

ESTE MATERIAL É A JUNÇÃO DO SLIDES USADOS DURANTE AS AULAS DA PROF^a PERON NO CURSO SMA355-CÁLCULO 3, DO ICMC-USP, EM 2022.

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Recordando conceitos vistos em Cálculo 2 | 4 |
| 1.1 | Funções de várias variáveis a valores vetoriais | 4 |
| 2 | Novos operadores de derivação usados em Cálculo 3 | 6 |
| 3 | Recordando conceitos vistos em Geometria Analítica: exemplos importantes de transformações | 7 |
| 3.1 | Coordenadas polares no plano (veja aqui: Math Insight) | 7 |
| 3.2 | Coordenadas cilíndricas (veja aqui: Math Insight) | 8 |
| 3.3 | Coordenadas esféricas (polares no espaço) (veja: Math Insight) | 9 |
| 4 | Lembrando definição de integral em uma variável | 10 |
| 5 | Integral dupla em retângulos | 11 |
| 5.1 | Definição de Integral Dupla em Retângulos | 11 |
| 5.2 | Integrabilidade e Teorema de Fubini em retângulos | 13 |
| 6 | Integrais múltiplas | 14 |
| 6.1 | Definição de Integrais múltiplas | 14 |
| 6.2 | Integrabilidade e Teorema de Fubini em multi-retângulo | 16 |
| 7 | Propriedades da integral múltipla | 17 |
| 8 | Integral múltipla em conjuntos limitados | 18 |
| 8.1 | Definição de integral múltipla em conjuntos limitados | 18 |
| 8.2 | Medida de Peano-Jordan | 19 |
| 8.3 | Integrabilidade e Teorema de Fubini | 22 |
| 8.4 | Propriedades da integral múltipla | 25 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 9 | Algumas aplicações | 26 |
| 9.1 | Volumes e Áreas | 26 |
| 9.2 | Área de Superfície | 28 |
| 9.3 | Cálculo das propriedades inerciais de um corpo | 30 |
| 10 | Mudança de variável em integral múltipla | 31 |
| 10.1 | Motivação: caso $n = 2$ | 31 |
| 10.2 | Caso geral | 34 |
| 10.3 | Exemplos importantes | 35 |
| 11 | Recordação: curvas | 37 |
| 12 | Integral de linha de função escalar | 39 |
| 12.1 | Integral de linha com respeito ao comprimento de arco | 39 |
| 12.2 | Integral de linha com respeito a x_i | 42 |
| 13 | Integral de linha de campo vetorial | 43 |
| 13.1 | Campo Vetorial | 43 |
| 13.2 | Integral de linha de c.v. | 44 |
| 13.3 | Fluxo de um campo vetorial através de uma curva | 48 |
| 14 | Campos conservativos | 50 |
| 15 | Campos conservativos: recordação | 58 |
| 16 | Campos Conservativos: uma condição suficiente | 59 |
| 17 | Teorema de Green (Teoremas de Gauss e Stokes no plano) | 65 |
| 18 | Superfícies | 69 |
| 19 | Área de uma superfície | 76 |
| 20 | Integrais de superfície | 77 |
| 20.1 | Integral de superfície de função escalar | 77 |
| 20.2 | Integral de superfície de campo vetorial | 79 |
| 21 | Teorema de Stokes no espaço | 81 |
| 21.1 | Superfícies com fronteira e orientação: noção intuitiva | 81 |

| | |
|--|-----------|
| 21.2 Teorema de Stokes no espaço | 83 |
| 22 Teorema de Gauss no espaço | 87 |
| 23 Campos solenoidais | 91 |
| 24 Aplicações dos Teoremas de Gauss e Stokes | 92 |
| 24.1 Interpretações para o rotacional e o divergente | 92 |
| 24.2 Eq. de Maxwell | 93 |
| 24.2.1 Lei de Gauss (para o campo elétrico) | 93 |
| 24.3 Lei de Gauss para o campo magnético | 94 |
| 24.4 Lei de Ampere (caso estático - sem correção de Maxwell) | 94 |
| 24.5 Lei de Ampere (caso geral - com correção de Maxwell) | 95 |
| 24.6 Lei de Faraday (indução eletromagnética) | 95 |
| 25 Exercícios | 95 |
| 25.1 Integral múltipla em retângulos | 95 |
| 25.2 Integral múltipla em conjuntos limitados | 96 |
| 25.3 Aplicações de integral múltipla | 98 |
| 25.4 Mudança de variável em integral múltipla | 99 |
| 25.5 Curvas | 100 |
| 25.6 Integral de linha de função escalar | 101 |
| 25.7 Revisão e aprofundamento: Integrais duplas e triplas | 101 |
| 25.8 Integral de linha de Campo Vetorial | 102 |
| 25.9 Campo Vetorial Conservativo: independência do caminho | 102 |
| 25.10 Teorema de Green (Gauss, Stokes no plano) | 103 |
| 25.11 Integrais de superfície de função escalar e de c.v. | 103 |
| 25.12 Teorema de Stokes | 104 |
| 25.13 Teorema de Gauss | 104 |
| 25.14 Revisão e aprofundamento: Integrais de linha e de superfície | 106 |

1 Recordando conceitos vistos em Cálculo 2

1.1 Funções de várias variáveis a valores vetoriais

Uma **Funções de várias variáveis a valores vetoriais** é uma função da forma

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad n, k \geq 2.$$

Podemos interpretar de diferentes maneiras: por exemplo

- **Transformações:** o conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é transformado no novo conjunto $\mathbf{f}(D) \subseteq \mathbb{R}^k$.
- **Mudança de variáveis:** (se $n = k$ e \mathbf{f} é bijetora) o ponto \mathbf{x} de coordenadas (x_1, \dots, x_n) é representado pelo ponto \mathbf{y} de coordenadas (y_1, \dots, y_n) onde $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
- **Campos vetoriais:** a cada ponto $\mathbf{x} \in D$ a função associa um vetor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$. (**link desenho C.V.**)

*Valem as mesmas definições do caso de funções a valores reais ($k = 1$): domínio, domínio natural, contradomínio, imagem, sobrejetora, injetora, bijetora, operações, composição, inversa, gráfico... . Veja **material SMA353: Funções aqui***

Para funções a valores vetoriais ($k \geq 2$), podemos considerar as funções componentes

$$f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, \dots, k)$$

tais que

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$$

e aplicar a elas a teoria das funções a valores reais: limites, continuidade, diferenciabilidade, regras de cálculo, ecc. Veja **material SMA354: funções de várias variáveis 1,2,3 aqui**

Em particular dizemos que **\mathbf{f} é contínua (derivável/diferenciável)** em $\mathbf{x} \in D$ se cada uma de suas componentes o é.

Definição: dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $A \subseteq D$, dizemos que f é de Classe \mathcal{C}^k em A (Notação: $f \in \mathcal{C}^k(A)$) se f e todas suas derivadas até a ordem k existem e são contínuas em A .

Lembrete: se f é de classe \mathcal{C}^1 em um aberto A então é diferenciável em A .

Definição: Se \mathbf{f} é derivável em $\mathbf{p} \in D$ definimos a **Matriz Jacobiana de \mathbf{f} em \mathbf{p} :** a matriz $k \times n$

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p}) \right] : \begin{array}{l} i = 1, \dots, k, \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

Observe:

- As colunas de J são as derivadas parciais (vetoriais) de \mathbf{f} : $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{p}) : j = 1, \dots, n$
- as linhas de J são os gradientes das componentes de \mathbf{f} : $\nabla f_i(\mathbf{p}) : i = 1, \dots, k$

Regra da cadeia para funções a valores vetoriais

Sejam $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^t$ diferenciáveis, então faz sentido $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^t : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ e vale

$$J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

2 Novos operadores de derivação usados em Cálculo 3

Para campos vetoriais $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, denotamos

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e podemos definir:

o **divergente** do campo F por:

$$\operatorname{div} F(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

(outras notações: $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$)

(divergente é um campo escalar: $\operatorname{div} F : D_{\operatorname{div}} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$).

Para campos vetoriais $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $n = 3$, denotamos

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), F_3(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} = (x, y, z)$$

e podemos definir

o **rotacional** do campo F por:

$$\operatorname{rot} F := \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(outras notações: $\operatorname{rot} F = \nabla \wedge F$)

(rotacional é um campo vetorial: $\operatorname{rot} F : D_{\operatorname{rot}} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$).

.....

Se $n = 2$, definimos $\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$ ou simplesmente $\operatorname{rot} F := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

.....

Lembrete: Produto vetorial: No caso $n = 3$ (e $n = 2$) definimos o produto vetorial de dois vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ por:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Onde usa isso? [Eq. de Maxwell](#)

3 Recordando conceitos vistos em Geometria Analítica: exemplos importantes de transformações

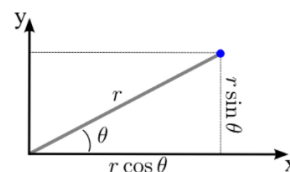
3.1 Coordenadas polares no plano (veja aqui: [Math Insight](#))

Transformação

$$T : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) :$$

Representamos o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$



A matriz Jacobiana é

$$J_T(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\det(J_T(r, \theta)) = r$$

Cálculo de r e θ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} \arctg(y/x) & \text{para } x > 0 \\ \arctg(y/x) + \pi & \text{para } x < 0 \\ \pi/2 & \text{para } x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{para } x = 0, y < 0 \\ q.q. & \text{para } x = 0, y = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

.....

Note: Em geral considera-se a restrição $\theta \in [0, 2\pi)$ para que cada ponto, exceto a origem, tenha uma única representação em coordenadas polares.

.....

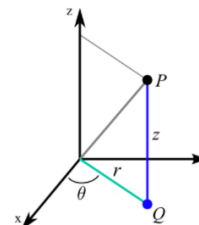
3.2 Coordenadas cilíndricas (veja aqui: [Math Insight](#))

Transformação

$$T : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta, \tau) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \tau) :$$

Representamos o ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = \tau \end{cases}$$



A matriz Jacobiana é

$$J_T(r, \theta, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(J_T(r, \theta, \tau)) = r$$

Cálculo de r , θ e τ :

$$\tau = z,$$

r e θ como antes.

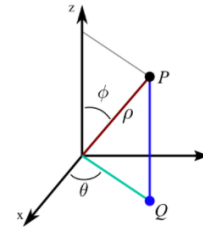
3.3 Coordenadas esféricas (polares no espaço) (veja: **Math Insight**)

Transformação

$$T : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$$

Representamos o ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$



A matriz Jacobiana é

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\det(J_T(\rho, \theta, \varphi)) = -\rho^2 \sin(\varphi)$$

Cálculo de ρ , θ e φ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

θ como antes,

$$\varphi = \arccos\left(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Sugestão de exercícios: [Lista 1](#) do Prof. Eugenio Massa

4 Lembrando definição de integral em uma variável

Definição: uma **Partição de $[a, b]$** é um conjunto finito de pontos da forma

$$P = \{x_0, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\};$$

também denotamos por $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ e $\|P\| = \max \{\Delta_i x, i = 1, \dots, n\}$ e $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

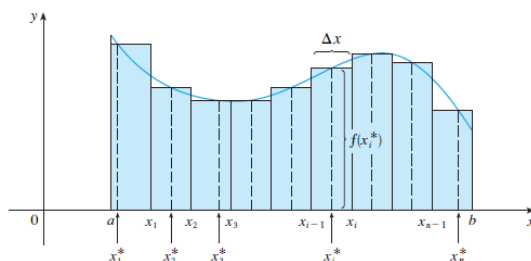


Figura 1: Imagem do livro: Cálculo, vol. 2, James Stewart

Dadas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **limitada (com $[a, b]$ limitado)** e partição P , definimos a Soma de Riemann (**irregular**) (**regular**) (Wikipédia):

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i x,$$

Considere o limite

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i x$$

- quando o limite acima existe e é um número real $L \in \mathbb{R}$ independente da escolha dos pontos x_i^* em $[x_{i-1}, x_i]$, isto é:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall P, \|P\| < \delta, \forall x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], \text{ temos } \left| \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta_i x - L \right| < \epsilon$$

dizemos que

- f é **Riemann integrável (no sentido próprio) em $[a, b]$,**
 - L é a **integral definida (de Riemann) de f em $[a, b]$:** $L = \int_a^b f;$
- se tal L não existir (ou depender da escolha dos x_i^* 's), dizemos que
 - f **não é Riemann integrável em $[a, b]$.**

5 Integral dupla em retângulos

5.1 Definição de Integral Dupla em Retângulos

Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ e $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ **uma função limitada**:

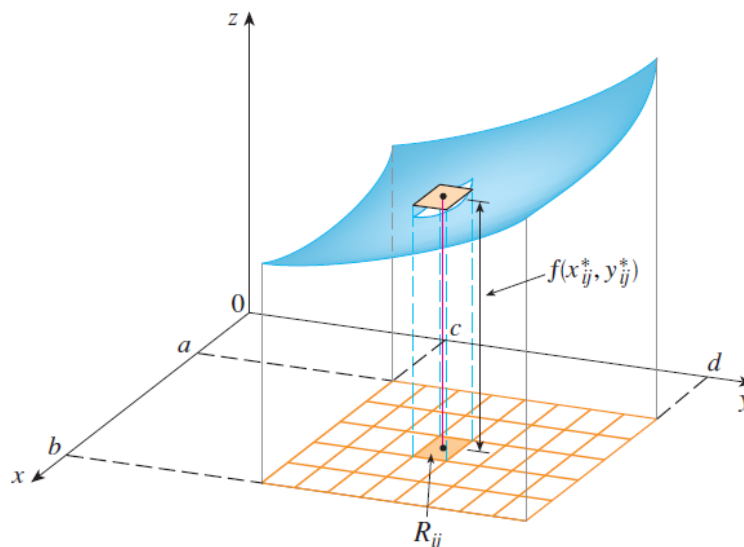


Figura 2: Imagem do livro: Cálculo, vol. 2, James Stewart

- $P = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ partição de R :
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
 $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d, \quad \|P\| = \max \{\Delta_i x, \Delta_j y : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$
- $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$; uma **soma de Riemann**: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta_i x \Delta_j y$
- $L := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta_i x \Delta_j y = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \text{area}(R_{ij})$
- se o limite acima existe, L é finito e independente da escolha dos pontos (x_{ij}^*, y_{ij}^*) dizemos que
 - f é **Riemann integrável (no sentido próprio) em R** ,
 - L é a **integral definida (de Riemann) de f em R** : $L = \iint_R f$;
- se tal L não existir ou depender da escolha dos x^* 's, dizemos que
 - f **não é Riemann integrável em R** .

Outras notações: $\iint_R f = \int_R f = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(\mathbf{x}) dR = \iint_R f(\mathbf{x}) d\mathbf{A}$

Aplicação:

Se $f \geq 0$ (integrável), então

$$\iint_R f$$

é o volume do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

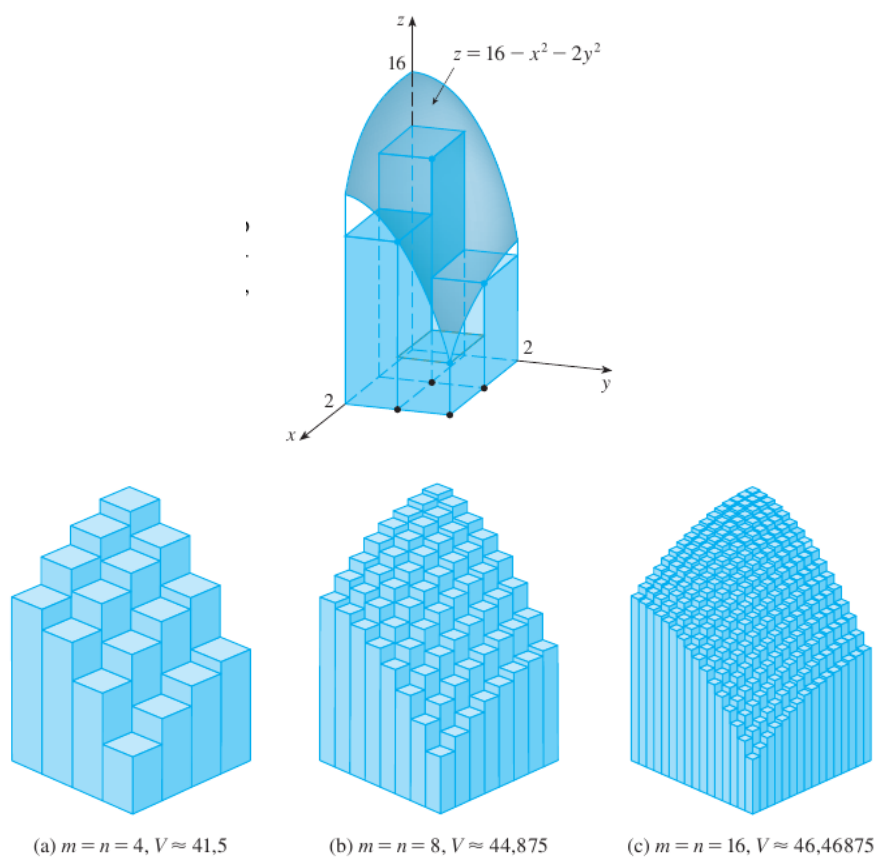


Figura 3: Stewart, Cálculo, vol.2: aproximações para a Soma de Riemann quando $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$, $R = [0, 2] \times [0, 2]$. [Geogebra](#)

Questão 1: Quando $f : R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada é integrável em R ?

Questão 2: Como resolver a integral dupla $\iint_R f$?

5.2 Integrabilidade e Teorema de Fubini em retângulos

Seja $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo em \mathbb{R}^2 .

