ ): os focos da hipérbole estão na reta

$$r : X = (0, n, 0) + \lambda(0, 0, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Peron

SMA300 - Geometria Analítica

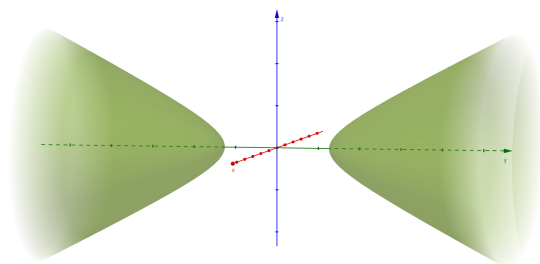
Geo. Analítica

## V.34 Hiperbolóide de duas folhas

Uma quádrlica  $\Omega$  é um **hiperbolóide de duas folhas** se existem números reais positivos  $a, b, c$  e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual  $\Omega$  pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

chamada **equação reduzida** de  $\Omega$ .



**Tarefa:** estude a intersecção de  $\Omega$  com os planos paralelos aos planos coordenados ([Geogebra-hiperbolóide 2 folhas](#)).

## V.35 Cone

Uma quádrlica  $\Omega$  é um **cone** se existem números reais positivos  $a, b, c$  e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual  $\Omega$  pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

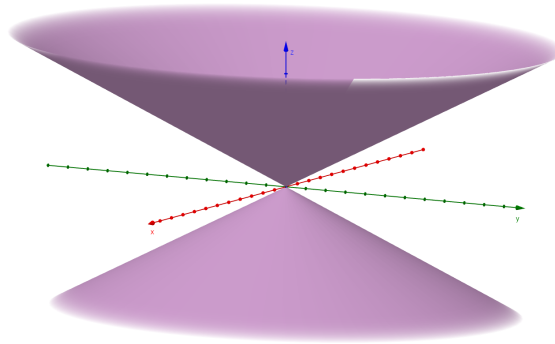
chamada **equação reduzida** de  $\Omega$ . Se  $a \neq b$ ,  $\Omega$  é um **cone elíptico** e se  $a = b$ ,  $\Omega$  é um **cone circular** (ou **cone de rotação**).

**Nota.** A equação reduzida do cone é equivalente a

$$z^2 = Ax^2 + By^2, \quad \text{para algum } A, B > 0$$

ou

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad \text{para algum } a, b > 0$$



**Tarefa:** estude a intersecção de  $\Omega$  com os planos paralelos aos planos coordenados ([Geogebra-cone/parabolóide](#)).

Wikipedia: hiperbolóides e cone

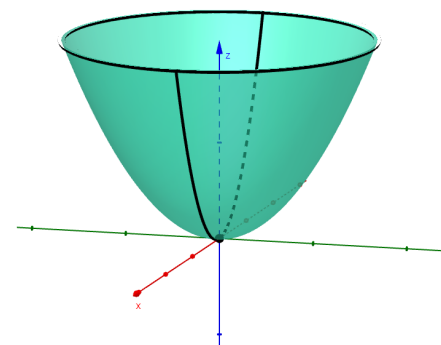
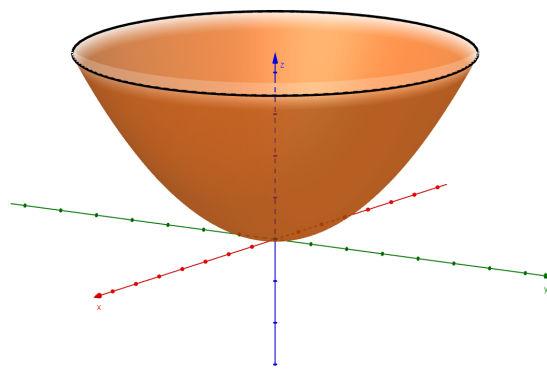
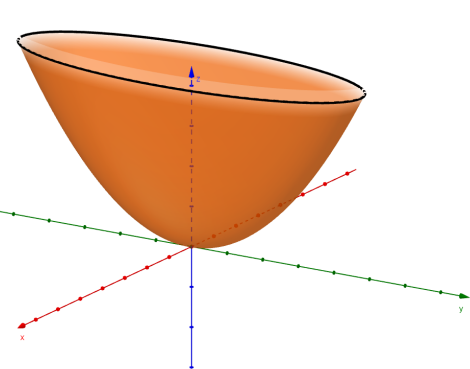
Wikipedia: cilindro, hiperbolóide e cone

## V.36 Parabolóide elíptico e circular

Uma quádrlica  $\Omega$  é um **parabolóide** se existem números reais positivos  $a, b$  e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual  $\Omega$  pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

chamada **equação reduzida** de  $\Omega$ . Se  $a \neq b$ ,  $\Omega$  é um **parabolóide elíptico** e se  $a = b$ ,  $\Omega$  é um **parabolóide circular** (ou **parabolóide de rotação**).



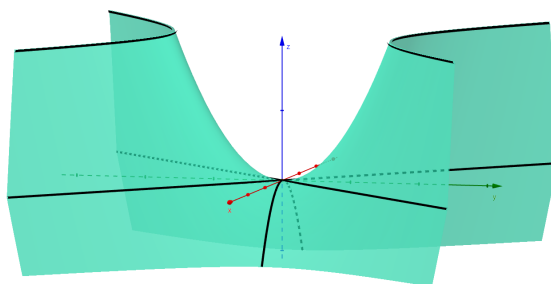
**Tarefa:** estude a intersecção de  $\Omega$  com os planos paralelos aos planos coordenados ([Geogebra -parabolóide/cone](#)).

### V.37 Parabolóide hiperbólico (sela)

Uma quádrlica  $\Omega$  é um **parabolóide hiperbólico (sela)** se existem números reais positivos  $a, b$  e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual  $\Omega$  pode ser descrita pela equação:

$$\Omega : z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

chamada **equação reduzida** de  $\Omega$ .



**Tarefa:** estude a intersecção de  $\Omega$  com os planos paralelos aos planos coordenados (**Geogebra -sela**).

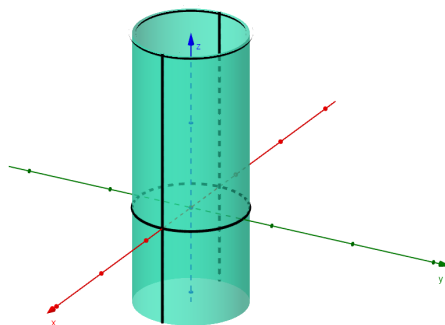
### V.38 Quádricas Cilíndras

Se existem números reais positivos  $a, b$  e um sistema de coordenadas ortogonal em relação ao qual uma quádrlica  $\Omega$  pode ser descrita:

- Pela equação reduzida:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

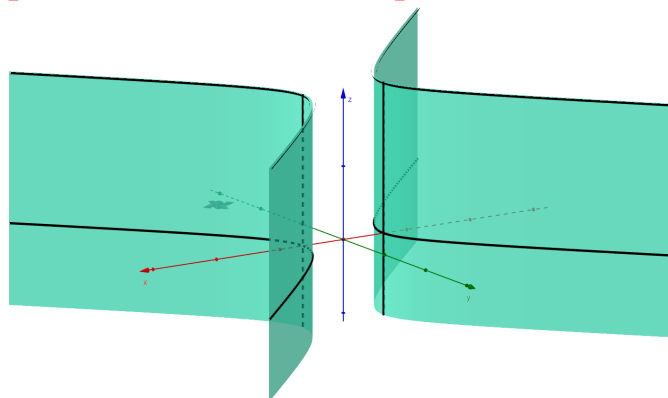
ela é chamada de **quádrlica cilíndrica elíptica** ( $a \neq b$ ) ou **quádrlica cilíndrica circular/de rotação** ( $a = b$ ) (**cilindro**).



- Pela equação reduzida:

$$\Omega : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

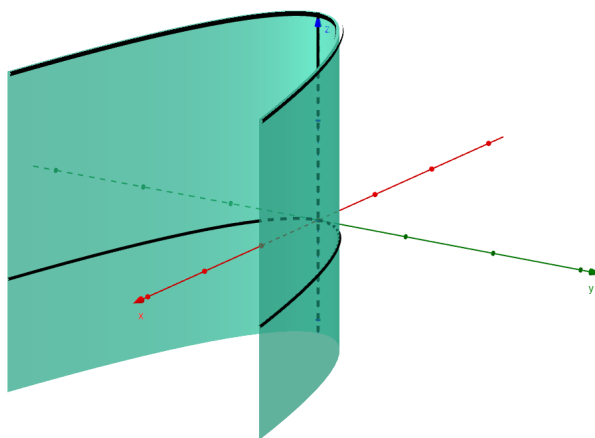
ela é chamada de **quádrlica cilíndrica hiperbólica**.



- Pela equação reduzida:

$$\Omega : y^2 = ax,$$

ela é chamada de **quádrlica cilíndrica parabólica**.