Teorema 5.1. *Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então é integrável.*

Motivação:

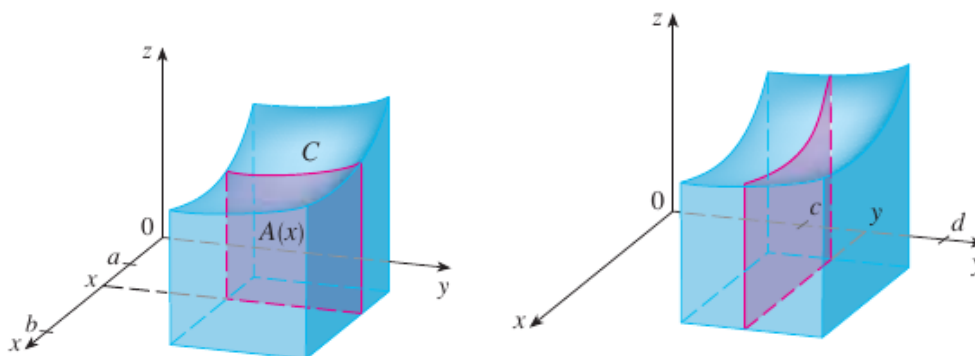


Figura 4: Stewart, Cálculo, vol. 2: *volume é a integral da área da seção transversal, ou seja, $V = \int_a^b A(x)dx$ onde $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ ou $V = \int_c^d A(y)dy$ onde $A(y) = \int_a^b f(x, y)dx$*

Teorema 5.2 (Teorema de Fubini em retângulos). *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e integrável em R .*

- se $\forall x \in [a, b] \exists H(x) := \int_c^d f(x, y) dy$ então H é integrável em $[a, b]$ e

$$\iint_R f = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

- se $\forall y \in [c, d] \exists G(y) := \int_a^b f(x, y) dx$ então G é integrável em $[c, d]$ e

$$\iint_R f = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Corolário 5.3. *Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua ambas as fórmulas valem:*

$$\iint_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

6 Integrais múltiplas

6.1 Definição de Integrais múltiplas

Podemos fazer o mesmo em \mathbb{R}^n :

Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, onde $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$: **multi-retângulo (em \mathbb{R}^n) limitado**.

Sejam

P_1, \dots, P_n partições de $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ contendo $k_1 + 1, \dots, k_n + 1$ pontos

$$P = P_1 \times \dots \times P_n$$

$\|P\|$ o tamanho do maior intervalinho entre todas as P_1, \dots, P_n

$$x_{i_1, \dots, i_n}^* \in R_{i_1, \dots, i_n} = [x_{i_1-1}, x_{i_1}] \times \dots \times [x_{i_n-1}, x_{i_n}]$$

uma **soma de Riemann associada a f e P_1, \dots, P_n** :

$$\mathcal{S}_{x^*}(f, P) = \sum_{i_1=1}^{k_1} \dots \sum_{i_n=1}^{k_n} f(x_{i_1, \dots, i_n}^*) \Delta_{i_1} x \dots \Delta_{i_n} x$$

- se existe $L := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \mathcal{S}_{x^*}(f, P)$ (independente da escolha dos pontos x^*) dizemos que
 - **f é Riemann integrável em R ,**
 - L é a **integral definida (de Riemann) de f em R** : $L = \int_R f$
($n = 3$ usa $\iiint_R f$);
- se $\nexists \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \mathcal{S}_{x^*}(f, P)$ (ou depende da escolha dos pontos x^*) dizemos que
 - **f não é Riemann integrável em R .**

$$\text{Caso } n = 3: \iiint_R 1 = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z = V(R)$$

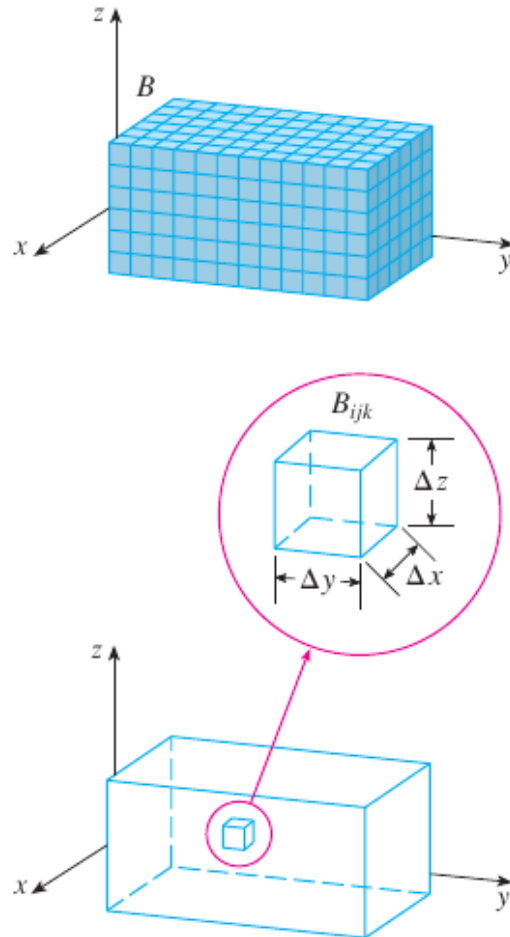


Figura 5: Stewart, Cálculo, vol. 2: $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] = R$

Outras notações:

(n=3)

$$\int_R f = \iiint_R f = \iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R f(\mathbf{x}) dR = \iiint_R f(\mathbf{x}) dV$$

(geral)

$$\int_R f = \int \cdots \int_R f = \int \cdots \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_R f(\mathbf{x}) dR = \int_R f(\mathbf{x}) dV = \dots = \int_R f(\mathbf{x}) dV_n = \int_R f(\mathbf{x}) dx^n$$

6.2 Integrabilidade e Teorema de Fubini em multi-retângulo

Seja $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ um multi-retângulo em \mathbb{R}^n .

Teorema 6.1. *Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então é integrável.*

Teorema 6.2 (Teorema de Fubini). *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e integrável em R .*

- *Se a formula abaixo faz sentido, então é verdadeira:*

$$\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right] dx_1$$

- *O mesmo vale mudando a ordem das integrais à direita (sempre que tudo faça sentido!)*

Corolário 6.3. *Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então a fórmula acima vale (com qualquer ordem das integrais à direita).*

Por exemplo em \mathbb{R}^3 , se $R = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, temos 6 integrais iteradas:

$$\begin{aligned} \iiint_R f dV &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_r^s \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx \\ &= \int_r^s \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_r^s \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_c^d \left(\int_r^s \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dz \right) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy. \end{aligned}$$

7 Propriedades da integral múltipla

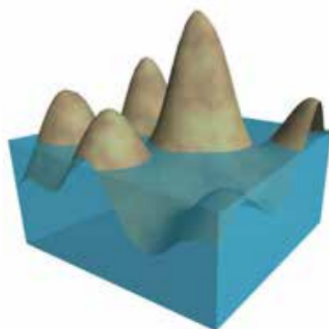
Valem a maioria das propriedades da integral em uma variável:

Sejam $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas e integráveis em R , com $R \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um multi-retângulo. Então

- $\alpha f + \beta g$ é integrável em R e $\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_R f \right) + \beta \left(\int_R g \right)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $|f|$ é integrável em R e $\left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$,
- fg é integrável em R
- $f \geq 0$ em R implica $\int_R f \geq 0$.
- $f \geq g$ em R implica $\int_R f \geq \int_R g$.
- $f = 0$ em R implica $\int_R f = 0$.
- (Teorema Valor Médio) Se f é contínua então existe $\mathbf{x} \in R$ tal que

$$f_{\text{med}} = f(\mathbf{x}) = \frac{\int_R f}{(b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)} \quad (\text{valor médio})$$

$$(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) f_{\text{med}} = \iint_R f$$



[Se $z = f(x, y)$ descreve uma região montanhosa e você corta os topos dos morros na altura f_{med} , então pode usá-los para encher os vales de forma a tornar a região completamente plana.

Figura 6: Stewart, Cálculo, vol. 2. ($n = 2$ e $f \geq 0$)

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 2](#) do prof. Eugenio Massa: 1, 8, 12-a) e 12-c).
- Listas no e-disciplinas: Integral dupla parte 1 (exercício 1).

8 Integral múltipla em conjuntos limitados

8.1 Definição de integral múltipla em conjuntos limitados

Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ limitada, definimos a **integral de f em D** como

$$\int_D f := \int_R F$$

onde:

R é um (multi-)retângulo em \mathbb{R}^n tal que $D \subseteq R$
e

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in D \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin D \end{cases}$$

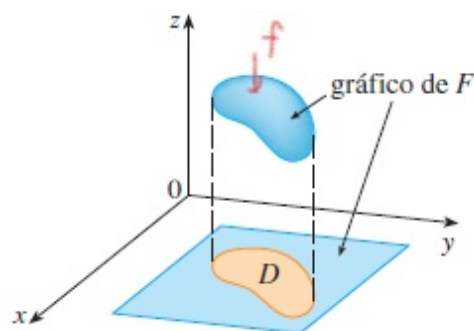


Figura 7: Imagem do Livro Cálculo, vol. 2, James Stewart ($n = 2$), [Geogebra](#)

Quando f é integrável em D e como integrar?

8.2 Medida de Peano-Jordan

Definição: Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado,

- dizemos que D é **mensurável*** (segundo Peano-Jordan) se

$$\int_D 1 \quad \text{existe.}$$

- chamamos **medida*** (de Peano-Jordan) de D (notação $|D|_n$),

$$|D|_n := \int_D 1$$

$$|D|_n = \begin{cases} \text{comprimento} & n = 1 \\ \text{área} & n = 2 \\ \text{volume} & n = 3 \\ \text{medida } n\text{-dimensional} & n \geq 4 \end{cases}$$

- se $R = [a, b] \times [c, d]$ é um retângulo (em \mathbb{R}^2) então $|R|_2 = (b - a)(d - c)$:

$$|R|_2 = \iint_R 1 = \int_a^b \int_c^d 1 dy dx = (b - a)(d - c) = A(R).$$

- se $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ é um multi-retângulo (em \mathbb{R}^n) então $|R|_n = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n)$, no caso $n = 3$:

$$|R|_3 = \iiint_R 1 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} 1 dz dy dx = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) = V(R).$$

- se $R = [a, b]$ é um 1-retângulo (em \mathbb{R}) então $|R|_1 = (b - a)$:

$$|R|_1 = \int_R 1 = \int_a^b 1 dx = (b - a) = C(R).$$

Existem conjuntos que não tem medida* (conjunto não mensurável):

Exemplo: $D = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x, y \in \mathbb{Q}\}$ “não tem área”:

Para qualquer partição de $[0, 1] \times [0, 1] \supset D$, é possível escolher pontos (x_i^*, y_j^*) de forma que:

- $(x_i^*, y_j^*) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e portanto $F(x_i^*, y_j^*) = 1$, o que implica que o limite da soma de Riemann será 1.
- $(x_i^*, y_j^*) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e portanto $F(x_i^*, y_j^*) = 0$, o que implica que o limite da soma de Riemann será 0.

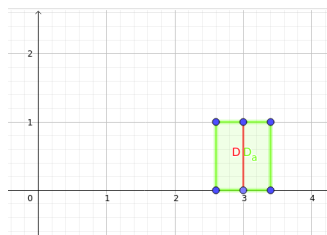
Existem conjuntos de medida* zero:

- Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, $|D|_n = 0$ é equivalente a

$\forall \varepsilon > 0$ existe um número finito de (multi-)retângulos R_1, \dots, R_k em \mathbb{R}^n tais que

$$D \subseteq \bigcup_{i=1}^k R_i \quad e \quad \sum_{i=1}^k |R_i|_n < \varepsilon.$$

Exemplo: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 3, 0 \leq y \leq 1\}$ tem medida* nula:



Tome $\delta > 0$ e $D_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3 - \delta < x < 3 + \delta, 0 \leq y \leq 1\}$.

Claro que $D \subset D_\delta$. Além disso,

$$|D_\delta|_2 = ((3 + \delta) - (3 - \delta))(1 - 0) = 2\delta \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \delta \rightarrow 0.$$

Portanto, $|D|_2 = 0$.

Teorema 8.1. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e ∂D sua fronteira. Então: D é mensurável ($\exists \int_D 1$) se, e só se, $|\partial D|_n = 0$ ($\int_{\partial D} 1 = 0$).*

- **A reunião de um número finito de conjuntos (limitados) de medida* zero, tem medida* zero.**

Exemplos:

- **Estes conjuntos (limitados) em \mathbb{R}^2 têm área zero:**

- gráfico de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ com f integrável.
- traço de curva regular $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

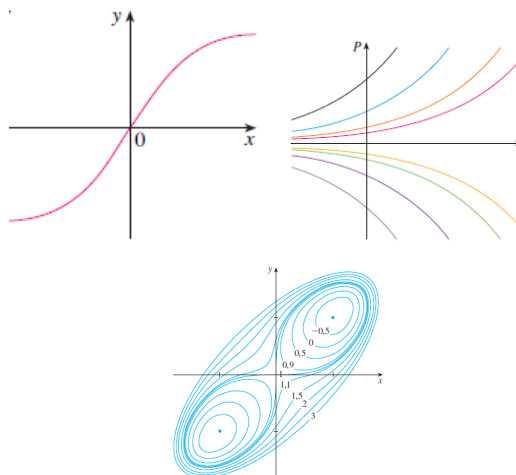


Figura 8: Stewart, Cálculo, vol.2

- **Estes conjuntos (limitados) em \mathbb{R}^3 têm volume zero:**

- gráfico de $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ com f integrável e $C \subseteq \mathbb{R}^2$ limitado e mensurável.
- imagem de $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ com σ “regular” e $D \subseteq \mathbb{R}^1$ ou \mathbb{R}^2 limitado fechado e mensurável (**curvas e superfícies**).

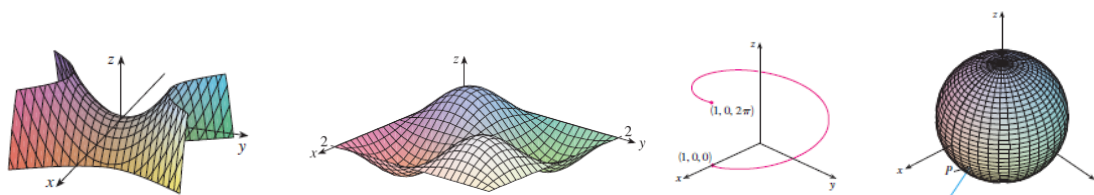


Figura 9: Stewart, Cálculo, vol.2

- **Estes conjuntos (limitados) em \mathbb{R}^n têm medida zero:**

- gráfico de $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ com f integrável e $C \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ limitado e mensurável.
- imagem de $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ com σ “regular” e $D \subseteq \mathbb{R}^k$ ($k < n$) limitado fechado e mensurável.

8.3 Integrabilidade e Teorema de Fubini

Teorema 8.2. *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Se D é mensurável ($|\partial D|_n = 0$) e f é contínua exceto possivelmente em um conjunto de medida* nula, então f é integrável em D .*

Teorema 8.3 (Teorema de Fubini em \mathbb{R}^2).

- *Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ onde $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis.*

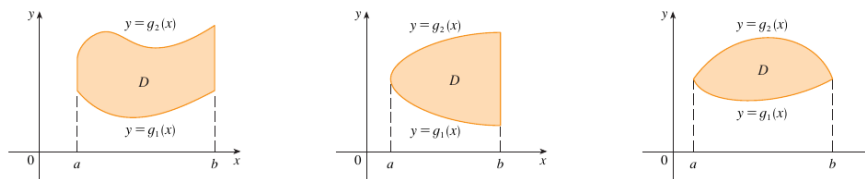


Figura 10: Stewart, Cálculo, vol. 2: Região Tipo 1

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e contínua.

Então f é integrável em D e vale

$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

- *Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ onde $h_{1,2} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis.*

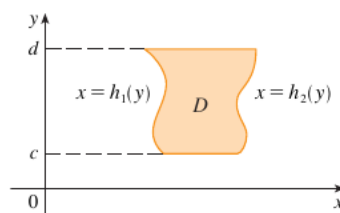


Figura 11: Stewart, Cálculo, vol. 2: Região Tipo 2

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e contínua.

então f é integrável em D e vale

$$\iint_D f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Teorema 8.4 (Teorema de Fubini em \mathbb{R}^3).