(Geogebra-cilindro parabólico)

---

**Exemplo V.38.1.** Ver Exercícios 92 e 93 em [Slide de Exercícios](#).

---

### V.39 Tabela de equações reduzidas das principais quádricas

Elipsóide ou esfera	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hiperbolóide de uma folha	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hiperbolóide de duas folhas	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Parabolóide (elíptico ou circular)	$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Parabolóide hiperbólico (sela)	$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Quádrlica cônica (cone elíptico ou circular/de rotação)	$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Quádrlica cilíndrica <sup>58</sup> (cilindro elíptico ou circular/de rotação)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Quádrlica cilíndrica hiperbólica <sup>5</sup> (cilindro hiperbólico)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Quádrlica cilíndrica parabólica <sup>5</sup> (cilindro parabólico)	$y^2 = cx$

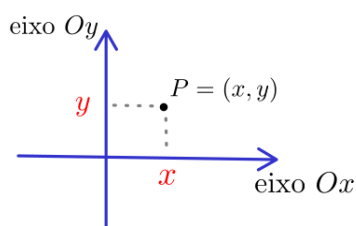
<sup>5</sup>Superfícies no espaço!! Não confunda com as cônicas (elipse, hipérbole, parábola) que possuem equações equivalentes mas são curvas no plano!!

## Objetivo

Definir as **coordenadas polares** de um ponto no plano, as **coordenadas cilíndricas** e as **coordenadas esféricas** de um ponto do espaço.

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal e dado um ponto, determinar as relações entre as coordenadas polares, cilíndricas e esféricas e as coordenadas do s.c.o..

- $\Sigma = (O, B = (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal
  - $\Sigma$  é chamado **sistema de coordenadas cartesiano**
  - $P = (x, y)_{\Sigma} \in E^2 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y)_B$
  - $x$  e  $y$  são as **coordenadas cartesianas** de  $P$



Podemos localizar a posição de um ponto no plano através de outras coordenadas.

## V.40 Coordenadas polares (no plano)

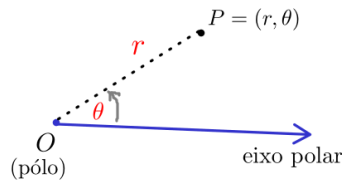
veja aqui: [Math Insight](#)

FIXE UM PONTO  $\mathcal{O}$  E UMA SEMI-RETA ORIENTADA  $r$  NO PLANO.

- $\mathcal{O}$  é chamado de **pólo**
- $r$  é chamada de **eixo polar**

As **coordenadas polares** de  $P \in E^2$  são  $(r, \theta)$  onde:

- $r := d(\mathcal{O}, P) = \|\overrightarrow{\mathcal{O}P}\|$
- $\theta$  é o ângulo entre o eixo polar e a semi-reta  $\mathcal{O}P$ , medido no sentido anti-horário;



- $\theta$  é chamado de **argumento** e  $r$  de **raio**

**Nota:**

1. Em geral considera-se a restrição  $\theta \in [0, 2\pi)$  para que cada ponto do plano, exceto a origem, tenha uma única representação em coordenadas polares pois um mesmo ponto pode ser representado pelas coordenadas:

$$(r, \theta) \quad \text{e} \quad (r, \theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

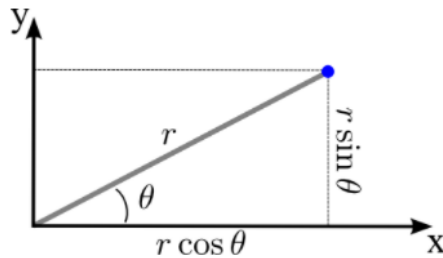
2.  $\mathcal{O} = (0, 0) = (0, \theta)$ , para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$ .



### V.40.1 Relação entre coordenadas cartesianas e polares

Escolhendo:

- $\mathcal{O} = O$
- eixo polar =  $Ox$ ;
- $P = (x, y)_\Sigma = (r, \theta) \in E^2$



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Cálculo de  $r$  e  $\theta$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{para } x > 0, y > 0 \\ \arctg(y/x) + 2\pi & \text{para } x > 0, y < 0 \\ \arctg(y/x) + \pi & \text{para } x < 0 \\ \pi/2 & \text{para } x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{para } x = 0, y < 0 \\ q.q. & \text{para } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

NOTE QUE  $r \geq 0$  E CONSIDERAREMOS  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

**Exemplo V.40.1.** Ver Exercícios 94 e 95 em [Slide de Exercícios](#).

## V.41 Coordenadas cilíndricas (no espaço)

veja aqui: [Math Insight](#)

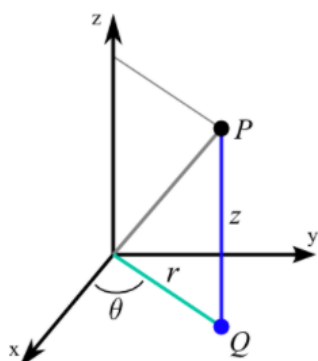
- $\Sigma = (O, B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$  sistema de coordenadas ortogonal
  - $\Sigma$  é chamado **sistema de coordenadas cartesiano** de  $E^3$
  - $P = (x, y, z)_\Sigma \in E^3 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_B$
  - $x, y$  e  $z$  são as **coordenadas cartesianas** de  $P$

As **coordenadas cilíndricas** de  $P \in E^3$  são  $(r, \theta, \tau)$  onde

- $(r, \theta)$  são as coordenadas polares da projeção ortogonal de  $P$  no plano polar;
- $\tau \in \mathbb{R}$

### V.41.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as cilíndricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (r, \theta, \tau) \in E^3$



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = \tau \end{cases}$$

$$r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \tau \in \mathbb{R}.$$

Cálculo de  $r, \theta$  e  $\tau$ :

$$\tau = z, \quad r \text{ e } \theta \text{ como antes.}$$

**Exemplo V.41.1.** Ver Exercício 96 em [Slide de Exercícios](#).

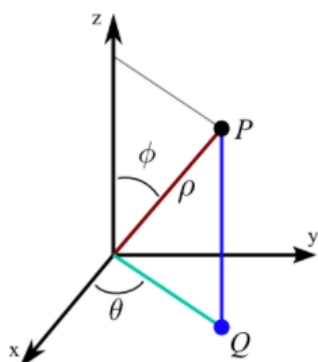
## V.42 Coordenadas esféricas (polares no espaço)

### veja: Math Insight

- As **coordenadas esféricas** de  $P \in E^3$  são  $(\rho, \theta, \varphi)$  onde
  - $\theta$  é o argumento da projeção ortogonal de  $P$  no plano polar;
  - $\rho = d(O, P)$ ;
  - $\varphi$  é o ângulo entre o eixo  $z$  e a reta  $OP$ .

### V.42.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as esféricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (\rho, \theta, \varphi) \in E^3$



$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

---


$$\rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi].$$


---

Cálculo de  $\rho$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta \text{ como antes,}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$


---

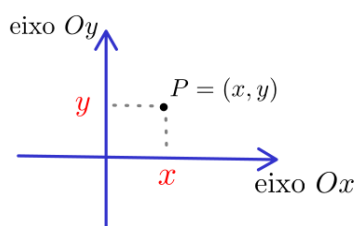
**Exemplo V.42.1.** Ver Exercício 97 em [Slide de Exercícios](#).

## Objetivo

Definir as **coordenadas polares** de um ponto no plano, as **coordenadas cilíndricas** e as **coordenadas esféricas** de um ponto do espaço.

Fixado um sistema de coordenadas ortogonal e dado um ponto, determinar as relações entre as coordenadas polares, cilíndricas e esféricas e as coordenadas do s.c.o..

- $\Sigma = (O, B = (\vec{i}, \vec{j}))$  sistema de coordenadas ortogonal
  - $\Sigma$  é chamado **sistema de coordenadas cartesiano**
  - $P = (x, y)_{\Sigma} \in E^2 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y)_B$
  - $x$  e  $y$  são as **coordenadas cartesianas** de  $P$



Podemos localizar a posição de um ponto no plano através de outras coordenadas.

## V.43 Coordenadas polares (no plano)

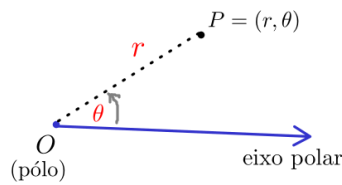
veja aqui: [Math Insight](#)

FIXE UM PONTO  $\mathcal{O}$  E UMA SEMI-RETA ORIENTADA  $r$  NO PLANO.