- *Seja* $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$ **onde** $u_1, u_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ **são limitadas e integráveis e** $D \subseteq \mathbb{R}^2$ **é limitado e mensurável.**

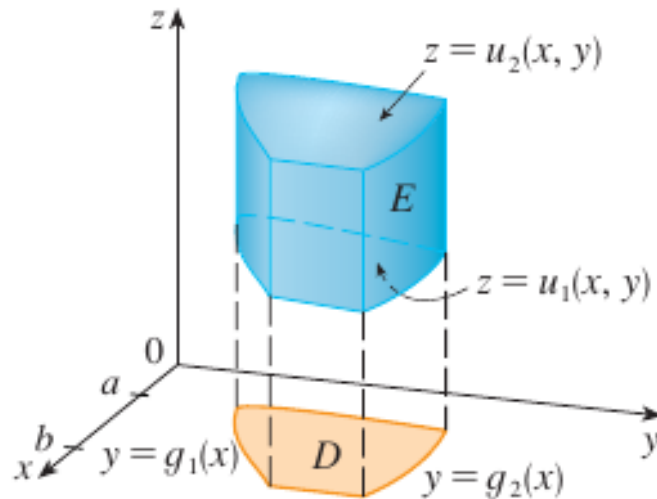


Figura 12: Stewart, Cálculo, vol.2: Região Tipo 1

Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ **limitada e contínua.**

então f **é integrável em** E **e vale**

$$\iiint_E f = \iint_D \left(\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

- Analogamente trocando o papel das variáveis:

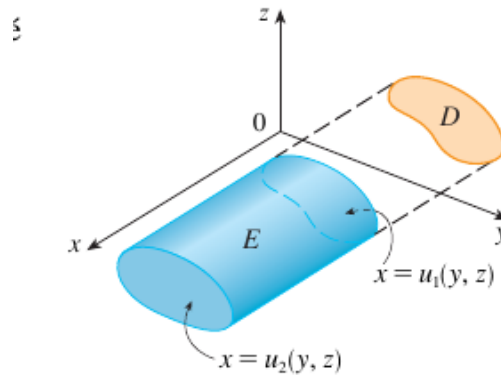


Figura 13: Stewart, Cálculo, vol.2: Região Tipo 2

$$\iiint_E f = \iint_D \left(\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dydz$$

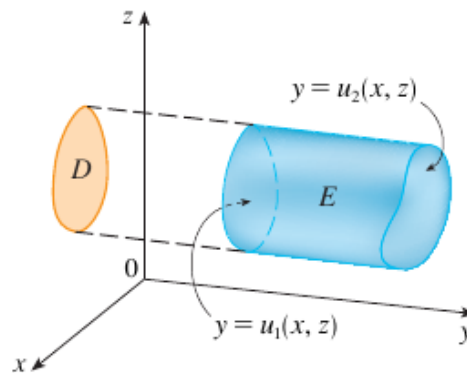


Figura 14: Stewart, Cálculo, vol.2: Região Tipo 3

$$\iiint_E f = \iint_D \left(\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz$$

8.4 Propriedades da integral múltipla

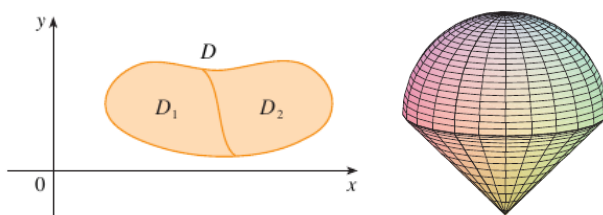
Valem a maioria das propriedades da integral em uma variável:

Sejam $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas e integráveis em D , com $D \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado e mensurável. Então

- $(\inf_D f) |D|_n \leq \int_D f \leq (\sup_D f) |D|_n$
- $\alpha f + \beta g$ é integrável em D e $\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_D f \right) + \beta \left(\int_D g \right)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $|f|$ é integrável e $\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|$,
- fg é integrável
- $f \geq 0$ em D implica $\int_D f \geq 0$.
- $f \geq g$ em D implica $\int_D f \geq \int_D g$.
- $f = 0$ em D implica $\int_D f = 0$.
- se $|D|_n = 0$ então $\int_D f = 0$.
- Se D conexo por caminhos e f contínua então existe $x \in D$ tal que

$$f_{\text{med}} = f(x) = \frac{\int_D f}{|D|_n} \quad (\text{Valor médio})$$

Sejam $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ limitados e mensuráveis com $|D_1 \cap D_2|_n = 0$



- Se f é limitada e integrável em D_1 e em D_2 então é integrável em $D_1 \cup D_2$ e

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f \quad (8.1)$$

- Se f é limitada e integrável em $D_1 \cup D_2$ então é integrável em D_1 e em D_2 e vale (8.1)

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 2](#) do prof. Eugenio Massa: 2, 3^(*), 12-b), 12-d), 13, 15, 16, 17.
- Listas no e-disciplinas: Integral dupla parte 1 (exercício 2), Integral dupla parte 2 (exercícios: 1 e 2) e Integral tripla parte 1 (exercícios: 1 e 2) .

(*) Para o exercício 3: quando f é contínua e D é compacto, então:

$$\inf_D f = \text{mínimo absoluto de } f \text{ em } D$$

e

$$\sup_D f = \text{máximo absoluto de } f \text{ em } D.$$

9 Algumas aplicações

9.1 Volumes e Áreas

Similarmente ao caso de multi-retângulos ([Slide 2](#)):

- Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto mensurável e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ não negativa e contínua exceto possivelmente em um conjunto de medida* zero. Então o **volume da região** $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ é dado por

$$V(\mathbf{B}) = \iint_D f$$

Geogebra

- Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto mensurável e $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas exceto possivelmente em conjuntos de medidas* zero tais que $f \leq g$.

Então o **volume da região**

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \ f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ é dado por

$$V(\mathbf{B}) = \iint_D (g - f)$$

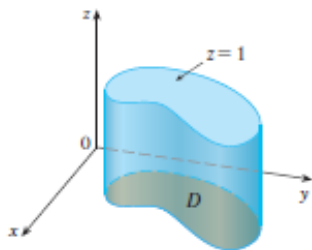


Figura 15: Stewart, Cálculo, vol. 2: cilindro reto com base D e altura 1

- Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto mensurável do plano, então $|D|_2 = A(D) = \iint_D 1$ é a **área de D** .
- Seja $B \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto mensurável do espaço, então $|B|_3 = V(B) = \iiint_B 1$ é o **volume de B** .

9.2 Área de Superfície

Considere $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada de classe $C^1(D)$ onde $D = [a, b] \times [c, d]$ (ou mais genericamente, D limitado e mensurável). Seja S a superfície dada pelo gráfico de f .

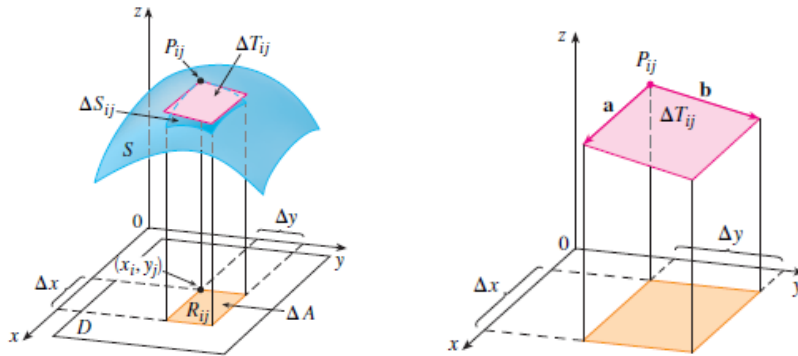


Figura 16: Stewart, Cálculo, vol.2

- $P = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ partição de D :
- $(x_i^*, y_j^*) := (x_{i-1}, y_{j-1}) \in R_{ij}$ o ponto mais próximo da origem
- $P_{ij} = (x_i^*, y_j^*, f(x_i^*, y_j^*))$
- π_{ij} : plano tangente a S no ponto P_{ij} : (ver notas de aula Cálculo 2, Aula 19)

$$z = f(x_i^*, y_j^*) + f_x(x_i^*, y_j^*)(x - x_i^*) + f_y(x_i^*, y_j^*)(y - y_j^*)$$

- π_{ij} restrito a R_{ij} (paralelogramo T_{ij}) $\approx S$ restrita a R_{ij} (S_{ij})
- $\Delta S_{ij} = A(S_{ij}) \approx A(T_{ij}) = \Delta T_{ij} \implies A(S) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A(T_{ij})$

Definição: A área da superfície S é dada por

$$A(S) := \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A(T_{ij}).$$

quando o limite existe.

- ★ Cálculo da área do paralelogramo T_{ij} : $A(T_{ij}) = ?$

Se

$$Q_{ij} := (x_i, y_j^*, f(x_i^*, y_j^*) - f_x(x_i^*, y_j^*)\Delta_i x)$$

e

$$\tilde{Q}_{ij} := (x_i^*, y_j, f(x_i^*, y_j^*) - f_y(x_i^*, y_j^*)\Delta_j y),$$

então

$$A(T_{ij}) = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|,$$

onde

- $\mathbf{a} := \overrightarrow{P_{ij}Q_{ij}} = (\Delta_i x, 0, f_x(x_i^*, y_j^*)\Delta_i x)$

- $\mathbf{b} := \overrightarrow{P_{ij}\tilde{Q}_{ij}} = (0, \Delta_j y, f_y(x_i^*, y_j^*)\Delta_j y)$

- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (-f_x(x_i^*, y_j^*), -f_y(x_i^*, y_j^*), 1)\Delta_i x \Delta_j y$

-

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \sqrt{f_x^2(x_i^*, y_j^*) + f_y^2(x_i^*, y_j^*) + 1} \Delta_i x \Delta_j y$$

- $A(S) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sqrt{f_x^2(x_i^*, y_j^*) + f_y^2(x_i^*, y_j^*) + 1} \Delta_i x \Delta_j y$

Portanto,

$$\mathbf{A}(S) = \iint_D \sqrt{\mathbf{f}_x^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{f}_y^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 1} \, d\mathbf{A}.$$

9.3 Cálculo das propriedades inerciais de um corpo

Seja $B \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto mensurável que representa um corpo e $\rho : B \rightarrow \mathbb{R}$ com conjunto de descontinuidade de medida* zero que representa a sua densidade.

- a **massa do corpo** B é dada por $M_B = \iiint_B \rho$
- cada coordenada x_i^G do **centro de gravidade**, $\mathbf{x}^G = (x_1^G, x_2^G, x_3^G)$, do corpo B é dada por

$$x_i^G = \frac{1}{M_B} \iiint_B x_i \rho(x_1, x_2, x_3) dV, \quad i = 1, 2, 3.$$

- o **momento de inércia com respeito a um eixo** ψ é dado por

$$I_\psi = \iiint_B d_\psi(\mathbf{x})^2 \rho(\mathbf{x}) dV,$$

onde $d_\psi(\mathbf{x})$ é a distância do ponto $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao eixo ψ .

Em particular, os momentos de inércia em relação aos três eixos coordenados são:

$$I_{\hat{x}} = \iiint_B (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_{\hat{y}} = \iiint_B (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$I_{\hat{z}} = \iiint_B (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 2](#) do prof. Eugenio Massa: 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 18.
- Listas no e-disciplinas: Integral dupla parte 1 (exercício 3), Integral dupla parte 2 (exercícios: 3 e 4) e Integral tripla parte 1 (exercícios: 3 e 4).

10 Mudança de variável em integral múltipla

10.1 Motivação: caso $n = 2$

Sejam

- $T : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto,
 T de classe $C^1(A)$, **injetora e tal que $\det(J_T) \neq 0$ em A** (ver Slide 1),
- $S \subset \mathbb{R}^2$ **limitado** tal que $S \cup \partial S \subseteq A$,
- $f : T(S) \rightarrow \mathbb{R}$ **contínua**.

Então

- S é mensurável se e só se $T(S) = R$ é mensurável,

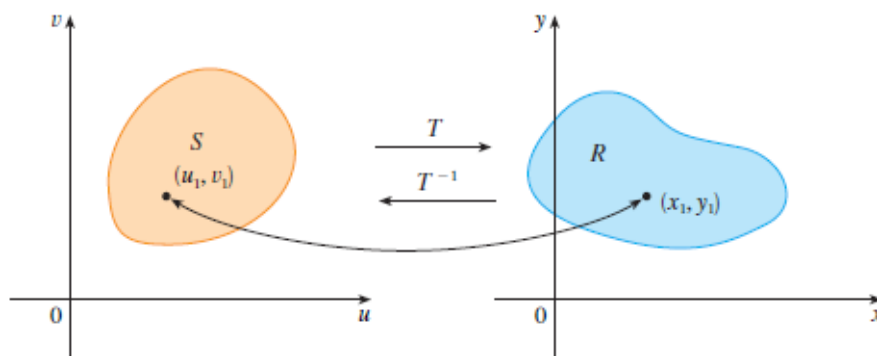


Figura 17: Stewart. Cálculo, vol. 2

$$T(u, v) = (x, y) \in R, \quad \forall (u, v) \in S; \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

Como calcular $\iint_R f$ usando a transformação T ?

$$\iint_{T(S)} f = ??$$

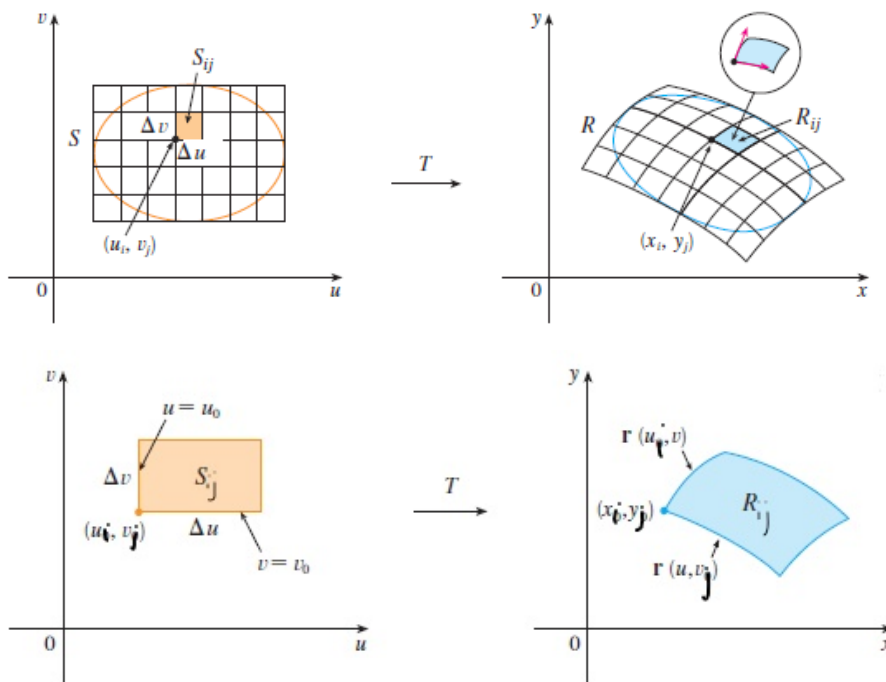


Figura 18: Stewart, Cálculo, vol. 2

- $P = \{S_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ partição de S
- $(u_i^*, v_j^*) = (u_{i-1}, v_{j-1}) \in S_{ij}$ o ponto mais próximo da origem
- $R_{ij} = T(S_{ij}), \quad T(u_i^*, v_j^*) = (x_i^*, y_j^*)$
-

$$\begin{aligned}
 \iint_R f &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(x_i^*, y_j^*) A(R_{ij}) \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F(T(u_i^*, v_j^*)) A(T(S_{ij})) \\
 &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(T(u_i^*, v_j^*)) A(T(S_{ij})) \\
 &\quad (x_i^*, y_j^*) \in R
 \end{aligned}$$

- $A(R_{ij}) = A(T(S_{ij})) = ??$

A seguir, vamos considerar apenas o caso em que os retângulos S_{ij} (resp. $T(S_{ij}) = R_{ij}$) estão totalmente contidos em S (resp. R).

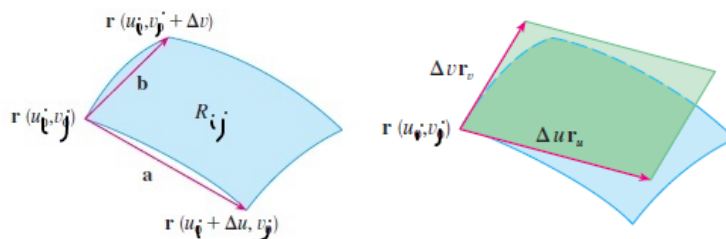


Figura 19: Stewart, Cálculo, vol. 2

- $r(u, v) = T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$
- Existem $\tilde{u}_i^* \in [u_i^*, u_i^* + \Delta_i u]$ e $\tilde{v}_j^* \in [v_j^*, v_j^* + \Delta_j v]$

$$\mathbf{a} := T(u_i^* + \Delta_i u, v_j^*) - T(u_i^*, v_j^*) \stackrel{TVM}{=} T_u(\tilde{u}_i^*, v_j^*) \Delta_i u \approx T_u(u_i^*, v_j^*) \Delta_i u := \mathbf{a}_1,$$

$$\mathbf{b} := T(u_i^*, v_j^* + \Delta_j v) - T(u_i^*, v_j^*) \stackrel{TVM}{=} T_v(u_i^*, \tilde{v}_j^*) \Delta_j v \approx T_v(u_i^*, v_j^*) \Delta_j v := \mathbf{b}_1$$
- π_{ij} : paralelogramo formado pelos vetores \mathbf{a}_1 e \mathbf{b}_1
- $A(R_{ij}) \approx A(\pi_{ij}) = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{b}_1\| = \|T_u(u_i^*, v_j^*) \wedge T_v(u_i^*, v_j^*)\| \Delta_i u \Delta_j v$
- $T_u(u_i^*, v_j^*) \wedge T_v(u_i^*, v_j^*) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_u(u_i^*, v_j^*) & y_u(u_i^*, v_j^*) & 0 \\ x_v(u_i^*, v_j^*) & y_v(u_i^*, v_j^*) & 0 \end{vmatrix} = \det(J_T(u_i^*, v_j^*)) \hat{k}$

Portanto,

$$\|T_u(u_i^*, v_j^*) \wedge T_v(u_i^*, v_j^*)\| = |\det(J_T(u_i^*, v_j^*))|$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{T(S)} f &= \iint_R f = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(T(u_i^*, v_j^*)) A(R_{ij}) \\ &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(T(u_i^*, v_j^*)) |\det(J_T(u_i^*, v_j^*))| \Delta_i u \Delta_j v \\ &= \iint_S f(T(u, v)) |\det(J_T(u, v))| du dv \end{aligned}$$

10.2 Caso geral

Sejam

- $T : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto,
 T de classe $C^1(A)$, injetora e tal que $\det(J_T) \neq 0$ em A ,
- B limitado tal que $\bar{B} \subseteq A$,
- $f : T(B) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

Então

- B é mensurável se e só se $T(B)$ é mensurável,

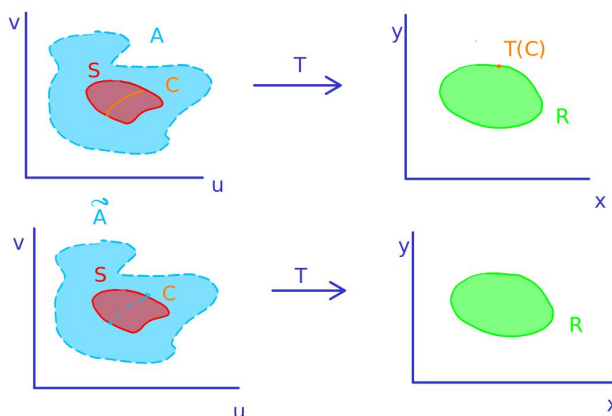
$$\int_{T(B)} f = \int_B f \circ T |\det(J_T)|$$

isto é,

$$\int_{T(B)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_B f(T(u_1, \dots, u_n)) |\det(J_T(u_1, \dots, u_n))| du_1 \dots du_n.$$

NOTA:

Se $\tilde{A} = A \setminus C$ onde $|C|_n = 0$ e $T|_{\tilde{A}}$ é injetora e tal que $\det(J_T)|_{\tilde{A}} \neq 0$, então as afirmações acima continuam verdadeiras.



10.3 Exemplos importantes

Calcular

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dx dy \quad \text{onde } R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Se $T(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ e $S = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ então $T(S) = R$.

NOTA:

- T não é injetora pois $T(\cdot, 0) = T(\cdot, 2\pi)$ e $T(0, \cdot) = (0, 0)$,
- $r = \det(J_T) = 0$ para $r = 0$,

porém

- **em $\tilde{S} = (0, 1] \times [0, 2\pi)$ é injetora e $\det(J_T) \neq 0$,**
- vale para $C := S \setminus \tilde{S}$: $|C|_2 = 0$.

Logo podemos aplicar a fórmula:

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dx dy = \iint_S e^{r^2} r dr d\theta = \dots = \pi(e - 1).$$

Calcular

$$\iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz \quad \text{onde } R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Se $T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$
e $S = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ então $T(S) = R$.

NOTA:

- T não é injetora pois
 $T(\rho, 0, \varphi) = T(\rho, 2\pi, \varphi)$,
 $T(\rho, \theta_1, 0) = T(\rho, \theta_2, 0)$
 $T(\rho, \theta_1, \pi) = T(\rho, \theta_2, \pi)$ e
 $T(0, \cdot, \cdot) = (0, 0, 0)$,
- $-\rho^2 \sin(\varphi) = \det(J_T) = 0$ para $\rho = 0$ e para $\varphi = 0, \pi$,

porém

- **em $\tilde{S} = (0, 1] \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ é injetora e $\det(J_T) \neq 0$,**
- vale para $C := S \setminus \tilde{S}$: $|C|_3 = 0$.

Logo podemos aplicar a fórmula:

$$\iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz = \iiint_S e^{\rho^3} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \dots = \frac{4}{3}\pi(e - 1).$$

Fórmula geral coordenadas polares

$$\iint_B f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, r \, dr \, d\theta$$

onde B é o conjunto descrito em coord. cartesianas e D em coord. polares

Fórmula geral coordenadas cilíndricas

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_D f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \tau) \, r \, dr \, d\theta \, d\tau$$

onde B é o conjunto descrito em coord. cartesianas e D em coord. cilíndricas

Fórmula geral coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_D f(\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi)) \, \rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$

onde B é o conjunto descrito em coord. cartesianas e D em coord. esféricas

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 3](#) do prof. Eugenio Massa.
 - Listas no e-disciplinas: Integral dupla parte 3 e Integral tripla parte 2.
-

Alguns sites que calculam integrais:

[Integral Calculator](#)

[Wolfram Alpha](#)

11 Recordação: curvas

Definição

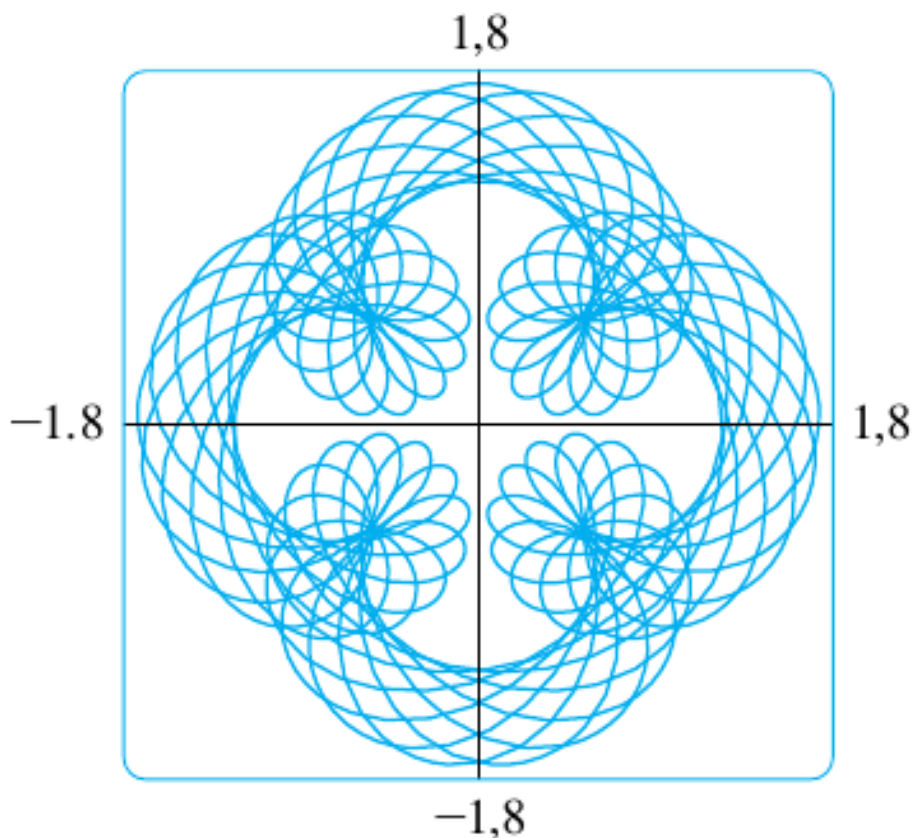
Chamamos **Curva em \mathbb{R}^n** : uma função contínua $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é intervalo. Definimos:

- **Traço da curva**: a imagem
- **equação paramétrica/vetorial da curva**: a lei $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$
- Dizemos que a curva é **simples** se γ é injetora.
- Dizemos que a curva é **fechada** se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Dizemos que a curva é **fechada simples** se fechada e $\gamma|_{[a,b]}$ injetora.
- Dizemos que a curva é *derivável* se γ é derivável

Seja $p \in I$. Se γ é derivável em p e $\gamma'(p) \neq 0$ então

- $\gamma'(p)$ é um **vetor tangente ao traço**, no ponto $\gamma(p)$
- $\widehat{\mathbf{t}}(p) = \gamma'(p) / \|\gamma'(p)\|$ é um **vetor unitário tangente ao traço**, no ponto $\gamma(p)$.
- assim, o traço da curva (reta) $\mathbf{r}(t) = \gamma(p) + \widehat{\mathbf{t}}(p)t$ é uma **reta tangente ao traço de γ** no ponto $\gamma(p)$.
- Dizemos que a curva é **regular** se γ é derivável e $\gamma' \neq 0$ em todo I : logo o traço possui reta tangente em todo ponto.

- *Interpretação cinemática*: $\gamma(t)$ pode representar o movimento de um corpo em \mathbb{R}^n : t representa o tempo e $\gamma(t)$ a posição. Neste caso γ' é a velocidade vetorial, γ'' é a aceleração vetorial.
- Dizemos que a curva é **parametrizada pelo comprimento de arco** quando $\|\gamma'\| = 1$ em todo ponto (traço percorrido com velocidade 1).

**FIGURA 12**

$$x = \sin t + \frac{1}{2} \sin 5t + \frac{1}{4} \cos 2,3t$$

$$y = \cos t + \frac{1}{2} \cos 5t + \frac{1}{4} \sin 2,3t$$

Figura 20: Stewart, Cálculo, vol.2: curva regular, não parametrizada pelo comprimento de arco, não simples e não fechada

12 Integral de linha de função escalar

Sejam

- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma **função** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ uma **curva regular e com derivada contínua**.
- $C =$ traço de γ

Queremos definir a **integral de f ao longo de γ** .

12.1 Integral de linha com respeito ao comprimento de arco

***** **Motivação (caso $n = 2$):**

Se $f \geq 0$, qual área da superfície vertical S que está acima de C , entre o plano xy e o gráfico de f ?

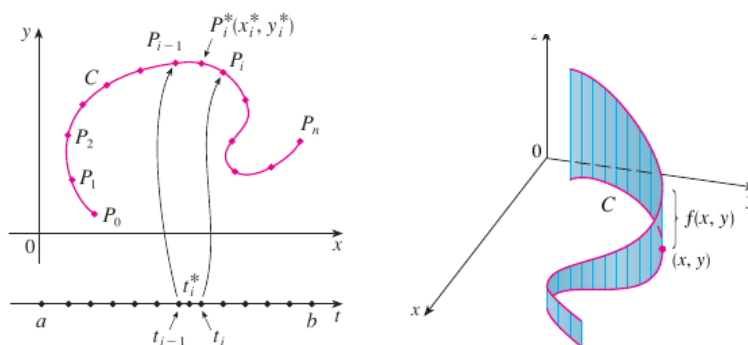


Figura 21: Stewart, Cálculo, vol. 2: partição da curva e superfície S

- $P = \{t_0, \dots, t_n : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$:
- $\{P_i := \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i)) : i = 0, \dots, n\}$ partição de C
- $\Delta_i s =$ comprimento do subarco $\widehat{P_{i-1}P_i}$
- $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]; \quad P_i^* = (x(t_i^*), y(t_i^*)) = \gamma(t_i^*)$
- $A(S) \approx \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i^*)) \Delta_i s$

Como calcular o comprimento de subarco?

Note

- $\Delta_i s \approx |\overline{P_{i-1}P_i}|$

-

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$\stackrel{TVM}{\underset{t_i^{**}, t_i^{***} \in (t_{i-1}, t_i)}{=}} \sqrt{(x'(t_i^{**})\Delta_i t)^2 + (y'(t_i^{***})\Delta_i t)^2}$$

$$= \sqrt{(x'(t_i^{**}))^2 + (y'(t_i^{***}))^2} \Delta_i t$$

-

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i^*)) \Delta_i s \approx \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i^{**})) \sqrt{(x'(t_i^{**}))^2 + (y'(t_i^{***}))^2} \Delta_i t$$

$$\stackrel{t_i^{**}, t_i^{***} \approx t_i^*}{\approx} \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i^*)) \sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^*))^2} \Delta_i t$$

Definição: A integral de linha de f sobre γ com respeito ao comprimento de arco é dada por

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \, ds = \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(\mathbf{t})) \|\gamma'(\mathbf{t})\| \, dt$$

OBS: a integral acima não depende da parametrização da curva quando a reparametrização é bijetora, isto é:

Se $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow A$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow A$ são duas curvas com mesmo traço tais que

(R-C) existe uma função $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ (bijetora) de classe C^1 com $g' > 0$: γ_1 e γ_2 mesma orientação (ou $g' < 0$: γ_1 e γ_2 orientação contrária) em (c, d) e $\gamma_2(u) = \gamma_1(g(u))$,

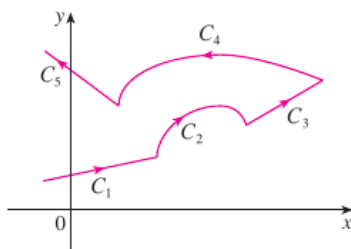
então

$$\int_{\gamma_1} f \, ds = \int_{\gamma_2} f \, ds.$$

OBS: se γ é parametrizada pelo comprimento de arco então

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) dt.$$

OBS: se γ é apenas regular por partes podemos somar em cada parte:



Suponha agora que C seja uma **curva suave por partes**; ou seja, C é a união de um número finito de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n onde, como ilustrado na Figura 4, o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto final de C_i . Nesse caso, definimos a integral de f ao longo de C como a soma das integrais de f ao longo de cada parte suave de C :

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

Figura 22: Stewart, Cálculo, vol. 2

Interpretação geométrica:

- para $n \geq 2$,

$$\int_{\gamma} 1 ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

é o **comprimento do traço de γ** .

- se $n = 2$, $f \geq 0$,

$$\int_{\gamma} f ds$$

é a **área da superfície vertical** que está acima do traço de γ , entre o plano xy e o gráfico de f .

12.2 Integral de linha com respeito a x_i

Sejam

- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma **função** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ uma **curva regular e com derivada contínua**
equações paramétricas de $\gamma : x_i = x_i(t), i = 1, \dots, n$

Nos estudos de integral de linha para **campos vetoriais** será conveniente usar as seguintes integrais de linha: **a integral de linha de f sobre γ com respeito a x_i** é dada por

$$\int_{\gamma} f dx_i := \int_a^b f(\gamma(t))x'_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n.$$

OBS: a integral acima não depende da parametrização da curva quando a reparametrização é bijetora, **exceto pela orientação**, que muda o sinal da integral, isto é:

Se γ_1 e γ_2 são duas curvas com mesmo como em (R-C) tais que:

- possuem a mesma orientação, então $\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$
- possuem orientação contrária, então $\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = - \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$

Notação: para $n = 2, 3$,

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy := \int_{\gamma} Pdx + \int_{\gamma} Qdy$$

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz := \int_{\gamma} Pdx + \int_{\gamma} Qdy + \int_{\gamma} Rdz$$

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 4](#) do prof. Eugenio Massa: 1, 4, 5, 6, 7, 8.
- Listas no e-disciplinas: Integral de Linha de uma Função Escalar

13 Integral de linha de campo vetorial

13.1 Campo Vetorial

$F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um **campo vetorial (c.v.)** com domínio A

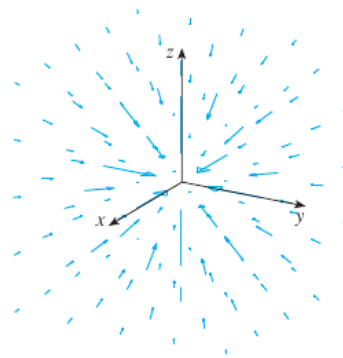
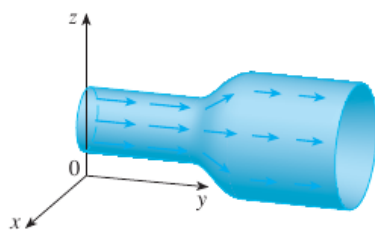
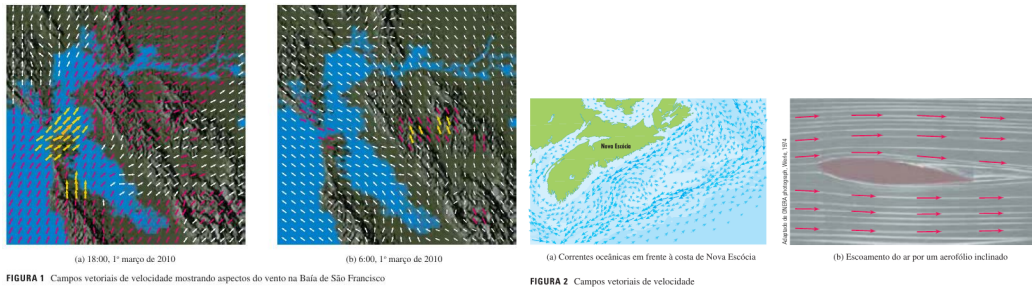


Figura 23: Stewart, Cálculo, vol. 2: Campos de velocidade: aspecto do vento, correntes oceânicas, escoamento do ar e do fluido, campo de força gravitacional

Exemplos:

1. $F(x, y) = (-y, x) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ é um c.v. em \mathbb{R}^2
2. $F(x, y, z) = (0, 0, z) = z\vec{k}$ é um c.v. em \mathbb{R}^3

13.2 Integral de linha de c.v.

Sejam

- $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um **campo vetorial (c.v.)** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ uma **curva regular e com derivada contínua**,

Queremos definir a **integral do c.v. F ao longo de γ**

******* Motivação (caso $n = 2$ ou $n = 3$):**

Se F representa um campo de forças e γ o caminho que uma partícula percorre, qual o trabalho τ realizado por F para mover a partícula de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$?