- $\mathcal{O}$  é chamado de **pólo**
- $r$  é chamada de **eixo polar**

As **coordenadas polares** de  $P \in E^2$  são  $(r, \theta)$  onde:

- $r := d(\mathcal{O}, P) = \|\overrightarrow{\mathcal{O}P}\|$
- $\theta$  é o ângulo entre o eixo polar e a semi-reta  $\mathcal{O}P$ , medido no sentido anti-horário;



- $\theta$  é chamado de **argumento** e  $r$  de **raio**

**Nota:**

1. Em geral considera-se a restrição  $\theta \in [0, 2\pi)$  para que cada ponto do plano, exceto a origem, tenha uma única representação em coordenadas polares pois um mesmo ponto pode ser representado pelas coordenadas:

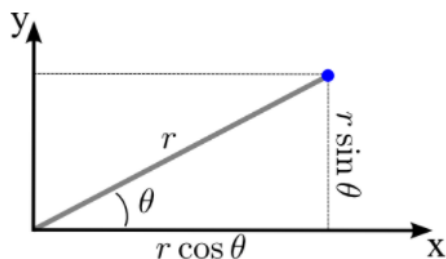
$$(r, \theta) \quad \text{e} \quad (r, \theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.  $\mathcal{O} = (0, 0) = (0, \theta)$ , para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$ .

### V.43.1 Relação entre coordenadas cartesianas e polares

Escolhendo:

- $\mathcal{O} = O$
- eixo polar =  $Ox$ ;
- $P = (x, y)_\Sigma = (r, \theta) \in E^2$



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Cálculo de  $r$  e  $\theta$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{para } x > 0, y > 0 \\ \arctg(y/x) + 2\pi & \text{para } x > 0, y < 0 \\ \arctg(y/x) + \pi & \text{para } x < 0 \\ \pi/2 & \text{para } x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{para } x = 0, y < 0 \\ q.q. & \text{para } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

NOTE QUE  $r \geq 0$  E CONSIDERAREMOS  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

**Exemplo V.43.1.** Ver Exercícios 94 e 95 em [Slide de Exercícios](#).

## V.44 Coordenadas cilíndricas (no espaço)

veja aqui: [Math Insight](#)

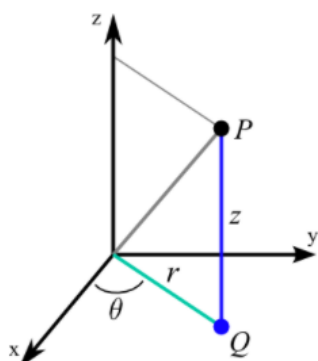
- $\Sigma = (O, B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$  sistema de coordenadas ortogonal
  - $\Sigma$  é chamado **sistema de coordenadas cartesiano** de  $E^3$
  - $P = (x, y, z)_\Sigma \in E^3 \iff \overrightarrow{OP} = (x, y, z)_B$
  - $x, y$  e  $z$  são as **coordenadas cartesianas** de  $P$

As **coordenadas cilíndricas** de  $P \in E^3$  são  $(r, \theta, \tau)$  onde

- $(r, \theta)$  são as coordenadas polares da projeção ortogonal de  $P$  no plano polar;
- $\tau \in \mathbb{R}$

### V.44.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as cilíndricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (r, \theta, \tau) \in E^3$



$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = \tau \end{cases}$$

---


$$r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \tau \in \mathbb{R}.$$


---

Cálculo de  $r, \theta$  e  $\tau$ :

$$\tau = z, \quad r \text{ e } \theta \text{ como antes.}$$


---

**Exemplo V.44.1.** Ver Exercício 96 em [Slide de Exercícios](#).

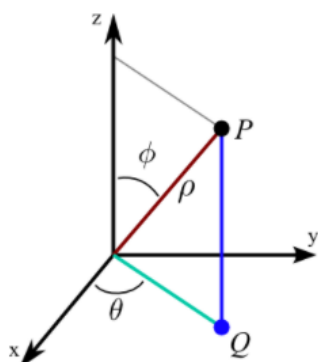
## V.45 Coordenadas esféricas (polares no espaço)

### veja: Math Insight

- As **coordenadas esféricas** de  $P \in E^3$  são  $(\rho, \theta, \varphi)$  onde
  - $\theta$  é o argumento da projeção ortogonal de  $P$  no plano polar;
  - $\rho = d(O, P)$ ;
  - $\varphi$  é o ângulo entre o eixo  $z$  e a reta  $OP$ .

### V.45.1 Relação entre as coordenadas cartesianas e as esféricas

- $P = (x, y, z)_\Sigma = (\rho, \theta, \varphi) \in E^3$



$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

---


$$\rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in [0, \pi].$$


---

Cálculo de  $\rho$ ,  $\theta$  e  $\varphi$ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta \text{ como antes,}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$


---

**Exemplo V.45.1.** Ver Exercício 97 em [Slide de Exercícios](#).



## V.46 Exercícios

Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.<sup>59</sup>

### Conteúdo

#### V.46.1 Vetores

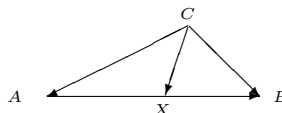
1. Verifique que  $\vec{u} + \vec{x} = \vec{u} + \vec{y} \implies \vec{x} = \vec{y}$ .
2. Se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , mostre que  $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$  possui comprimento 1.
3. Mostre que se  $\alpha \neq 0$ , então  $\alpha\vec{v} = \vec{w} \implies \vec{v} = \frac{1}{\alpha}\vec{w}$ .
4. Conhecendo os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , encontre os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  que satisfazem:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u} \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

Resp.:  $\vec{x} = \frac{1}{7}(5\vec{u} + 2\vec{v})$ ,  $\vec{y} = \frac{1}{7}(\vec{u} - \vec{v})$

5. Se  $\alpha\vec{u} = \vec{0}$ , mostre que  $\alpha = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ .
6. Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.
7. Considere o triângulo  $ABC$  como na figura e seja  $X$  como na figura. Suponha que  $\vec{AX} = m \cdot \vec{XB}$ , com  $m > 0$ . Escreva o vetor  $\vec{CX}$  em função dos vetores  $\vec{CA}$  e  $\vec{CB}$ . (**tarefa!**)

Resp.:  $\vec{CX} = \frac{1}{m+1}\vec{CA} + \frac{m}{m+1}\vec{CB}$ .



Fonte: Slides Profa. Maria do Carmo

8. Sejam  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  vetores em  $V^n$ . Suponha que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam paralelos. Mostre que existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ .

<sup>59</sup>Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para [apperon@icmc.usp.br](mailto:apperon@icmc.usp.br)

**V.46.2 Dependência Linear**

9. Sejam  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^n$ . Mostre que os vetores  $\vec{a}, \vec{b}$  e  $\vec{c}$  são LD, onde

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} \\ \vec{b} &= 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} \\ \vec{c} &= 7\vec{v} - 3\vec{w}.\end{aligned}$$

10. Se  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$  são LI, então  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} + \vec{w}$  e  $\vec{v} + \vec{w}$  são LI.

**V.46.3 Base**

11. Verifique se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dados são LD ou LI.

(a)  $\vec{u} = (0, 1, 0)_E$  e  $\vec{v} = (1, 0, 1)_E$

(b)  $\vec{u} = (1, -3, 14)_E$  e  $\vec{v} = (\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)_E$

Resp.: (a) LI (b) LD

12. Determine  $m$  e  $n$  de modo que os vetores

$$\vec{u} = (1, m, n + 1)_E, \quad \vec{v} = (m, n, 10)_E$$

sejam LD.

Resp.:  $m = 2, n = 4$

13. Verifique se  $\vec{u} = (1, -1, 2)_E$ ,  $\vec{v} = (-3, 4, 1)_E$  e  $\vec{w} = (1, 0, 9)_E$  são LI ou LD.

Resp.: são LD

14. Determine se existe  $m$  tal que os vetores

$$\vec{u} = (m, 1, 1 + m)_E, \quad \vec{v} = (1, 2, m)_E, \quad \vec{w} = (1, 1, 1)_E$$

sejam LD.

Resp.:  $\nexists m \in \mathbb{R}$  tal que os vetores sejam LD. Portanto  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  são LI e portanto base de  $V^3$  para qualquer  $m \in \mathbb{R}$ .

15. Seja  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base de  $V^3$  e considere os vetores

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

(a) Mostre que  $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  é base de  $V^3$ .

(b) Calcule as coordenadas do vetor  $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$  na base  $F$ .

Resp.: (a)  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  são LI; (b)  $\vec{u} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3})_F$

### V.46.4 Mudança de base

16. Dada uma base qualquer  $E$  de  $V^3$ , mostre que  $M_{EE} = Id$ .
17. Determine  $a, b, c$  sabendo que  $(1, 1, 2)_E = (2, 1, 0)_F$  e que

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 2 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Resp.:  $a = \frac{3}{2}, b = -1$  e  $c = -\frac{1}{2}$

18. Considere as bases  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  e  $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  onde

$$\vec{f}_1 = (-3, 1, 1)_E, \quad \vec{f}_2 = (1, -2, 1)_E, \quad \vec{f}_3 = (1, 2, 0)_E.$$

- (a) Determine as coordenadas de  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  na base  $F$ .
- (b) Escreva a matriz de mudança da base  $E$  para  $F$ .
- (c) Quais são as coordenadas do vetor  $\vec{u} = (-4, 1, -1)_F$  na base  $E$ ?