- Se F é constante e γ um segmento retilíneo: $\tau = F \cdot \underbrace{(\gamma(b) - \gamma(a))}_{\text{deslocamento}}$

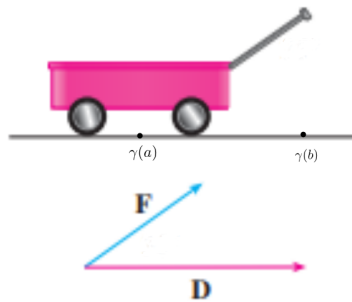


Figura 24: Stewart, Cálculo, vol.2

- Caso geral: F não constante, γ não retilíneo

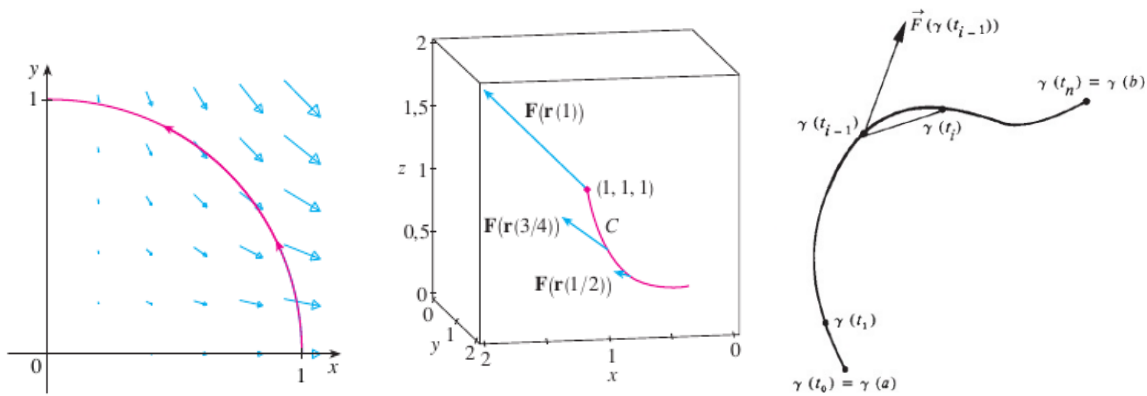


Figura 25: Stewart, Cálculo, vol. 2 e Guidorizzi, vol. 3

- $P = \{t_0, \dots, t_n : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ partição de $[a, b]$:
- $\{P_i := \gamma(t_i) : i = 0, \dots, n\}$ partição do traço C de γ
- $\Delta_i s \approx |\overline{P_{i-1}P_i}|$
-

$$\tau \approx \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

$$\stackrel{TVM}{=} \sum_{\substack{t_i^* \in (t_{i-1}, t_i) \\ t_i^* \approx t_{i-1}}}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_i^*) \Delta_i t$$

$$\approx \sum_{i=1}^n F(\gamma(t_{i-1})) \cdot \gamma'(t_{i-1}) \Delta_i t$$

-

$$\tau = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Definição: A integral de linha do c.v. F sobre γ é dada por

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

OBS: não depende da parametrização da curva **exceto pela orientação**, que muda o sinal da integral!!!

Se γ_1 e γ_2 são curvas com mesmo traço como em (R-C) (Slide 7) tais que:

- possuem a mesma orientação, então $\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$
- possuem orientação contrária, então $\int_{\gamma_1} F \cdot d\gamma_1 = - \int_{\gamma_2} F \cdot d\gamma_2$

Outras notações:

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\gamma} F \cdot dr \quad (\text{onde } r(t) = \gamma(t))$$

Outras fórmulas:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot ds &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \left[F(\gamma(t)) \cdot \widehat{\mathbf{t}}(t) \right] \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_{\gamma} \left[F \cdot \widehat{\mathbf{t}} \right] ds \\ &\stackrel{F=(F_1, \dots, F_n)}{\stackrel{\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}{=}} \int_a^b \left[F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t) \right] dt \\ &\stackrel{x_i=\gamma_i(t)}{=} \int_{\gamma} F_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + F_n(x_1, \dots, x_n) dx_n \end{aligned}$$

$$n = 2: F = (P, Q)$$

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\gamma} [F \cdot \hat{\mathbf{t}}] ds = \int_{\gamma} Pdx + Qdy$$

$$n = 3: F = (P, Q, R)$$

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\gamma} [F \cdot \hat{\mathbf{t}}] ds = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

Interpretação física:

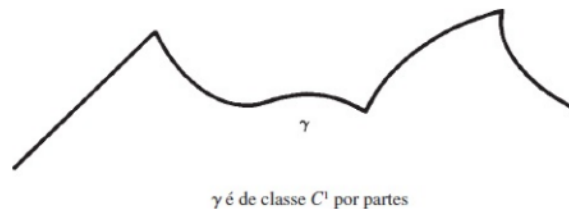
- Se F é um campo de forças, então

$$\int_{\gamma} F \cdot ds$$

(integral de linha com relação ao comprimento de arco da componente tangencial da força)

é o **trabalho feito pelo campo** F sobre uma partícula que percorre o traço de γ .

Uma curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se diz de classe C^1 por partes se for contínua e se existirem uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e curvas $\gamma_i: [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$ de classe C^1 , tais que, para todo t em $]t_{i-1}, t_i[$, $\gamma(t) = \gamma_i(t)$:



Seja \vec{F} um campo vetorial contínuo no aberto Ω de \mathbb{R}^n e seja $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva de classe C^1 por partes; definimos

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\gamma_2 + \dots + \int_{\gamma_n} \vec{F} \cdot d\gamma_n.$$

Figura 26: Guidorizzi, Um curso de cálculo, vol. 3

Exemplos: Calcule $\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$ onde

1. $F(x, y) = (y^2, x)$,

(a) o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Resp.: $-\frac{5}{6}$)

(b) o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Resp.: $\frac{245}{6}$)

2. $F(x, y) = (y, x)$ e γ dos itens (a) e (b) anteriores. (Resp.: -15)

13.3 Fluxo de um campo vetorial através de uma curva

Para o **caso** $n = 2$, sejam ainda

- $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ um **campo vetorial** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ uma **curva regular e com derivada contínua**,

Definição: O **fluxo do campo vetorial F através da curva γ**

$$\int_{\gamma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] ds := \int_a^b [F(\gamma(t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)] \|\gamma'(t)\| dt$$

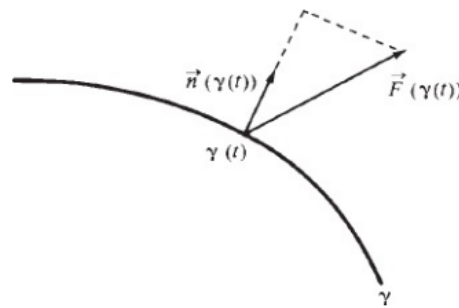


Figura 27: Guidorizzi, Um curso de cálculo, vol. 3

OBS: não depende da parametrização da curva (pelo menos se a reparametrização é bijetora) mas **depende da escolha do sentido do vetor normal unitário $\hat{\mathbf{n}}$** :

Lembrete: em \mathbb{R}^2 vale $\hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{t}} \iff \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$.

Se $\hat{\mathbf{t}} = (a, b)$ é versor tangente, então $\hat{\mathbf{n}}_1 = (b, -a)$ e $\hat{\mathbf{n}}_2 = -(b, -a)$ são versores normais.

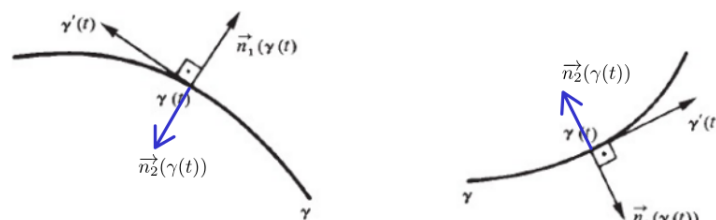


Figura 28: Guidorizzi, Um curso de cálculo, vol. 3

Outras fórmulas:

Se $F = (P, Q)$ e $\gamma(t) = (\overbrace{\gamma_1(t)}^x, \overbrace{\gamma_2(t)}^y)$, então

$$\hat{\mathbf{t}}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)), \quad \hat{\mathbf{n}}(t) = \pm \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] ds &= \int_a^b [F(\gamma(t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)] \|\gamma'(t)\| dt \\ &= (\pm) \int_a^b [P(\gamma(t))\gamma'_2(t) - Q(\gamma(t))\gamma'_1(t)] dt \\ &= (\pm) \int_{\gamma} P(x, y)dy - Q(x, y)dx \end{aligned}$$

Interpretação física:

- Se F é a velocidade de um escoamento plano

$$\int_{\gamma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] ds$$

(integral de linha com relação ao comprimento de arco da componente normal da força)

é o **fluxo de fluido** através do traço de γ (“área” de fluido por unidade de tempo).

Quando a curva γ é fechada costuma-se usar o símbolo \oint_{γ} , e se orientada no sentido anti-horário: \oint_{γ}

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 4](#) do prof. Eugenio Massa: 2, 3, 9 a 20.
- Listas no e-disciplinas: Integral de Linha de um Campo Vetorial Parte I

14 Campos conservativos

Definição Dado um campo vetorial $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dizemos que **a integral de linha de F é independente do caminho** se:

dados $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in A$, $\int_{\gamma} F \cdot ds$ é o mesmo valor
para qualquer curva $\gamma \subseteq A$ que vai de \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 .

Neste caso pode-se usar a notação $\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} F \cdot ds$

Nota. A integral de linha de F é independente do caminho em $A \iff$

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = 0 \text{ para toda curva } \gamma \subseteq A \text{ fechada} \quad \left(\oint_{\gamma} F \cdot ds = 0 \right).$$

De fato,

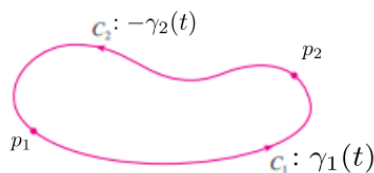


Figura 29: Stewart, Cálculo, vol. 2

(\implies): Sejam γ fechada em A , $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ em γ tome γ_1 e γ_2 de \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 tais que $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$. Então,

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{-\gamma_2} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds = 0$$

(\impliedby): Sejam γ_1 e γ_2 de \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 e tome $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$ que é fechada. Então,

$$0 = \int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{-\gamma_2} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds$$

PROBLEMA: verificar infinitas integrais de linha não é muito bom!

Lembrete: TFC ($n = 1$): Se $F : A = [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tem primitiva φ , isto é, $F = \varphi'$ em (a, b) , então

$$\int_a^b F = \varphi(b) - \varphi(a).$$

.....

Sejam $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ tal que $\gamma(a) = \mathbf{p}_1$ e $\gamma(b) = \mathbf{p}_2$.

Se $F = \varphi' = \nabla\varphi$ em A , então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\gamma} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Regra Cadeia}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi(\gamma(t))) dt \\ &\stackrel{\text{TFC}}{=} \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \\ &= \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}_1). \end{aligned}$$

.....

Teorema 14.1 (Teorema Fundamental para integrais de linha).

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um c.v. contínuo. Se existir

$$\varphi : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad F = \nabla\varphi \text{ em } A$$

então

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}_1),$$

para qualquer curva $\gamma \subseteq A$ que vai de \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 .

Consequentemente, a integral de linha de F é independente do caminho.

Definição Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um c.v. contínuo. Dizemos que F é **conservativo (c.v.c.) em A** quando existe $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F = \nabla\varphi \quad \text{em } A.$$

A função φ é dita **potencial de F** (ou primitiva de F) em A .

Observação. Se φ é potencial de F , então $\varphi + c$ também é, $\forall c \in \mathbb{R}$.

Nota. O Teorema 14.1 pode ser reescrito como:

F é um **c.v.c. em um aberto A** \implies **a integral de linha de F é independente do caminho em A .**

Observação. **Quando um c.v. contínuo é conservativo??**

- Para $n = 1$, toda função contínua F tem primitiva (potencial): basta considerar

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x F(t) dt \quad (x_0 \text{ fixo}).$$

- Para $n > 1$, toda função contínua F tem potencial?

Exemplos. Considere $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $a > 0$.

1. $F(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{j}$ possui função potencial em A ??
2. $F(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{j}$ possui função potencial em A ??

Se consideramos $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, quanto vale $\int_{\gamma} F \cdot ds$??

Para $n > 1$, como saber quando existe uma função potencial para um campo vetorial?

Para $n > 1$, uma função potencial para um campo vetorial tem forma similar ao caso $n = 1$?

Geogebra Wolfram

Definição Um subconjunto A de \mathbb{R}^n é **conexo por caminhos** quando quaisquer dois pontos de A podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em A .

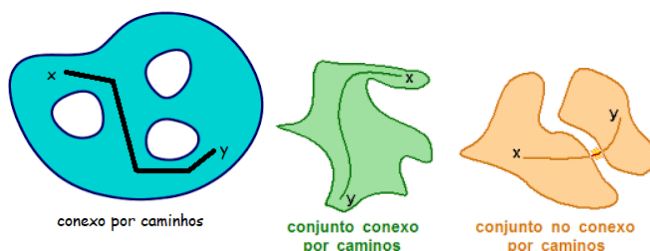


Figura 30: Figuras da internet

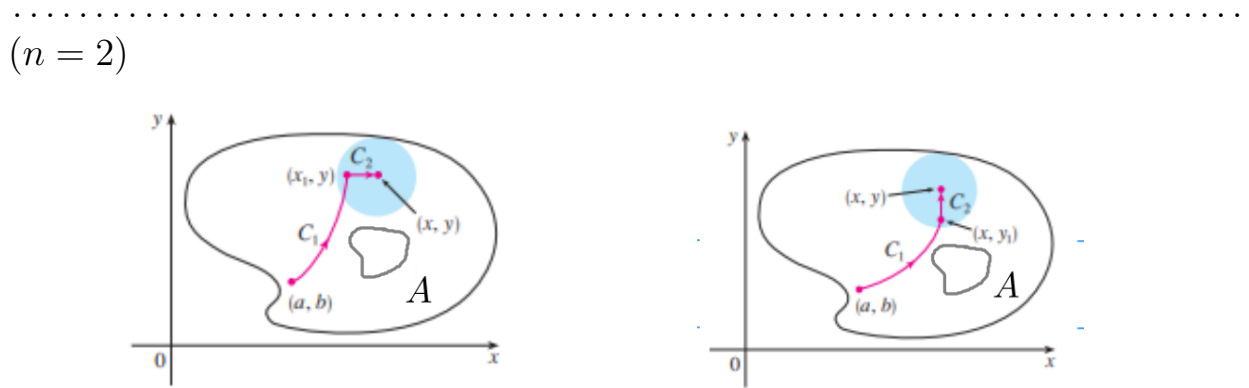
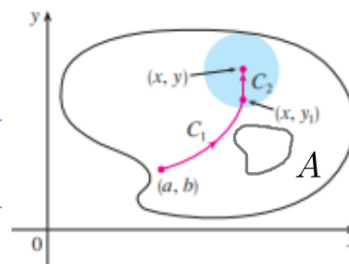
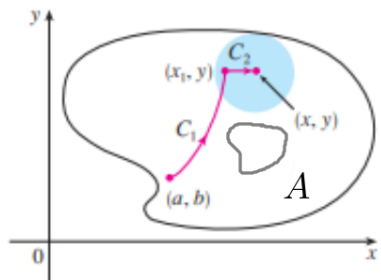


Figura 31: Stewart, Cálculo, vol. 2

- A conexo por caminhos
- $\mathbf{p}_0 = (a, b) \in A$ fixo
- Para cada $\mathbf{p} = (x, y) \in A$, a função abaixo está bem definida **se a integral de linha de F é independente do caminho**

$$\varphi(x, y) := \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} F \cdot ds$$

- **queremos calcular o gradiente de φ : $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$**
- A aberto \implies existe uma bola aberta B de centro \mathbf{p} contida em A
- tome $x_1 < x$ tal que $(x_1, y) \in B$ (tome $y_1 < y$ tal que $(x, y_1) \in B$)



- C_1 : caminho de \mathbf{p}_0 a (x_1, y) (C_1 : caminho de \mathbf{p}_0 a (x, y_1))
- C_2 : segmento de (x_1, y) a \mathbf{p} (C_2 : segmento de (x, y_1) a \mathbf{p})

- $\varphi(x, y) = \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds$

- $\int_{C_1} F \cdot ds$ não depende de x $\left(\int_{C_1} F \cdot ds \text{ não depende de } y \right)$

- $\varphi_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} F \cdot ds$ $\left(\varphi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} F \cdot ds \right)$

- $F = (P, Q)$

- $C_2 : \gamma(t) = (t, y), \quad t \in [x_1, x]$ ($C_2 : \gamma(t) = (x, t), \quad t \in [y_1, y]$)

- $$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} F \cdot ds \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_1}^x [P(t, y)1 + Q(t, y)0] dt \right) \\ &= P(x, y) \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} \varphi_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} F \cdot ds \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_1}^y [P(x, t)0 + Q(x, t)1] dt \right) \\ &= Q(x, y) \end{aligned} \right)$$

- $\nabla\varphi(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})$ para $\mathbf{p} \in A$
- φ é função potencial de F em A
- F é conservativo em A

.....

Teorema 14.2. *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto conexo por caminhos e $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um c.v. contínuo. Se*

a integral de linha de F é independente do caminho em A , então uma função potencial φ de F é

$$\varphi(\mathbf{p}) := \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad \mathbf{p} \in A,$$

onde $\mathbf{p}_0 \in A$ é um ponto fixado.

Consequentemente, F é conservativo em A .

Além disso, se ψ é outra função potencial de F , então $\varphi - \psi = \text{const.}$

Nota. • *F é um c.v.c. em um aberto $A \implies$ a integral de linha de F é independente do caminho em A .*

• *F é um c.v.c. em um aberto conexo por caminhos $A \iff$ a integral de linha de F é independente do caminho em A .*

PROBLEMA: ainda precisamos verificar infinitas integrais de linha para saber se é conservativo!!



Queremos condição mais simples que permita concluir que um c.v. é conservativo!!



Observação. Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um c.v. contínuo com derivadas contínuas em um conjunto aberto $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$.

Se $F = \nabla\varphi$ em A (ou seja, F é c.v.c. em A), então

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \stackrel{\text{T.Schwarz}}{\underset{\text{Calculo2}}{=}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i},$$

para todo $i \neq j, i, j = 1, \dots, n$. Em particular,

- $n = 2$: $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

- $n = 3$: $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Lembrando: O **rotacional** de $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é:

$$\text{rot}F := \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\text{Se } n = 2, \text{ rot}F := \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}.$$

Nota. Nos casos $n = 2$ ou $n = 3$, podemos reescrever a Observação anterior como:

Se F é um c.v.c. de classe C^1 em A , então $\text{rot}F = \vec{0}$ em A .

Continuamos na próxima aula!!

15 Campos conservativos: recordação

Seja $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um c.v. contínuo.

F é conservativo (c.v.c.) em $A \subseteq \mathbb{R}^n$ quando existe $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F = \nabla\varphi \quad \text{em } A.$$

Nota.

integral de linha de F é independente do caminho em $A \iff$

$$\int_{\gamma} F \cdot ds = 0 \quad \text{para toda curva } \gamma \subseteq A \text{ fechada} \quad \left(\oint_{\gamma} F \cdot ds = 0 \right).$$

Nota. (TF)

F é um c.v.c. em um aberto $A \implies$ a integral de linha de F é independente do caminho em A .

Nota.

F é um c.v.c. em um aberto conexo por caminhos $A \iff$ a integral de linha de F é independente do caminho em A .

Nota. Nos casos $n = 2$ ou $n = 3$:

F é um c.v.c. de classe C^1 em um aberto $A \implies \text{rot}F = \vec{0}$ em A .

Exemplo. Considere $F(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}$ em $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1. Qual o rotacional de F em A ?

Note que: F atua sobre trajetórias circulares.

Geogebra

Slide 09: $\int_{\gamma} F \cdot ds = 2\pi \neq 0$, $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Logo, a integral de linha de F não é independente do caminho

Portanto F não é c.v.c. em A .

$\text{rot}F = \vec{0}$ é condição necessária mas não é suficiente para F ser c.v.c.

16 Campos Conservativos: uma condição suficiente

Definição Um campo $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuo e com derivadas contínuas, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$, é dito **Irrotacional** quando tem todas as derivadas cruzadas iguais:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ para todo } i \neq j$$

Observação. Se $n = 2$ ou $n = 3$, F irrotacional $\iff rot(F) = 0$.

A razão para o nome *rotacional* é que o vetor rotacional está associado com rotações. Uma conexão será explicada no Exercício 37. Outra ocorre quando F representa um campo de velocidade em mecânica dos fluidos (veja o Exemplo 3 na Seção 16.1). Partículas perto de (x, y, z) no fluido tendem a rodar em torno do eixo que aponta na direção de $rot F(x, y, z)$, e o comprimento do vetor rotacional é a medida de quão rápido as partículas se movem em torno desse eixo (veja a Figura 1). Se $rot F = \mathbf{0}$ no ponto P , então o fluido é isento de rotações em P e F é chamado **irrotacional** em P . Em outras palavras, não há nenhum turbilhão ou redemoinho em P . Se $rot F = \mathbf{0}$, uma pequena roda de pás move-se com o líquido, mas não roda em torno do seu eixo. Se $rot F \neq \mathbf{0}$, a roda com pás giraria em torno de seu eixo. Veremos mais detalhes sobre essa explanação na Seção 16.8, como consequência do Teorema de Stokes.

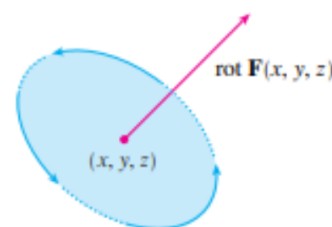


FIGURA 1

Figura 32: Stewart, Cálculo, vol. 2

Nota. F é um c.v.c. de classe C^1 em um aberto $A \implies F$ é irrotacional em A .

Resumindo: $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ c.v.c. de classe C^1 , com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, ser irrotacional é condição necessária para ser conservativo!

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, F de classe C^1 : F c.v.c. em $A \implies F$ irrotacional em A

Porém a condição não é suficiente!!

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, F de classe C^1 : F c.v.c. em $A \not\Leftarrow F$ irrotacional em A

Queremos condições que permitam concluir que ser irrotacional é condição suficiente para ser conservativo!!

Definição 16.1. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **simplesmente conexo** se é **conexo por caminhos** e **vale uma** das seguintes condições equivalentes:

- toda curva fechada contida em A pode ser deformada a um ponto sem sair de A ,
- dadas duas curvas contidas em A que conectam dois pontos dados, uma pode ser deformada até a outra sem sair de A ,
- toda curva fechada contida em A é a borda de uma superfície contida em A .

Exemplos

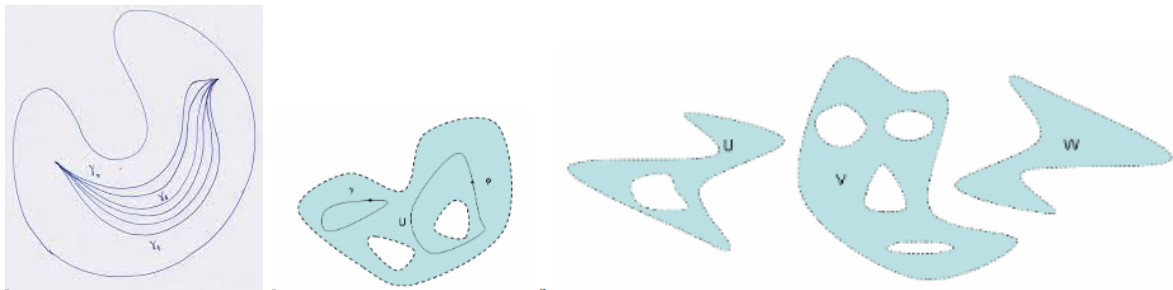


Figura 33: Domínio público, internet: o primeiro conjunto e W são simplesmente conexos

- São **simplesmente conexos**:
 - \mathbb{R}^n ,
 - \mathbb{R}^2 menos uma semirreta,
 - \mathbb{R}^3 menos um ponto,
 - \mathbb{R}^3 menos um semiplano ou uma semirreta,...
- Não são **simplesmente conexos**:
 - \mathbb{R}^2 menos um ponto,
 - \mathbb{R}^3 menos uma reta

.....
Caso particular ($n = 2$): Considere A satisfazendo a propriedade (P): existe $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0) \in A$ tal que para todo $\mathbf{p} = (x, y) \in A$, a poligonal com vértices \mathbf{p}_0 , (x_0, y) e \mathbf{p} está contida em A :

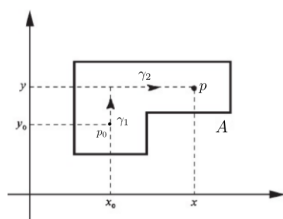


Figura 34: Guidorizzi, vol. 3. Um conjunto A satisfazendo (P) é **simplesmente conexo**

- $F = (P, Q)$ **irrotacional**, i.e., $rotF = 0 \iff P_y = Q_x$
- $\varphi(\mathbf{p}) := \int_{\gamma} F \cdot ds$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$; $\gamma_1 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = t, t \in [y_0, y] \end{cases}$ $\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = y, t \in [x_0, x] \end{cases}$
- $\varphi(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x P(t, y) dt$
- $\varphi_x(x, y) = P(x, y)$
- *Para a derivada em relação a y precisamos: Dada $f(x, y)$ contínua e com derivadas contínuas em $I \times [a, b]$, seja $F(x) := \int_a^b f(x, y) dy$. Então F é derivável em I e vale $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$.*

$$\begin{aligned} \varphi_y(x, y) &= Q(x_0, y) + \int_{x_0}^x P_y(t, y) dt \\ &\stackrel{rotF=0}{=} Q(x_0, y) + \int_{x_0}^x Q_x(t, y) dt \\ &= Q(x_0, y) + \left. Q(t, y) \right|_{t=x_0}^x = Q(x, y) \end{aligned}$$

- $\nabla\varphi = F$ em A e F é **c.v.c. em A** .
-

Teorema 16.2. *Seja $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo contínuo e com derivadas contínuas, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto simplesmente conexo. Então, F é conservativo em A se e só se F é irrotacional em A .*

Nota.

F é um c.v.c. de classe C^1 em um aberto simplesmente conexo $A \iff F$ é irrotacional em A .

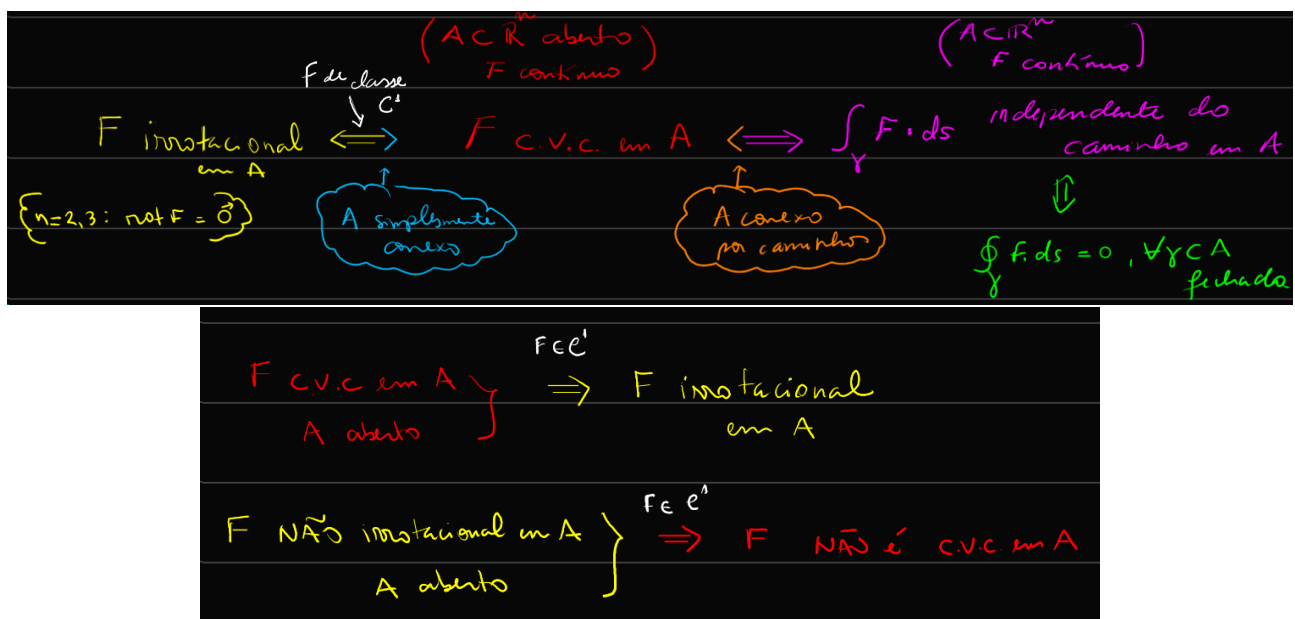


Figura 35: Resumo de todas ‘Nota’

Como decidir se F é c.v.c. em um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$? Quando buscar uma função potencial?

- F irrotacional em A que é simplesmente conexo $\implies F$ é um c.v.c. em A

Neste caso temos certeza que existe uma função potencial de F em A .

- F irrotacional em A que não é simpl. conexo $\implies F$ pode ou não ser c.v.c. em A

Neste caso tentamos:

- ou encontrar uma função potencial φ de F em A , ou seja, encontrar uma função $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla\varphi(x, y) = F(x, y)$ para todo $(x, y) \in A$ (e portanto, F será c.v.c. em A);
- ou encontrar um caminho fechado $\gamma \subset A$ tal que $\oint_{\gamma} F \cdot ds \neq 0$ (e portanto F não será c.v.c. em A);
- ou encontrar dois pontos $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ em A e dois caminhos γ_1, γ_2 contidos em A de \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 tais que $\oint_{\gamma_1} F \cdot ds \neq \oint_{\gamma_2} F \cdot ds$ (e portanto F não será c.v.c. em A).

Estratégia para encontrar uma função potencial φ para um c.v.c.

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) :$$

Note que (se existe) obrigatoriamente deve ocorrer:

$$\varphi_x = P \quad \text{e} \quad \varphi_y = Q.$$

1. Integrar P em relação a x . Isso resulta em uma função da forma $\varphi(x, y) = g(x, y) + h(y)$, onde $h(y)$ é desconhecida.
2. Tome a derivada parcial de $\varphi(x, y) = g(x, y) + h(y)$ em relação a y , que resulta na função $g_y(x, y) + h'(y)$.
3. Use a equação $g_y(x, y) + h'(y) = Q(x, y)$ para encontrar $h'(y)$.
4. Integre $h'(y)$ para encontrar $h(y)$.
5. Qualquer função da forma $\varphi(x, y) = g(x, y) + h(y) + C$, onde C é uma constante, é uma função potencial para \vec{F} .

Analogamente, se $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) :$

$$\varphi_x = P, \quad \varphi_y = Q, \quad \varphi_z = R.$$

1. Integrando P em x : $\varphi(x, y, z) = g(x, y, z) + h(y, z)$, onde $h(y, z)$ é desconhecida.
2. Use $\varphi_y = g_y(x, y) + h_y(y, z) = Q$ para encontrar $h_y(y, z)$.
3. Integrando em relação a y , obtenha $h(y, z) = f(y, z) + r(z)$, onde $r(z)$ é desconhecida.
4. Use $\varphi_z = g_z + f_z + r_z = R$ para encontrar $r_z(z)$.
5. Integre para encontrar $r(z)$.
6. Qualquer função da forma $\varphi(x, y, z) = g(x, y, z) + f(y, z) + r(z) + C$, onde C é uma constante, é uma função potencial para \vec{F} .

Analogamente, podemos iniciar o passo 1 integrando primeiramente Q (ou R) em relação a y (resp. a z).

Aplicações

O **campo eletrostático** (campo elétrico em condições estacionárias)

$$E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

satisfaz a eq. de Maxwell $\text{rot}E = 0$.

Logo é conservativo e admite um potencial $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E = \nabla\phi$.

Logo

- o **trabalho feito por E sobre uma carga q que vai de \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2** é

$$q \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q [\phi(\mathbf{p}_2) - \phi(\mathbf{p}_1)]$$

- o **trabalho necessário para fazer a carga q ir de \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 contra o campo elétrico** é

$$-q \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q [\phi(\mathbf{p}_1) - \phi(\mathbf{p}_2)]$$

CUIDADO: Em geral na física se usa a definição trocada de sinal: $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E = -\nabla V$ (**Potencial eletrostático**). Dessa forma

$$q \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q [V(\mathbf{p}_1) - V(\mathbf{p}_2)]$$

$U = qV$ é a **Energia eletrostática** da carga q no campo.

O **campo magnetostático** (campo magnético em condições estacionárias)

$$B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

satisfaz a eq. de Maxwell $\text{rot}B = \mu_0\mathbf{j}$, logo é irrotacional onde não há densidade de corrente.

Eq. de Maxwell

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 5](#) do prof. Eugenio Massa.
- Listas no e-disciplinas: Integral de Linha de um Campo Vetorial Parte II

17 Teorema de Green (Teoremas de Gauss e Stokes no plano)

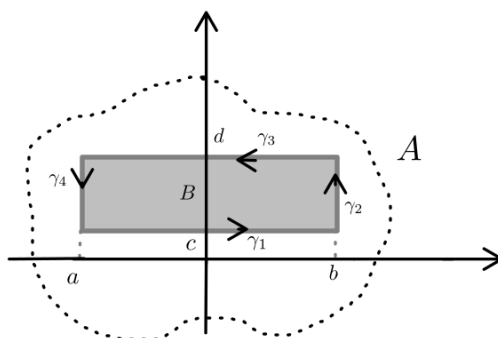


Figura 36: $\int_{\partial B} F \cdot ds = ??$

- $B = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, com $B \subset A$ e A um aberto
- γ fronteira de B orientada no sentido anti-horário: **positivamente**, $\partial^+ B$
- $F = (P, Q)$ c.v. contínuo com derivadas contínuas em A que contém B

$$\bullet \int_{\gamma} F \cdot ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} F \cdot ds = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} P dx + Q dy$$

$$\bullet \gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = c, \quad t \in [a, b] \end{cases} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = b \\ y = t, \quad t \in [c, d] \end{cases}$$

$$\bullet \gamma_3 = -\tilde{\gamma}_3, \quad \tilde{\gamma}_3 : \begin{cases} x = t \\ y = d, \quad t \in [a, b] \end{cases} \quad \gamma_4 = -\tilde{\gamma}_4, \quad \tilde{\gamma}_4 : \begin{cases} x = a \\ y = t, \quad t \in [c, d] \end{cases}$$

•

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot ds &= \int_{\gamma_1} P dx + \int_{\gamma_2} Q dy - \int_{\tilde{\gamma}_3} P dx - \int_{\tilde{\gamma}_4} Q dy \\ &= \int_a^b P(t, c) dt + \int_c^d Q(b, t) dt - \int_a^b P(t, d) dt - \int_c^d Q(a, t) dt \end{aligned}$$

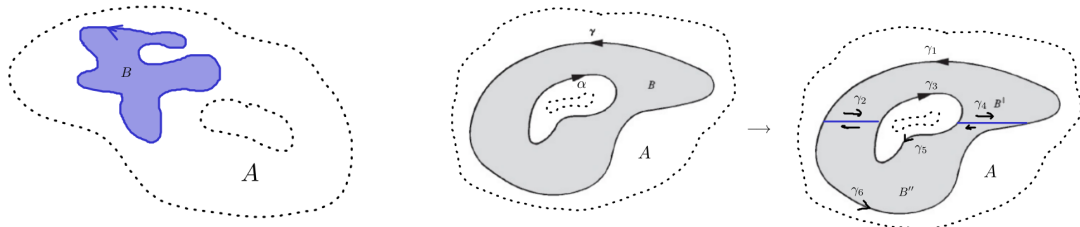
•

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F \cdot ds &= \int_a^b P(t, c)dt + \int_c^d Q(b, t)dt - \int_a^b P(t, d)dt - \int_c^d Q(a, t)dt \\
 &= \int_c^d [Q(b, t) - Q(a, t)]dt - \int_a^b [P(t, d) - P(t, c)]dt \\
 &= \int_c^d [Q(b, v) - Q(a, v)]dv - \int_a^b [P(u, d) - P(u, c)]du \\
 &= \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(u, v)du \right] dv - \int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(u, v)dv \right] du \\
 &\stackrel{T.Fubini}{=} \int_a^b \int_c^d \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(u, v) \right] dvdu \\
 &\stackrel{T.Fubini}{=} \iint_B \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]
 \end{aligned}$$

• Portanto, se F é um c.v. de classe C^1 em A que contém B , então

$$\oint_{\gamma} F \cdot ds = \oint_{\partial^+ B} Pdx + Qdy = \iint_B \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right]$$

.....



$$\begin{aligned}
 \iint_B \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA &= \iint_{B'} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA + \iint_{B''} \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dA \\
 &= \oint_{\partial^+ B'} Pdx + Qdy + \oint_{\partial^+ B''} Pdx + Qdy \\
 &= \left[\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_3} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_4} Pdx + Qdy \right] \\
 &+ \left[\int_{\gamma_5} Pdx + Qdy - \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_6} Pdx + Qdy - \int_{\gamma_4} Pdx + Qdy \right] \\
 &= \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_6} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_3} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_5} Pdx + Qdy \\
 &= \int_{\gamma} Pdx + Qdy + \int_{\alpha} Pdx + Qdy = \int_{\partial^+ B} Pdx + Qdy
 \end{aligned}$$

Hipóteses para o conjunto B e sua fronteira ∂B (H-TG):

Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ consideremos um conjunto $B \subseteq A$ com as seguintes propriedades:

- B é compacto (fechado e limitado),
- $\text{int}(B) = B^\circ \neq \emptyset$ (interior não vazio),
- a fronteira de B é uma (ou mais) curva fechada, simples, regular por partes.
- $\partial^+ B$ a fronteira de B orientada positivamente, isto é: de forma que “ B esteja sempre a esquerda de quem olha na direção e sentido de $\widehat{\mathbf{t}}$ ” (analogamente, tal que $\widehat{\mathbf{t}} \wedge \widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\mathbf{n}}_{ext}$)

Teorema 17.1 (Teorema de Green). *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $B \subseteq A$ como em H-TG.*

Sejam $P, Q : A \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas com derivadas contínuas.