Resp.: (a)  $\vec{f}_1 = (1, 0, 0)_F, \vec{f}_2 = (0, 1, 0)_F, \vec{f}_3 = (0, 0, 1)_F$ ; (b)  $M_{EF} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

(c)  $\vec{u} = (12, -8, -3)_E$

19. Sejam  $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  uma base de  $V^3$  e  $F = (\vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u})$ .

- (a) Mostre que  $F$  é base de  $V^3$ .
- (b) Calcule as coordenadas de  $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}$  na base  $F$ .

Resp.: (a)  $\vec{v} - \vec{u}, \vec{u} - \vec{w}, \vec{u}$  são LI; (b)  $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = (2, -3, 6)_F$ .

PS: Em geral, se usarmos  $(\vec{x})_E = (M_{EF})(\vec{x})_F$  para obtermos as coordenadas de  $\vec{x}$  na base  $F$  é necessário resolver um sistema! Se usarmos  $(\vec{x})_F = (M_{EF})^{-1}(\vec{x})_E$  não precisamos resolver sistema (lembrando que  $(M_{EF})^{-1} = M_{FE}$ )!

### V.46.5 Produto escalar

20. Sejam  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base ortonormal de  $V^3$  e

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3.$$

(a) Mostre que  $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  uma base de  $V^3$ .

$F$  é ortonormal?

(b) Sejam  $\vec{u} = (1, 0, 0)_F$  e  $\vec{v} = (0, 1, 0)_F$ . Calcule  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

Resp.: (a)  $F$  não é base ortonormal; (b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

21. Seja  $E$  uma base ortonormal de  $V^3$ . Calcule  $\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})$ , quando:

(a)  $\vec{u} = (1, 0, 1)_E$  e  $\vec{v} = (-2, 10, 2)_E$

(b)  $\vec{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)_E$  e  $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3})_E$

Resp.: (a)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; (b)  $\theta = \frac{\pi}{6}$

22. Seja  $E$  uma base ortonormal de  $V^3$ . Obtenha os vetores de norma  $3\sqrt{3}$  que são ortogonais aos vetores  $\vec{u} = (2, 3, -1)_E$  e  $\vec{v} = (2, -4, 6)_E$ .

Resp.:  $\vec{x} = (-3, 3, 3)_E$  ou  $\vec{x} = (3, -3, -3)_E$

23. Sejam  $\vec{w}$  um vetor não nulo e  $T$  o conjunto dos vetores em  $V^3$  que são ortogonais a  $\vec{w}$ . prove que:

(a)  $\vec{w} \notin T$ ;

(b) Qualquer combinação linear de vetores em  $T$  pertence a  $T$ ;

(c) Se  $\vec{u}, \vec{v} \in T$  são LI, então  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é LI;

(d) Três vetores quaisquer de  $T$  são LD;

(e) Se  $\vec{u}, \vec{v} \in T$  são LI, então  $\vec{u}, \vec{v}$  geram  $T$ , isto é, todo vetor de  $T$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .  $T$  é chamado **plano ortogonal** a  $\vec{w}$ .

### V.46.6 Projecção ortogonal e ortonormalização de Gram-Schmidt

24. Seja  $E$  uma base ortonormal.

(a) Calcule a projecção ortogonal de  $\vec{v} = (1, -1, 2)_E$  sobre  $\vec{u} = (3, -1, 1)_E$ .

- (b) Decomponha  $\vec{v} = (-1, -3, 2)_E$  como soma de dois vetores  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$  de modo que  $\vec{p}$  seja paralelo a  $\vec{u} = (0, 1, 3)_E$  e  $\vec{q} \perp \vec{u}$ .

Resp.: (a)  $proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{6}{11}(3, -1, 1)_E$

(b)  $\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{3}{10}(0, 1, 3)_E$  e  $\vec{q} = (-1, -\frac{33}{10}, \frac{11}{10})_E$

25. Sejam, em relação a uma base ortonormal,

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1), \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1), \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1), \quad \vec{a} = (3, -2, -1).$$

(a) Prove que  $F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é uma base ortonormal.

(b) Calcule as coordenadas de  $\vec{a}$  na base  $F$ .

Resp.: (b)  $\vec{a} = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}})_F$

26. Descreva os vetores  $\vec{x}$  tais que  $\vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 0$ , onde  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é uma base ortonormal.

Resp.:  $\vec{x}$  é gerado pelos vetores  $\vec{i} + \vec{k}$  e  $\vec{j} + \vec{k}$  e pertence ao plano ortogonal ao vetor  $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

27. Sejam  $E$  uma base ortonormal e  $E_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base, onde

$$\vec{e}_1 = (1, 2, 2)_E, \quad \vec{e}_2 = (1, 0, 1)_E, \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 1)_E.$$

Aplique o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  a partir de  $E_1$ . (tarefa!)

Resp.:  $\vec{i} = \frac{1}{3}(1, 2, 2)_E, \vec{j} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)_E, \vec{k} = \frac{1}{3}(2, 1, -2)_E$

28. Determine se as matrizes são ortogonais e no caso afirmativo determine sua inversa.

$$(a) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (b) M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Resp.: (a)  $M$  não é ortogonal; (b)  $M$  é ortogonal,  $M^{-1} = M^t$

**V.46.7 Orientação, Produto Vetorial, Produto Misto**

29. Seja  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva.

- (a) Sejam  $\vec{u} = (1, 2, 3)_E$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 2)_E$ . Calcule  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .  
 (b) Calcule  $(2\vec{k} - \vec{i} + 5\vec{j}) \wedge (3\vec{i} - 2\vec{k} + \vec{j})$   
 (c) Encontre um vetor ortogonal a  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  e  $\vec{v} = -\vec{j} + \vec{k}$ .  
 (d) Mostre que

$$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{j} \wedge \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k}, & \vec{k} \wedge \vec{j} &= -\vec{i}, & \vec{i} \wedge \vec{k} &= -\vec{j}. \end{aligned}$$

Resp.: (a)  $(1, -5, 3)_E$ ; (b)  $(-12, 2, -16)_E$ ; (c)  $(0, -1, -1)_E$ ;

30. Sejam  $B$  uma base ortonormal positiva,

$$\vec{u} = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_B, \quad \vec{v} = (6, -2, 4)_B, \quad \vec{w} = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)_B.$$

Calcule  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  e  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ .

Resp.:  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \frac{1}{7}(-10, 22, -9)_B$  e  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = -\frac{1}{7}(20, 25, 39)_B$

Para os exercícios 31 a 33, considere  $\mathcal{B}$  uma base ortonormal positiva de  $V^3$

31. Calcule a área do paralelogramo  $ABCD$  sendo  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)_B$  e  $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)_B$ .

Resp.:  $\sqrt{27}$

32. Calcule a área do triângulo  $ABC$  sendo  $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)_B$  e  $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)_B$ .

Resp.:  $\sqrt{19}/2$

33. Sejam  $\vec{u} = (1, 1, 1)_B$  e  $\vec{v} = (0, 1, 2)_B$ . Obtenha uma base ortonormal  $E = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  tal que

- $\vec{a}$  e  $\vec{u}$  tenham a mesma direção e sentido;
- $\vec{b}$  seja combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Resp.:  $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)_B$ ,  $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 0, 2)_B$  e  $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)_B$

**V.46.8 Produto misto**

34. Sendo  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 6$ , calcule  $[2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}, -\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} - 3\vec{w}]$ .

Resp.: 12

35. Seja  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva. Determine  $x \in \mathbb{R}$  de modo que o volume do tetraedro determinado pelos vetores  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, x, 1)$  e  $\vec{w} = (0, 1, -1)$  seja 1.

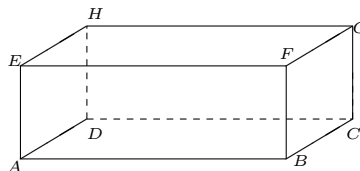
Resp.:  $x = 9$  ou  $x = -3$

**V.46.9 Retas e Planos****V.46.10 Sistema de coordenadas**

36. Considere  $ABCDEFGH$  um paralelepípedo como na figura abaixo e  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base de  $V^3$ .

(a) Se  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$  e  $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AE}$ , encontre as coordenadas do ponto  $H$  no sistema  $\Sigma = (F, \mathcal{B})$ .

(b) Se  $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$  e  $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AF}$ , encontre as coordenadas do ponto  $H$  no sistema  $\Sigma_1 = (A, \mathcal{B})$ .



Resp.: (a)  $H = (-1, 1, 0)_\Sigma$ , (b)  $H = (-2, 1, 1)_{\Sigma_1}$

**V.46.11 Retas**

37. Seja  $\Sigma = (O, E)$  um sistema de coordenadas ortogonal em  $E^3$  e considere os pontos  $A = (1, 0, 2)$  e  $B = (0, 1, 1)$ .