Então

$$\iint_B \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \oint_{\partial^+ B} P dx + Q dy$$

Aplicação:

Várias combinações para P e Q podem ser consideradas de forma que

$$Q_x - P_y = 1,$$

as mais tradicionais são:

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = x$$

$$P(x, y) = -y, \quad Q(x, y) = 0$$

$$P(x, y) = -\frac{y}{2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{2}.$$

Assim,

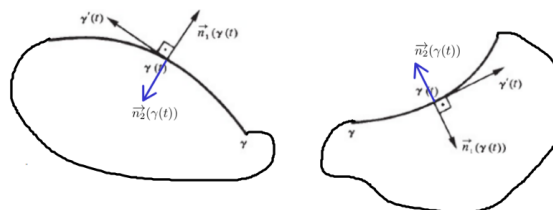
$$|B|_2 = \iint_B 1 \, dx dy = \oint_{\partial^+ B} x \, dy = \oint_{\partial^+ B} -y \, dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial^+ B} x \, dy - y \, dx.$$

Reformulações do Teorema de Green:

Lembrete 1: Se $F = (P, Q)$,

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então



$$\widehat{\mathbf{t}}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (x'(t), y'(t)), \quad \widehat{\mathbf{n}}_1(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (y'(t), -x'(t)), \quad \widehat{\mathbf{n}}_2(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|} (y'(t), -x'(t))$$

e o fluxo de F através de γ é dado por (ver [Slide 8: Integral de linha de campo vetorial](#))

$$\int_{\gamma} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] ds = (\pm) \int_{\gamma} P(x, y) dy - Q(x, y) dx$$

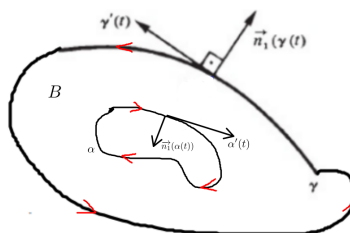


Figura 37: $*B$ com fronteira orientada positivamente: $\widehat{\mathbf{n}}_{ext} = \widehat{\mathbf{n}}_1$ (“normal exterior a B ”)

$$\oint_{\partial^+ B} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}] ds \stackrel{\widehat{\mathbf{n}}_{ext} = \widehat{\mathbf{n}}_1}{=} \oint_{\partial^+ B} -Q(x, y) dx + P(x, y) dy \stackrel{T.Green}{=} \iint_B \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \iint_B \operatorname{div} F$$

Reformulação 1) Teorema de Gauss em \mathbb{R}^2 (ou teorema do divergente)

Considerando $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $B \subseteq A$ como em (H-TG),

$$\iint_B \operatorname{div} F = \oint_{\partial^+ B} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}] ds,$$

onde $\widehat{\mathbf{n}}_{ext}$ é o vetor normal unitário exterior ao conjunto B .

Lembrete 2:

$$F = (P, Q); \quad \text{rot } F = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Reformulação 2) Teorema de Stokes em \mathbb{R}^2

Considerando $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $B \subseteq A$ como em (H-TG).

$$\iint_B \text{rot } F \cdot \hat{k} = \oint_{\partial^+ B} F \cdot ds.$$

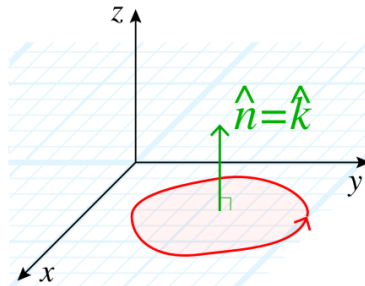


Figura 38: [Coert Vonk's homepage](#)

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 6](#) do prof. Eugenio Massa.
- Listas no e-disciplinas: Teorema de Green - Parte I e Parte II

18 Superfícies

Definição. Chamamos de **Superfície parametrizada em \mathbb{R}^n** uma função contínua

$$\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n \geq 3).$$

- **Superfície:** a imagem de σ ,

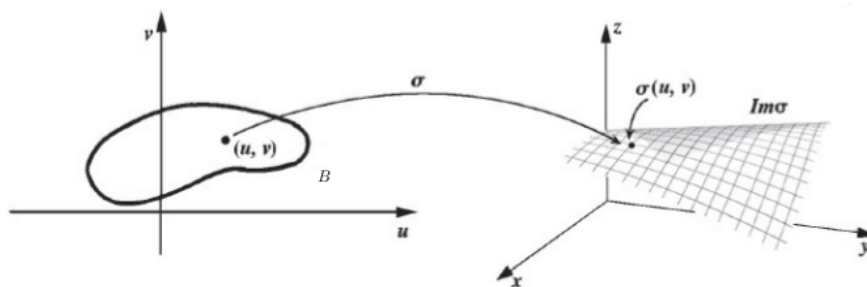


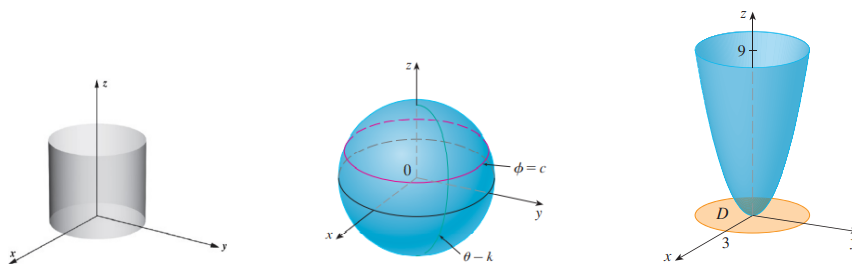
Figura 39: Guidorizzi, vol. 3 ($n = 3$)

- **equação paramétrica/vetorial da superfície (parametrização):** a lei $n = 3$:

$$\sigma : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in B \qquad \sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in B$$

Exemplos: superfícies

1. $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v), (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$
2. $\sigma(\varphi, \theta) = R(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), (\varphi, \theta) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] (R > 0)$
3. $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)), (u, v) \in B \subset \mathbb{R}^2$, onde $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.



Figuras do Guidorizzi e Stewart

4. $\sigma(\varphi, \theta) = (\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\theta)[R + r \cos(\varphi)], \sin(\theta)[R + r \cos(\varphi)], r \sin(\varphi), (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] (0 < r < R)$
5. $\sigma(u, v) = (\cos u(1 + v \cos(u/2)), \sin u(1 + v \cos(u/2)), v \sin(u/2)), (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
6. $\sigma(u, v) = (\cos u(1 + v \cos u), \sin u(1 + v \cos u), v \sin u), (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

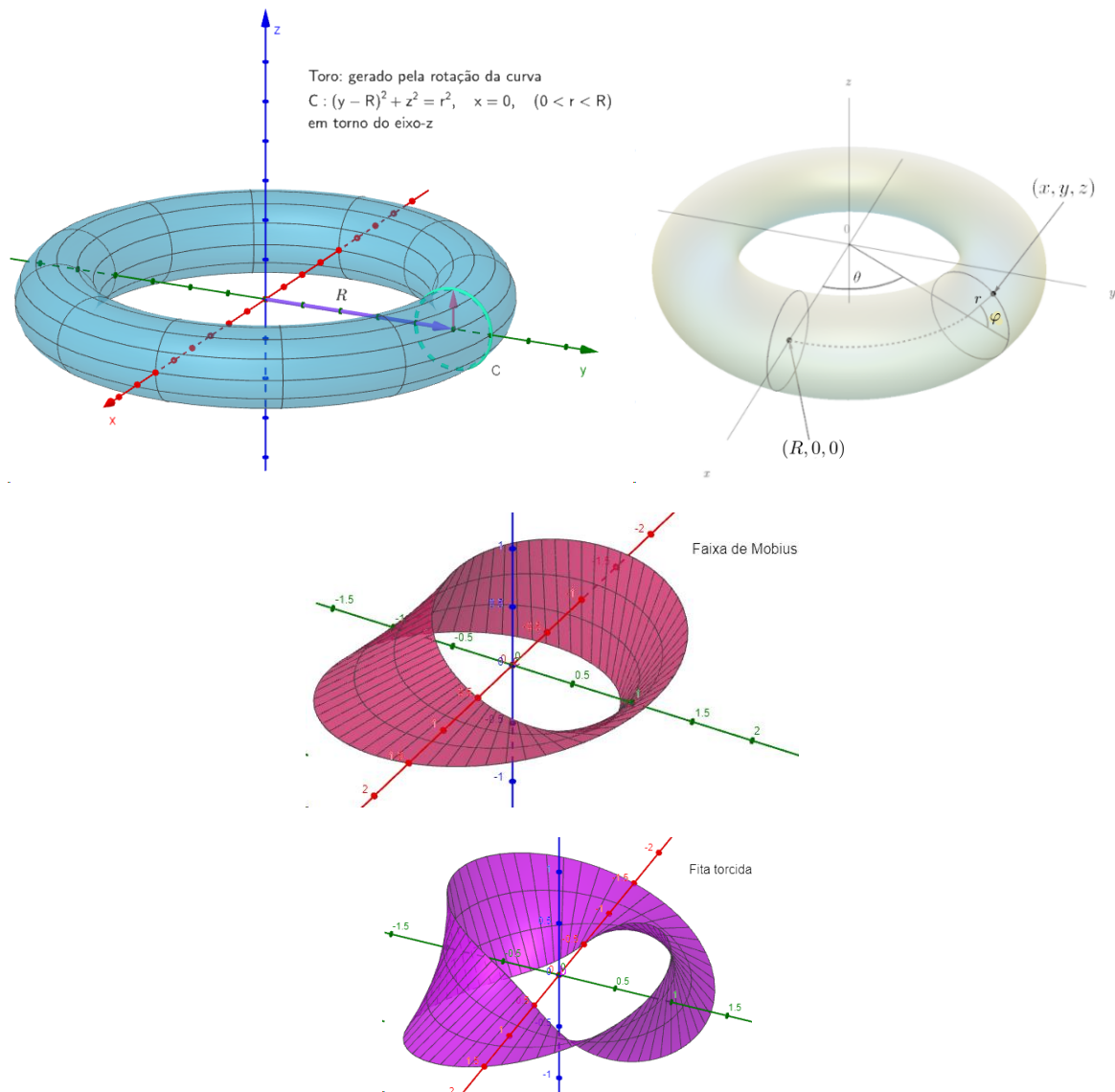


Figura 40: Toro, Faixa de Möbius, Fita torcida (Figuras geradas no Geogebra e da internet)

Hiperplano Tangente: $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (n \geq 3)$

Seja $B' = \text{int}(B)$ o interior do conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{p}_0 = (u_0, v_0) \in B'$.

Se σ é contínua com derivadas parciais contínuas em \mathbf{p}_0 e $\sigma_u(\mathbf{p}_0), \sigma_v(\mathbf{p}_0) \neq 0$ então

- $\sigma_u(\mathbf{p}_0)$ é um **vetor tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.
- $\sigma_v(\mathbf{p}_0)$ é um **vetor tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.
- se $\sigma_u(\mathbf{p}_0), \sigma_v(\mathbf{p}_0)$ são linearmente independentes então definem um hiperplano

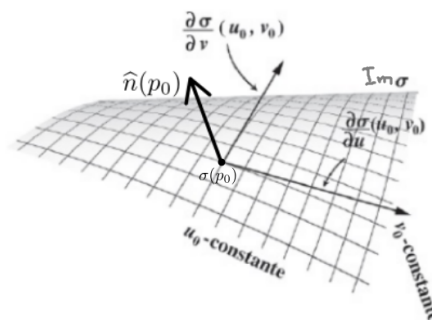
que passa pelo ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$:

$$\pi(s, t) = \sigma(\mathbf{p}_0) + \sigma_u(\mathbf{p}_0)s + \sigma_v(\mathbf{p}_0)t, \quad (s, t \in \mathbb{R}). \quad (\text{equação vetorial})$$

$\pi : \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{p}_0)) = 0$ é equação geral de um hiperplano passando por $\sigma(\mathbf{p}_0)$ e tendo \mathbf{a} como vetor normal

Se $n = 3$, então $\sigma_u(\mathbf{p}_0), \sigma_v(\mathbf{p}_0)$ são linearmente independentes se e somente se $\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0) \neq \mathbf{0}$. Portanto

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_0) = \frac{\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)}{\|\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)\|}$$



é um **vetor unitário perpendicular à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.

Neste caso, uma equação do plano tangente à superfície no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$ é:

$$\pi : \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_0) \cdot (\mathbf{x} - \sigma(\mathbf{p}_0)) = 0, \quad (\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$

Definição. Dizemos que a superfície é **regular** se σ é contínua com derivadas parciais contínuas, e as derivadas parciais σ_u, σ_v são linearmente independentes em cada ponto $(u, v) \in B$.¹

Neste caso, o plano π é o **hiperplano tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.

Nota. σ regular \implies superfície $(Im\sigma)$ admite plano tangente em todo ponto.

A recíproca é verdadeira?

¹ $Im\sigma$ possui vetor normal em todos pontos, exceto possivelmente nos pontos da fronteira

Exemplos: superfícies regulares, planos tangentes

1. Esfera de raio $R > 0$: [Wolfram](#)

$$\begin{aligned}\sigma &: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 : \\ &(\varphi, \theta) \mapsto R(\cos(\theta) \sin(\varphi), \sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\varphi))\end{aligned}$$

$$\sigma_\varphi = R(\cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), -\sin(\varphi))$$

$$\sigma_\theta = R(-\sin(\theta) \sin(\varphi), \cos(\theta) \sin(\varphi), 0)$$

$$\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta = R^2(\cos(\theta) \sin^2(\varphi), \sin(\theta) \sin^2(\varphi), \cos(\varphi) \sin(\varphi))$$

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta\| = R^2 \sin(\varphi)$$

.....
A esfera é regular?²

A esfera tem plano tangente em todos seus pontos?

O que ocorre em $\sigma(\theta, 0) = (0, 0, a)$ e $\sigma(\theta, \pi) = (0, 0, -a)$??

.....

Nota. superfície ($Im\sigma$) admite plano tangente em todo ponto $\nRightarrow \sigma$ regular

.....

2. Gráfico de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ com $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

$$\sigma_x = (1, 0, f_x(x, y))$$

$$\sigma_y = (0, 1, f_y(x, y))$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)$$

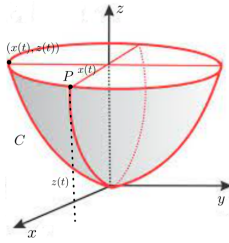
$$\|\sigma_x \wedge \sigma_y\| = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}$$

Portanto, a superfície é regular se f é de classe C^1 em A .

²outros autores podem definir superfície regular de forma distinta o que pode incluir superfícies que neste contexto não são regulares

3. **Superfícies de revolução:** S obtida pela rotação da curva C em torno do eixo- z

$$C : \gamma(t) = (x(t), z(t)), \quad t \in [a, b] \quad (x \geq 0);$$



$P = (x, y, z) \in S \iff P$ pertence a uma circunferência de raio $x(t)$ na altura $z(t)$.

Uma parametrização para S é:

$$\sigma(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)), \quad t \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\sigma_t = (x'(t) \cos(\theta), x'(t) \sin(\theta), z'(t))$$

$$\sigma_\theta = (-x(t) \sin(\theta), x(t) \cos(\theta), 0)$$

$$\sigma_t \wedge \sigma_\theta = (-x(t)z'(t) \cos(\theta), -x(t)z'(t) \sin(\theta), x(t)x'(t))$$

$$\|\sigma_t \wedge \sigma_\theta\| = x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (z'(t))^2} = x(t)|\gamma'(t)|$$

Portanto, a superfície de revolução é regular se γ é regular de classe C^1 e $x > 0$.