- (a) Encontre equações vetorial, paramétricas e simétricas para a reta  $r$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .  
 (b) O ponto  $P = (1, 2, 3)$  pertence à reta  $r$ ?  
 (c) Encontre os pontos de  $r$  que são da forma  $Q = (x, 2, z)$  e  $S = (3, y, z)$

Resp.: (a)

$$r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda(1, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{OU} \quad r : (x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(-1, 1, -1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$r : x - 1 = -y = z - 2;$$

$$r : -x = y - 1 = 1 - z;$$

(b)  $P \notin r$ ; (c)  $Q = (-1, 2, 0)$ ;  $S = (3, -2, 4)$ .

**V.46.12 Planos**

38. Seja  $\Sigma = (O, E)$  um sistema de coordenadas ortogonal em  $E^3$  e considere  $\pi$  o plano que contém os pontos  $A = (1, 0, 1)_\Sigma$ ,  $B = (2, 1, -1)_\Sigma$  e  $C = (1, -1, 0)_\Sigma$ .

- (a) Encontre equações vetorial, paramétricas e geral para o plano  $\pi$   
 (b) O ponto  $P = (1, 2, 3)$  pertence ao plano  $\pi$ ?

Resp.: (a)  $\pi : (x, y, z) = (2, 1, -1) + \lambda(1, 1, -2) + \mu(0, -1, -1), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda - \mu, & \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \quad \pi : 3x - y + z - 4 = 0; \text{ (b) } P \in \pi$$

39. Sejam um ponto  $O$  de  $E^3$  e  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base ortonormal de  $V^3$ . Considere o sistema de coordenadas  $\Sigma = (O, E)$ . Obtenha **equações gerais dos planos coordenados**.

Resp.:  $\pi_1 : z = 0$  (vetores diretores  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ : **plano  $Oxy$** );  $\pi_2 : x = 0$  (vetores



diretores  $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ : **plano  $Oyz$** );  $\pi_3 : y = 0$  (vetores diretores  $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ : **plano  $Oxz$** ),

40. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  e  $C = (0, 0, 1)$ . (**Tarefa!**)

Resp.:  $x + y - 1 = 0$

41. Considere o plano  $\pi_1$  cujas equações paramétricas são

$$\pi_1: \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + \mu, & \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Se  $\pi$  contém o ponto  $A = (1, 1, 2)$  e é paralelo ao plano  $\pi_1$ , obtenha as equações paramétricas e uma equação geral do plano  $\pi$ .

Resp.: Eq. paramétricas:  $\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu, & \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$  Eq. geral:  $\pi : x - 2y - 3z + 7 = 0$

42. Encontre vetores diretores e uma equação vetorial do plano

$$\pi: 2x + 3y - 6z + 12 = 0.$$

Resp.:  $\vec{u} = (0, 2, 1)$  e  $\vec{v} = (3, 0, 1)$  são vetores diretores. Uma equação vetorial é  $\pi : X = (0, 0, 2) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(3, 0, 1)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

43. Descreva os pontos que pertencem à interseção dos planos

$$\pi_1: 2x - y - z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2: x - y + 2z + 2 = 0.$$

Resp.: todos os pontos que pertencem à reta  $r : (3, 5, 0) + \lambda(2, 5, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### V.46.13 Posição relativa entre duas retas

Considere um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, B)$  de  $E^3$ , com  $B$  base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema  $\Sigma$ .

44. Verifique se as retas dadas na forma paramétrica

$$r: \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 9 - 4\lambda \\ y = 2 + \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

são concorrentes, paralelas ou reversas. Se concorrentes, encontre o ponto de intersecção.

Resp.:  $r$  e  $s$  são concorrentes; ponto de intersecção  $P = (1, 4, -2)$

45. Considere as retas com equações vetorial  $r: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 4)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $s: X = (1, 0, -2) + \lambda(-1, -1, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(a) Mostre que  $r$  e  $s$  são concorrentes.

(b) Encontre as coordenadas do ponto de intersecção entre elas.

Resp.: (b)  $P = (-1, -2, -4)$

#### V.46.14 Revisão para P1

46. Verdadeiro ou falso?

(a) Se  $ABC$  é um triângulo, então  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  são LI.

(b) Se  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  é uma base ortonormal, então a coordenada de qualquer vetor  $\vec{v}$  na direção  $\vec{i}$  é igual a  $\vec{v} \cdot \vec{i}$ .

Resp.: (a) Falso; (b) Verdadeiro

47. Sejam  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base e  $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ,  $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$  e  $\vec{w} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ . Encontre uma condição necessária e suficiente para que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  seja uma base.

Resp.:  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  é base se, e somente se,  $a \neq b$ ,  $c \in \mathbb{R}$

48. Sejam  $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  e  $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$  duas bases com

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

Escreva a matriz de mudança da base  $F$  para base  $E$ ,  $M_{FE}$ .

$$\text{Resp.: } M_{FE} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

49. Verdadeiro ou falso? Sejam  $E$  e  $F$  duas bases de  $V^3$ :

(a)  $M_{EF} = (M_{FE})^{-1}$

(b)  $(M_{FE})^{-1} = (M_{FE})^t$  e  $\det M_{FE} = \pm 1$

Resp.: (a) Verdadeiro; (b) Falso

50. Prove que para quaisquer  $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ :

(a)  $4 \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ ;

(b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  se, e somente se,  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ ;

(c) os comprimentos das diagonais de um paralelogramo são iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.

Resp.: (a) use a Equação (V.7.1) ou o fato que  $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$ .

51. Seja  $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva.

(a) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + \vec{j} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 2 \end{cases}$$

(b) Descreva o conjunto solução da equação  $\vec{x} \wedge (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{k}$ .

Resp.: (a)  $\vec{x} = (1, 1, 1)_E$ ; (b)  $\vec{x} = (c, 1 - 2c, c)$  para qualquer  $c \in \mathbb{R}$

52. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores ortogonais e  $\vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ . Prove que

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w}) = \|\vec{u}\|^4 \vec{v}.$$

Resp.: use Proposição V.10.5

53. Prove que

(a)  $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = 2 \vec{v} \wedge \vec{u}$ .

$$(b) \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}.$$

Resp.: use Proposição V.10.4 e definição de produto misto.

54. Seja  $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  uma base ortonormal positiva.

(a) Decomponha o vetor  $\vec{v} = (1, 2, -1)_B$  como soma de dois vetores  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$ , de modo que  $\vec{p}$  seja paralelo a  $\vec{u} = (2, -1, 0)_B$  e  $\vec{q}$  seja ortogonal a  $\vec{u}$ .

(b)  $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  é uma base positiva? e se  $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ ?

Resp.: (a)  $\vec{p} = \vec{0}$  e  $\vec{q} = \vec{v}$ ; (b) Não é base. Se  $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ , então  $(\vec{p}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) = (-\frac{3}{5}\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$  é base negativa.

55. Resolva a equação  $(\vec{x} \wedge \vec{a}) \wedge (\vec{x} \wedge \vec{b}) = \vec{c}$ , sabendo que  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$ .

Resp.: Se  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$ , não existe solução. Se  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$ , então  $\vec{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}} \vec{c}$ . **Sugestão:** note que  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  é base; escreva  $\vec{x}$  como combinação linear dos elementos dessa base e use a Proposição V.10.5

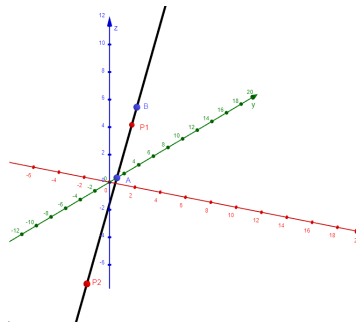
Para os exercícios 56 a 58 considere um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, B)$  de  $E^3$ , com  $B$  base positiva. As coordenadas dos pontos e as equações de retas são dadas em relação ao sistema  $\Sigma$ .

56. Escreva as equações paramétricas e simétricas da reta que passa por  $A = (2, 0, -3)$  e é paralela a reta

$$\frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

$$\text{Resp.: } r : \begin{cases} x = 2 - 15\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = -3 + 18\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad r : \frac{2-x}{15} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{18}.$$

57. Sejam  $A = (1, 2, 5)$  e  $B = (0, 1, 0)$ . Determine o(s) ponto(s)  $P$  da reta que passa por  $A$  e  $B$  tal que  $\|\vec{PB}\| = 3\|\vec{PA}\|$ .



$$\text{Resp.: } P_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{15}{4}\right) \text{ e } P_2 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{15}{2}\right).$$

58. Sejam  $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$  e  $s : X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Estude, segundo os valores de  $m$ , a posição relativa de  $r$  e  $s$ .  
 Resp.: 1 Se  $m = \frac{6}{11}$ , então  $r$  e  $s$  são concorrentes. Se  $m \neq \frac{6}{11}$ , então  $r$  e  $s$  são reversas.

#### V.46.15 Posição relativa entre reta e plano

59. Sejam  $r : X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 3)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  uma reta,  $\pi$  um plano de equação geral  $x + y + z = 20$ . Qual a posição relativa entre  $r$  e  $\pi$ ? Se transversais, encontre o ponto de intersecção.  
 Resp.:  $r$  e  $\pi$  são transversais e  $P = (7, 3, 10)$  é o ponto de intersecção.
60. Estude a posição relativa da reta  $r$  e do plano  $\pi$  dados por ([Tarefa!](#))

$$r: \frac{x-1}{2} = y = -z$$

e

$$\pi: (x, y, z)_{\Sigma} = (3, 0, 1)_{\Sigma} + \lambda(1, 0, 1)_{E} + \mu(2, 2, 0)_{E}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.:  $r$  e  $\pi$  são transversais e  $P = (2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  é o ponto de intersecção.

#### V.46.16 Posição relativa entre dois planos

61. Determine a posição relativa dos planos

$$\pi_1 : x + 2y + 3z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : x - y + 2z = 0.$$

Descreva o conjunto dos pontos pertencentes à intersecção.

Resp.:  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são transversais; o conjunto dos pontos da intersecção é uma

reta cuja uma equação paramétrica é  $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 5\lambda, \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

62. Encontre uma equação do plano  $\pi$  que contém o ponto  $A = (2, 0, 0)$  e a reta de intersecção dos planos  $\pi_1 : 3x - 2y - z - 3 = 0$  e  $\pi_2 : 2x + y + 4z - 2 = 0$ . ([Tarefa!](#))

Resp.:  $\pi : y + 2z = 0$  (**Sugestão:** usar teoria de feixe de planos.)

**V.46.17 Perpendicularismo, medida angular, distância****V.46.18 Perpendicularismo**

63. Seja  $\Sigma = (O, B)$  um sistema de coordenadas ortogonal. Obtenha uma equação geral do plano  $\pi$  que contém o ponto  $A = (1, 1, 2)$  e que é paralelo ao plano de equação geral  $x - y + 2z + 1 = 0$ .

Resp.:  $x - y + 2z - 4 = 0$

64. Encontre equações paramétricas da reta  $r$  que passa pelo ponto  $A = (1, 0, -1)$  e é perpendicular à reta  $s: X = (2, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Resp.:  $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$

**V.46.19 Medida angular**

65. Seja  $\Sigma = (O, B)$  um sistema de coordenadas ortogonal. Obtenha equações de reta  $r$  que contenha o ponto  $P = (1, 1, 1)$ , seja concorrente com

$$s : x = 2y = 2z,$$

sabendo que o cosseno da medida angular entre  $r$  e  $s$  é  $1/\sqrt{3}$ .

Resp.:  $r_1 : X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$  e  $r_2 : X = (1, 1, 1) + \lambda(-4, 1, 1)$

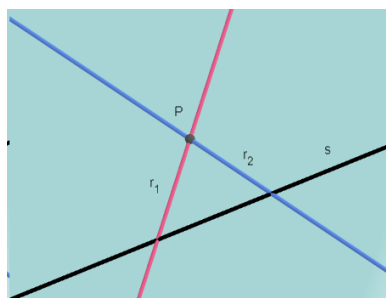


Figura 24: Geogebra

66. Seja  $\Sigma = (O, B)$  um sistema de coordenadas ortogonal. Calcule a medida angular entre os planos

$$\pi_1 : x + y + z = 0, \quad \pi_2 : X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

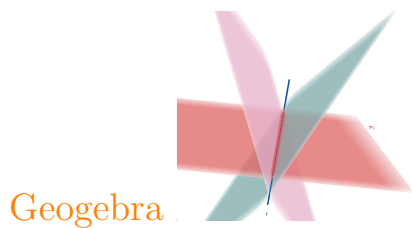
Resp.:

67. Encontre uma equação geral do plano que contém a reta

$$r: \begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

e que forma um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  radianos com o plano  $\pi_1: x + 2y - 3z + 2 = 0$ .

Resp.:  $\pi: -3x + y + 2z + 4 = 0$  e  $\pi: -2x + 3y - z + 5 = 0$



### V.46.20 Distância

68. Considere um sistema de coordenadas ortogonal  $\Sigma = (O, E)$  fixado em  $E^3$ . Sejam  $A = (a, b, c)$  e  $B = (m, n, p)$  pontos distintos. Verifique que o lugar geométrico dos pontos de  $E^3$  que equidistam de  $A$  e  $B$  é um plano perpendicular ao segmento  $AB$  que contém o seu ponto médio. Esse plano é chamado **plano mediador** de  $AB$ .

69. Calcule a distância entre o ponto  $P = (1, -1, 4)$  e a reta

$$r: \frac{x - 2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{1 - z}{2}.$$

Resp.:  $d(P, r) = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}}$

70. Calcule a distância do ponto  $P = (9, 2, 2)$  ao plano

$$\pi: X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resp.:  $d(P, \pi) = \frac{94}{13}$

71. Calcule a distância entre as retas

$$r: X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad s: x + y + z = 2x - y - 1 = 0.$$

Resp.:  $d(r, s) = \frac{7}{\sqrt{26}}$  (tarefa)

72. Sejam  $\Sigma = (O, B)$  um sistema ortogonal de coordenadas onde  $B$  é uma base positiva. Considere  $A = (0, 2, 1)$  um ponto e a reta  $r : X = (0, 2, -2) + \lambda(1, -1, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(a) Obtenha os pontos da reta  $r$  que distam  $\sqrt{3}$  de  $A$ .

(b)  $d(A, r)$  é maior, igual ou menor a  $\sqrt{3}$ ? Por quê?

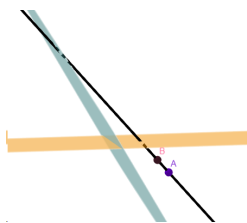
Resp.: (a)  $P = (1, 1, 0)$ ; (b)  $d(A, r) = \sqrt{3}$ , pois  $P$  é a projeção ortogonal de  $A$  a  $r$  (tarefa)

73. Sejam  $\Sigma = (O, B)$  um sistema ortogonal de coordenadas onde  $B$  é uma base positiva. Obtenha os pontos da reta  $r : x - y = 2y = z$  que equidistam de  $A = (1, 1, 0)$  e  $B = (0, 1, 1)$ .

Resp.:  $P = (0, 0, 0)$  (tarefa)

74. Sejam  $\Sigma = (O, B)$  um sistema ortogonal de coordenadas onde  $B$  é uma base positiva. Obtenha os pontos da reta  $r : X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que equidistam dos planos  $\pi_1 : x + 2y - z - 3 = 0$  e  $\pi_2 : x - y + 2z = 1$ .

Resp.:  $A = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ ,  $B = (-\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$  (tarefa)



Geogebra .

75. Sejam  $\Sigma = (O, B)$  um sistema ortogonal de coordenadas onde  $B$  é uma base positiva. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos  $A = (1, 1, 1)$  e  $B = (0, 2, 1)$  e equidista dos pontos  $C = (2, 3, 0)$  e  $D = (0, 1, 2)$ .

Resp.:  $\pi_1 : x + y - 2 = 0$  e  $\pi_2 : z = 1$  (tarefa) (Wolfram Alpha resolve sistemas)

#### V.46.21 Mudança de sistema de coordenadas, translação e rotação

76. Sejam  $\Sigma_1 = (O_1, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$  e  $\Sigma_2 = (O_2, (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3))$  dois sistemas de coordenadas com

$$O_2 = (1, 0, 0)_{\Sigma_1}, \quad \vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = -\vec{e}_3, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_2.$$

Obtenha, em relação a  $\Sigma_2$ ,



- (a) uma equação vetorial da reta  $r : [X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)]_{\Sigma_1}$ .  
 (b) uma equação geral do plano  $\pi : [2x - y + z = 0]_{\Sigma_1}$ .

Resp.:  $r : [X = (-1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)]_{\Sigma_2}$  e  $\pi : [2u - v - w + 2 = 0]_{\Sigma_2}$

### V.46.22 Elipses, hipérboles e parábolas

#### V.46.23 Elipse

77. Verifique que o centro e os focos da elipse não pertencem à elipse.  
 78. Se  $\overline{PQ}$  é uma corda qualquer da elipse, então  $d(P, Q) \leq 2a$ .  
 79. Seja

$$4x^2 + 169y^2 = 676$$

uma equação de uma elipse (em relação a um sistema de coordenadas ortogonal). Calcule

- a distância focal;
- a medida do eixo maior;
- a medida do eixo menor.

Resp.: (a)  $2\sqrt{165}$ ; (b) 26; (c) 4

#### V.46.24 Hipérbole

80. **(Tarefa!)** Verifique que o centro e os focos da hipérbole não pertencem à hipérbole.  
 81. **(Tarefa!)** Se  $\overline{PQ}$  é uma corda qualquer da hipérbole de modo que  $P$  e  $Q$  pertencem a ramos distintos, então  $d(P, Q) \geq 2a$ . A igualdade ocorre se, e somente se,  $P$  e  $Q$  são os vértices da hipérbole.  
 82. Considere a hipérbole

$$25x^2 - 144y^2 = 9.$$

- (a) Escreva as coordenadas dos vértices;  
 (b) escreva as coordenadas dos focos;

- (c) obtenha as equações das assíntotas;  
 (d) faça um esboço da hipérbole.

Resp.: (a)  $A_1 = (-3/5, 0)$ ,  $A_2 = (3/5, 0)$ ; (b)  $F_1 = (-13/20, 0)$ ,  $F_2 = (13/20, 0)$ ; (c)  $y = \pm 5x/12$

83. Considerando o s.c.o  $\Sigma = (O, \vec{i}, \vec{j})$ , classifique e desenhe as curvas cujas equações reduzidas são:

- (a)  $x^2 + 4y^2 = 4$       (d)  $9y^2 - x^2 = 9$       (g)  $y = -\frac{1}{5}x^2$   
 (b)  $9x^2 + 4y^2 = 1$       (e)  $x = 2y^2$       (h)  $x = -\frac{1}{3}y^2$   
 (c)  $x^2 - 4y^2 = 4$       (f)  $y = 2x^2$

Resp.: (a) elipse com focos  $(\pm\sqrt{3}, 0)$  no eixo- $x$ ; (b) elipse com focos  $(0, \pm\sqrt{5}/6)$  no eixo- $y$ ; (c) hipérbole com focos  $(\pm\sqrt{5}, 0)$  no eixo- $x$ ; (d) hipérbole com focos  $(0, \pm\sqrt{10})$  no eixo- $y$ ; (e) parábola com foco  $(1/8, 0)$  no eixo- $x$  positivo e  $d(F, r) = \frac{1}{4}$ ; (f) parábola com foco  $(0, 1/8)$  no eixo- $y$  positivo e  $d(F, r) = \frac{1}{4}$ ; (g) parábola com foco  $(0, -5/4)$  no eixo- $y$  negativo e  $d(F, r) = \frac{5}{2}$ ; (h) parábola com foco  $(-3/4, 0)$  no eixo- $x$  negativo e  $d(F, r) = \frac{3}{2}$

### V.46.25 Cônicas

84. Determine se é possível transformar  $g$  em um polinômio  $\tilde{g}$  livre dos termos lineares. No caso afirmativo, encontre  $\tilde{g}$ .

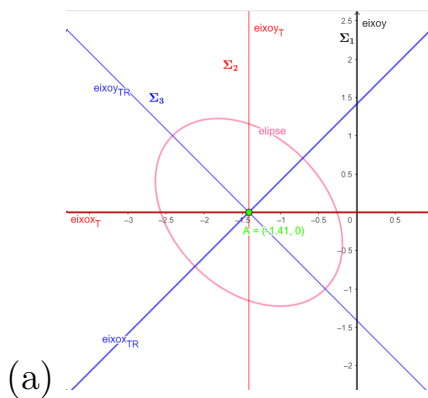
- (a)  $g(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 30y + 175$   
 (b)  $g(x, y) = 7x^2 + 28xy + 28y^2 - 2x - 4y - 1$

Resp.: (a) impossível; (b)  $\tilde{g}(u, v) = 7u^2 + 28uv + 28v^2 - \frac{8}{7}$

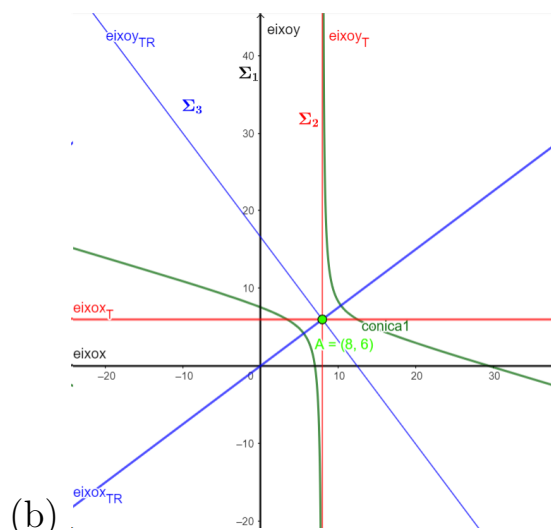
85. Identifique e esboce as cônicas:

- (a)  $g(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$  (tarefa!)  
 (b)  $g(x, y) = 7x^2 + 24xy - 256x - 192y + 1456 = 0$  (tarefa!)  
 (c)  $g(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 85x - 30y + 175 = 0$  (ver p. 369-370, Boulos) (tarefa!)  
 (d)  $g(x, y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0$

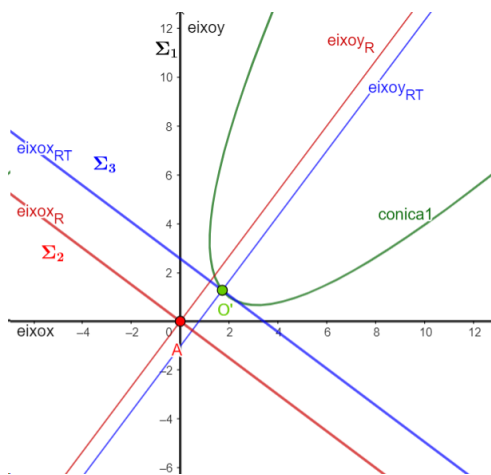
Resp.: (a) elipse (Geogebra-TR), (b) hipérbole, (c) e (d) parábola (Geogebra-RT)



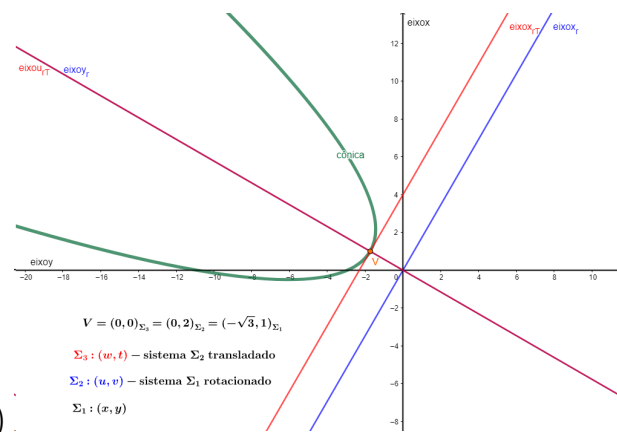
(a)



(b)



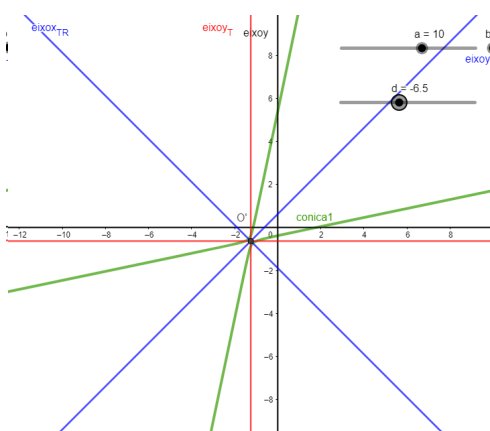
(c)



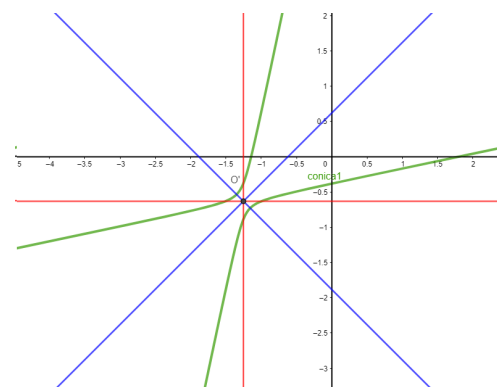
(d)

Geogebra: cônica genérica

**Cuidado:** a cônica abaixo parece retas concorrentes...



mas é hipérbole!



**V.46.26 Retas tangentes, secantes**

86. Analise as posições relativas das retas  $r : X = (x, y) = (0, k) + \lambda(m, 0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e da elipse

$$C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Resp.: para  $k = 1$  ou  $k = -1$ , a reta  $r$  é tangente a  $C$ ; para  $|k| < 1$ , a reta  $r$  é secante a  $C$ ; para  $|k| > 1$ , a reta  $r$  não intercepta  $C$ . [geogebra](#)

**V.46.27 Quádricas**

87. Determine o conjunto que é descrito pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}x - 4y + 8 = 0.$$

Resp.: conjunto vazio

88. Determine o centro  $C$  e o raio  $\rho$  da esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 15 = 0.$$

Resp.:  $C = (1, 2, 0)$  e  $\rho = \sqrt{20}$

89. Quantas esferas passam, respectivamente, por 1, 2 e 3 pontos?

Resp.:

por 1 ponto  $P$ : infinitas esferas: todos pontos do espaço distintos de  $P$  podem ser centro;

por 2 pontos  $P \neq Q$ : infinitas esferas: todos pontos do plano mediador de  $\overline{PQ}$  podem ser centro;

por 3 pontos  $P, Q, R$  não colineares: infinitas esferas: todos pontos da reta de intersecção dos planos mediadores de  $\overline{PQ}$  e  $\overline{PR}$  podem ser centro.

90. Localize o ponto  $A = (2, -1, 3)$  em relação à esfera

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 7 = 0.$$

Resp.:  $A$  é exterior a  $S$ .

91. Obtenha uma equação geral do plano tangente  $\pi$  à esfera  $S$  no ponto  $T$ , onde

$$S : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0, \quad T = \left( -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

Resp.:  $\pi : 4x - y + z + 2 = 0$

92. Identifique as seguintes quádricas (superfícies em  $E^3$ ):

(a)  $x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 20$

(d)  $z = x^2 + 4y^2$

(b)  $x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$

(e)  $16z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$

(c)  $x^2 - y^2 + 4z^2 = -4$

(f)  $x^2 + 4y^2 = 4$

(g) Para os itens (a), (b) e (d): identifique a curva de intersecção da quádrica com o plano  $x = 1$  e determine os vértices e assíntotas de tais curvas (caso existam). Desenhe as curvas no plano  $Oyz$ .

Resp.: (a) elipsóide; (b) hiperbolóide de 1 folha (eixo  $Oy$  é o eixo distinguido); (c) hiperbolóide de 2 folhas; (d) parabolóide elíptico; (e) cone elíptico; (f) cilindro elíptico;

(g)-(a) elipse  $\frac{y^2}{\frac{19}{4}} + \frac{z^2}{\frac{19}{5}} = 1$ , vértices:  $(1, 0, \pm\sqrt{\frac{19}{5}})$  e  $(1, \pm\sqrt{\frac{19}{4}}, 0)$ , não possui assíntota

(g)-(b) hipérbole  $\frac{z^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{\frac{3}{3}} = 1$ , vértices:  $(1, 0, \pm\sqrt{\frac{4}{3}})$ , assíntotas  $z = \pm\frac{2}{3}y$

(g)-(d) parábola  $z = 1 + 4y^2$ , vértice:  $(1, 0, 1)$ , não possui assíntota.

93. Sejam  $A = (0, 3, 0)$  e  $B = (0, -3, 0)$  dois pontos de  $E^3$ . Obtenha uma equação geral do lugar geométrico dos pontos  $X$  de  $E^3$  tais que

$$d(X, A) - d(X, B) = m.$$

Note que a equação acima é equivalente a

$$4m^2x^2 + (4m^2 - 144)y^2 + 4m^2z^2 + (36m^2 - m^4) = 0.$$

Identifique o lugar geométrico nos casos:

(a)  $m = 2$

(b)  $m = 6$

(c)  $m = 10$

Resp.: (a) hiperbolóide de duas folhas; (b) reta (eixo  $Oy$ ); (c) elipsóide

## V.46.28 Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas

### V.46.29 Coordenadas polares

94. Escreva as coordenadas polares dos pontos dados em coordenadas cartesianas:

- (a)  $P = (0, 1)$                       (c)  $P = (0, -1)$                       (e)  $P = (1, 1)$   
 (b)  $P = (2, 0)$                       (d)  $P = (-3, 0)$

Resp.: (a)  $P = (1, \pi/2)$ ; (b)  $P = (2, 0)$ ; (c)  $P = (1, \pi)$ ; (d)  $P = (3, 3\pi/2)$ ; (e)  $P = (\sqrt{2}, \pi/4)$

95. Descreva as curvas dadas pelas equações:

- (a)  $r = 4$     (e)  $r = \cos 2\theta$  (tarefa!)  
 (b)  $\theta = \frac{\pi}{3}$     (f)  $r^2 = \sin 2\theta$  (tarefa!)  
 (c)  $r = 2 \cos \theta$   
 (d)  $r = 1 - \sin \theta$     (g)  $r \cos \theta = 2$

Resp.: (a) circunf. de centro  $(0,0)$  e raio 2; (b) semi-reta; (c) circunf. centro  $(1,0)$  e raio 1; (d) cardióide ([Wikipédia](#)); (e) reta  $x = 2$ ; (e) rosa de 4 pétalas; (e) lemniscata;

### V.46.30 Coordenadas cilíndricas

96. Descreva as superfícies dadas pelas equações:

- (a)  $r = 4$     (c)  $\tau = 1$     (e)  $\tau = r^2$   
 (b)  $\theta = \frac{\pi}{3}$     (d)  $r = 2 \cos \theta$     (f)  $\tau = r$

Resp.: (a) cilindro de centro  $(0,0,0)$  e raio 2; (b) semiplano de ângulo  $\pi/3$  com o plano coordenado  $Oxz$ ; (c) plano paralelo ao plano coordenado  $Oxy$  (d) cilindro circular de centro  $(1, 0, 0)$  e raio 1; (e) parabolóide; (f) cone (com  $z > 0$ )

### V.46.31 Coordenadas esféricas

97. Descreva as superfícies dadas pelas equações:

- (a)  $\rho = 4$     (c)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$     (e)  $\varphi = \frac{4\pi}{5}$   
 (b)  $\theta = \frac{\pi}{3}$     (d)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Resp.: (a) esfera de centro  $(0,0,0)$  e raio 2; (b) semiplano de ângulo  $\pi/3$  com o plano coordenado  $Oxz$ ; (d) cone (com  $z > 0$ ); (e) plano  $Oxy$ ; (f) cone (com  $z < 0$ )

**V.46.32 Revisão para P2**

98. Faça os exercícios que foram deixados como tarefa: 60, 62, 71–75, 80, 81, 85a–85c.

99. O plano  $\pi$  é determinado pelas retas  $r : x + z = 5 = y + 4$  e  $s : X = (4, 1, 1) + \lambda(4, 2, -3)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de  $\pi$ .

Resp.:  $\pi : 2x - y + 2z - 9 = 0$ . Os planos que distam 2 de  $\pi$  são:  $2x - y + 2z - 15 = 0$  e  $2x - y + 2z - 3 = 0$ .

100. Seja  $C$  a cônica de equação geral  $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ . Identifique a cônica e, quando for o caso, obtenha seus parâmetros geométricos ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  ou  $p$ ) e determine, em relação ao sistema de coordenadas ortogonal inicial, os elementos geométricos principais: centro, focos, vértices, assíntotas, eixos, diretriz, etc.

Resp.: parábola  $w^2 = 4\sqrt{2}t$ , com parâmetro  $p = \sqrt{2}$ . No sistema inicial: foco  $F = (3, 2)$ ; vértice  $V = (2, 1)$ , diretriz  $r : x + y = 1$ , eixo de simetria  $s : x - y = 1$ .

101. Identifique, em cada caso, o lugar geométrico dos pontos  $X$  de  $E^3$  tais que  $d(X, A) + d(X, B) = m$ .

(a)  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (-1, 0, 0)$ ,  $m = 2$ ;

(b)  $A = (2, 0, 2)$ ,  $B = (2, 0, 0)$ ,  $m = 1$ .

Resp.: (a) eixo  $Ox$ ; (b) hiperbolóide de 2 folhas

102. Faça uma mudança de coordenadas conveniente para concluir que a quádrlica  $\Omega : z = xy$  é um parabolóide hiperbólico (sela) e faça seu esboço.

Resp.: 
$$\begin{cases} x = -\frac{u}{a} + \frac{v}{b} \\ y = \frac{u}{a} - \frac{v}{b} \\ z = w \end{cases} \quad (\text{se } a = b = \sqrt{2}, \text{ uma rotação de ângulo } \theta = \frac{3\pi}{4})$$

use [Geogebra-sela](#) para verificar seu esboço

103. Sendo  $\Omega : 2x^2 - y^2 + 4z^2 = 1$ , determine os planos paralelos aos planos coordenados que interceptam  $\Omega$  em uma cônica de distância focal  $\sqrt{6}$ .

Resp.: os planos são  $x = \pm \frac{11}{10}$ ,  $y = \pm \sqrt{5}$ ,  $z = 0$  e  $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

104. Sejam  $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  uma elipse e  $H : \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$  uma hipérbole confocais (isto é, que possuem os mesmos focos). Verifique que:

- (a)  $E \cap H$  contém exatamente quatro pontos;
- (b) Em cada ponto  $T$  da intersecção  $E \cap H$ , a elipse e a hipérbole se interceptam ortogonalmente, isto é, as retas tangentes às curvas em  $T$  são perpendiculares.

Dica: (a) escreva o sistema que um ponto  $X = (x, y) \in E \cap H$  deve satisfazer e verifique que as curvas serem confocais implica  $a^2 - b^2 = m^2 - n^2$

*Fim do curso!*

*Bons estudos!*

*Boas Férias!*