4. **Toro de raios $r < R$:** [Wolfram](#)

$$\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\theta)[R + r \cos(\varphi)], \sin(\theta)[R + r \cos(\varphi)], r \sin(\varphi))$$

$$\sigma_\varphi = (-\cos(\theta)r \sin(\varphi), -\sin(\theta)r \sin(\varphi), r \cos(\varphi))$$

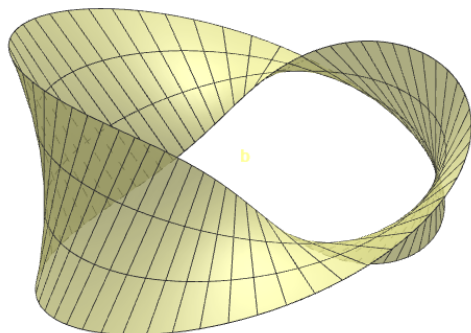
$$\sigma_\theta = (-\sin(\theta)[R + r \cos(\varphi)], \cos(\theta)[R + r \cos(\varphi)], 0)$$

$$\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta = r[R + r \cos(\varphi)](-\cos(\theta) \cos(\varphi), -\sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta\| = r[R + r \cos(\varphi)]$$

Portanto, o toro é uma superfície regular.

fita torcida (orientável) / fita de Moebius (não orientável)
 são regulares? (verifique!) Wolfram: vetor normal a Moebius



”quero

andar só pelo lado de fora”

Dizemos que uma superfície é **orientável** quando é possível escolher versor normal unitário \hat{n} em cada ponto da superfície de modo que \hat{n} varie continuamente sobre a superfície (dizemos **superfície orientada pelo campo normal \hat{n} unitário** ou que \hat{n} é uma **orientação da superfície**).

Dada uma superfície parametrizada $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, os vetores

$$\hat{n}_1(\mathbf{p}_0) = \frac{\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)}{\|\sigma_u(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_v(\mathbf{p}_0)\|}, \quad \hat{n}_2 = -\hat{n}_1$$

são vetores unitários normais a $Im(\sigma)$. Portanto, a superfície é orientável se \hat{n}_1 é contínuo em $int(B)$.

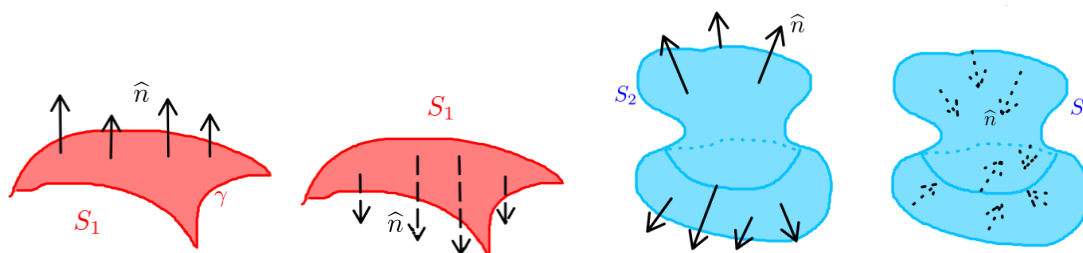


Figura 41: É comum dizer: em S_1 o campo normal aponta “para cima” (componente \hat{k} de \hat{n} positiva) ou “para baixo” (componente \hat{k} negativa). Em S_2 o campo normal aponta “para fora” (usualmente chamada **orientação positiva** e \hat{n} de **normal exterior**) ou “para dentro”.

Nota.

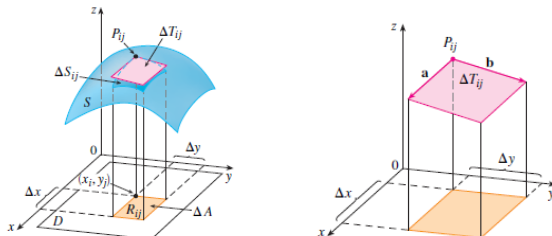
S_1 possui fronteira (bordo) que é uma curva em \mathbb{R}^3 : $\partial S_1 = \gamma$.

S_2 não possui fronteira: $\partial S_1 = \emptyset$.

S_2 é uma superfície **fechada** (é a fronteira de uma região “sólida” em \mathbb{R}^3).

19 Área de uma superfície

Lembrete: Área da superfície dada por gráfico de função escalar de duas variáveis: $\sigma : A \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$, ver [Slide 4- Aplicações de integral múltipla](#):



$$\mathbf{a} := (1, 0, f_x(x_i^*, y_j^*))\Delta_i x = \sigma_x(x_i^*, y_j^*)\Delta_i x, \quad \mathbf{b} := (0, 1, f_y(x_i^*, y_j^*))\Delta_j y = \sigma_y(x_i^*, y_j^*)\Delta_j y$$

Temos $\Delta S_{ij} = A(S_{ij}) \approx A(T_{ij}) = \Delta T_{ij}$. A área do paralelogramo é:

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \sqrt{f_x^2(x_i^*, y_j^*) + f_y^2(x_i^*, y_j^*) + 1} \Delta_i x \Delta_j y = \|\sigma_x(x_i^*, y_j^*) \wedge \sigma_y(x_i^*, y_j^*)\| \Delta_i x \Delta_j y$$

A área da superfície é:

$$A(S) = \iint_A \sqrt{f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) + 1} \, dx dy = \iint_A \|\sigma_x(x, y) \wedge \sigma_y(x, y)\| \, dx dy$$

Seja $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular onde $B \subseteq \mathbb{R}^2$ é mensurável.

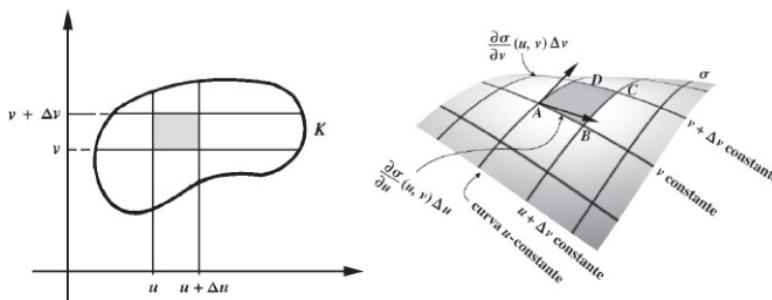


Figura 42: Guidorizzi, vol. 3

Analogamente ao caso de superfícies que são gráficos de funções, aproximamos a área $A(S_{ij})$ do “paralelogramo curvilíneo” $ABCD$ pela área do paralelogramo determinado pelos vetores $\mathbf{a} = \sigma_u(u_i^*, v_j^*)\Delta_i u$ e $\mathbf{b} = \sigma_v(u_i^*, v_j^*)\Delta_i v$ (que está contido no plano tangente). Temos que $A(S_{ij}) \approx \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|$.

Definição. A **área da imagem de σ** é dada por

$$A_\sigma = \iint_B \|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 7](#) do prof. Eugenio Massa: 1, 2, 3, 4, 5.
- Listas no e-disciplinas: Superfícies Parametrizadas

20 Integrais de superfície

Seja $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular onde B é mensurável.

Lembrete: área da imagem de σ é: $A_\sigma = \int_B \|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| \, du \, dv$.

20.1 Integral de superfície de função escalar

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com $Im(\sigma) \subseteq A$.

.....

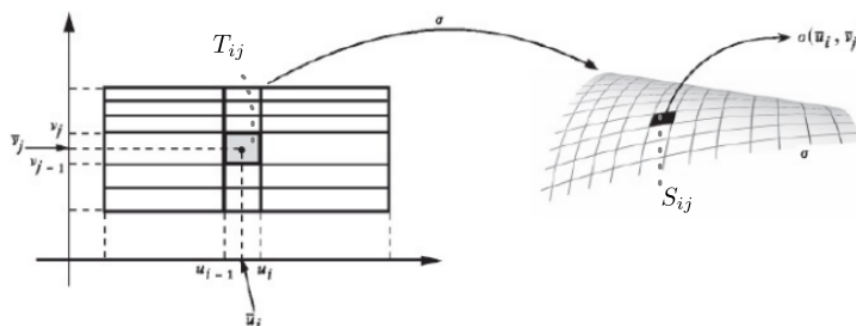


Figura 43: Guidorizzi, vol. 3: supondo B um retângulo

- $P = \{(u_i, v_j) : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ partição de B
- $\Delta_{ij}S = \text{área de } S_{ij} \approx \|\sigma_u(u_i, v_j) \wedge \sigma_v(u_i, v_j)\| \Delta_i u \Delta_j v$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\sigma(u_i, v_j)) \Delta_{ij}S \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\sigma(u_i, v_j)) \|\sigma_u(u_i, v_j) \wedge \sigma_v(u_i, v_j)\| \Delta_i u \Delta_j v$

$$\bullet \quad \boxed{\int_{\sigma} f dS = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\sigma(u_i, v_j)) \Delta_{ij} S} = \iint_B f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| du dv$$

.....
 A **integral de superfície f sobre a superfície σ** é definida por:

$$\int_{\sigma} f d\sigma := \iint_B f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| du dv.$$

Outras notações:

$$\int_{\sigma} f d\sigma = \int_{\sigma} f dS = \iint_{\sigma} f dS = \iint_{\sigma} f d\sigma$$

Nota.

1. $\int_{\sigma} 1 d\sigma =$ área da imagem de σ
2. se $f(x, y, z)$ representa a densidade superficial de massa no ponto $(x, y, z) \in Im\sigma$, então a massa da superfície é dada por $M = \int_{\sigma} f d\sigma$.
3. Dizemos que uma superfície é **regular por partes** se pode ser decomposta em um número finito de superfícies regulares: $Im(\sigma) = \cup_{i=1}^n Im(\sigma_i)$ (união disjunta).

Neste caso,

$$\int_{\sigma} f dS = \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} f dS.$$

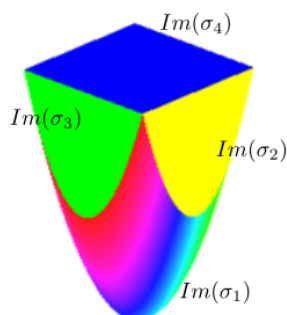


Figura 44: Figura da internet

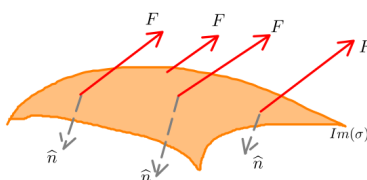
20.2 Integral de superfície de campo vetorial

Sejam $B \subseteq \mathbb{R}^2$ é mensurável ($|\partial B|_2 = 0$ e $\text{int}(B) \neq \emptyset$) e $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície regular orientada pelo campo normal $\hat{\mathbf{n}}$ unitário.

Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um c.v. contínuo com $\text{Im}(\sigma) \subseteq A$.

O **fluxo de F através da superfície σ na direção do normal $\hat{\mathbf{n}}$ (integral de superfície de F sobre σ)** é definido por:

$$\int_{\sigma} F \cdot d\sigma := \int_{\sigma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma.$$



Outras notações:

$$\int_{\sigma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma = \int_{\sigma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] dS = \int_{\sigma} F \cdot d\mathbf{S} = \int_{\sigma} F \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\sigma} F \cdot d\vec{\sigma}$$

Se a superfície parametrizada σ é regular, o campo normal unitário dado por

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$$

induz uma orientação na superfície. Neste caso,

$$\int_{\sigma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma = \int_B F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\|} du dv = \iint_B F(\sigma(u, v)) \cdot [\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)] du dv.$$

Atenção: o fluxo na direção oposta de $\hat{\mathbf{n}}$ terá sinal oposto.

Nota. Se σ é uma superfície parametrizada regular por partes, $Im(\sigma) = \cup_{i=1}^n Im(\sigma_i)$ (união disjunta), então

$$\int_{\sigma} F \cdot dS = \sum_{i=1}^n \int_{\sigma_i} F \cdot dS,$$

onde o campo normal $\hat{\mathbf{n}}$ da superfície $Im(\sigma)$ coincide com o campo normal $\hat{\mathbf{n}}_i$ da superfície $Im(\sigma_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$ (isto é, $\hat{\mathbf{n}}(\sigma_i(u, v)) = \hat{\mathbf{n}}_i(\sigma_i(u, v))$ para todo (u, v))

Resumo: Para calcular

- integrais de superfície de funções escalares $\int_{\sigma} f dS$:
 1. “parametrizar a superfície”: encontrar $B \subset \mathbb{R}^2$ e função $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Im(\sigma)$ seja a superfície desejada;
 2. encontrar o vetor normal $\sigma_u \wedge \sigma_v$;
 3. calcular a integral dupla $\iint_B f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| dA$.
- integrais de superfície de campos vetoriais $\int_{\sigma} F \cdot dS$:
 1. parametrizar a superfície;
 2. encontrar o vetor normal $\hat{\mathbf{n}} = \sigma_u \wedge \sigma_v$;
 3. decidir se $\hat{\mathbf{n}}$ fornece a orientação pedida:
 - (a) se sim, calcular a integral de superfície da função escalar $F \cdot \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{n}}\|}$;
 - (b) se não, calcular a integral de superfície da função escalar $F \cdot \left(-\frac{\hat{\mathbf{n}}}{\|\hat{\mathbf{n}}\|} \right)$,
ou $\int_{\sigma} F \cdot dS$ tem o valor oposto do valor encontrado no item (a).
- em ambos casos, devemos entender que se σ é uma “superfície” não parametrizada, então deve-se calcular tais integrais sobre uma superfície parametrizada (ou união de superfícies parametrizadas) cuja imagem coincida com a “superfície” pedida.

Sugestão de Exercícios:

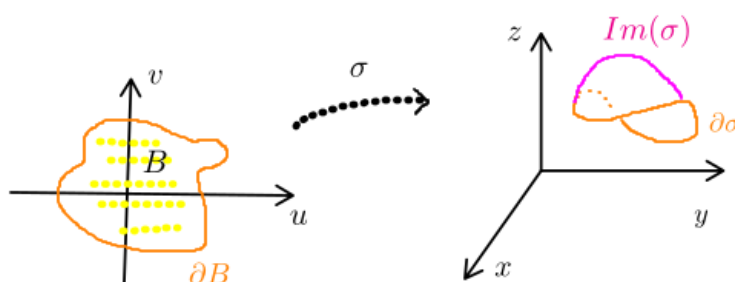
- [Lista 7](#) do prof. Eugenio Massa: 6, 7, 8.
- Listas no e-disciplinas: Integrais de Superfície

21 Teorema de Stokes no espaço

21.1 Superfícies com fronteira e orientação: noção intuitiva

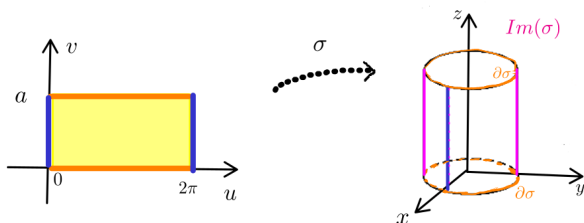
Seja $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada. Então,

- a **fronteira (bordo)** $\partial\sigma$ da superfície $Im(\sigma)$ é constituída por curvas fechadas, simples, regulares por partes;
- as curvas da fronteira são percorridas uma única vez;
- $\partial\sigma \subset \sigma(\partial B)$.

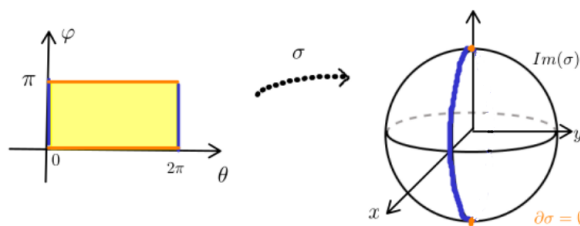


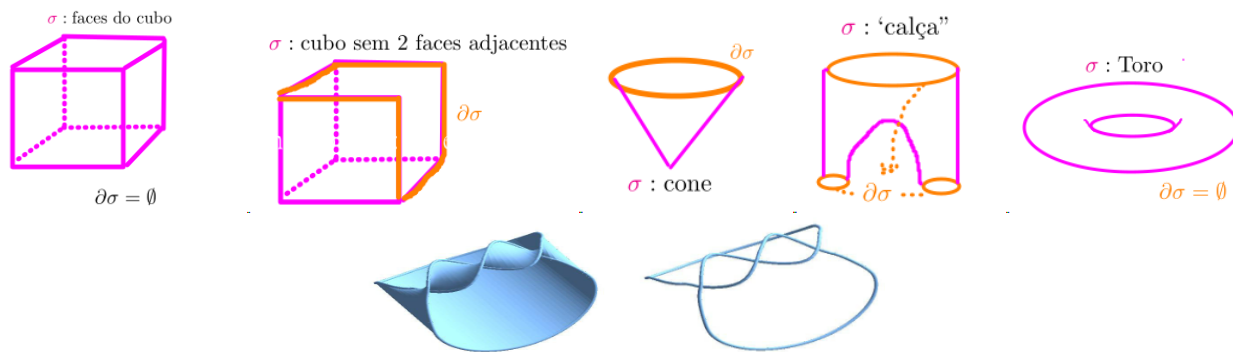
Exemplos:

$$(1) \sigma : \begin{cases} x = r \cos u \\ y = r \sin u \\ z = v, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, a] \end{cases}$$



$$(2) \sigma : \begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi, \quad (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \end{cases}$$





Dizemos que a superfície $Im(\sigma)$ e sua fronteira $\partial\sigma$ têm **orientação coerente** ou que $\partial\sigma$ está **orientada positivamente**, e denotaremos por $\partial^+\sigma$, quando:

“ $Im(\sigma)$ está sempre a esquerda de quem andar na $\partial\sigma$ na direção e sentido de $\hat{\mathbf{t}}$ com a cabeça na direção e sentido de $\hat{\mathbf{n}}$ ”

Analogamente: o vetor $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{t}} \wedge \hat{\mathbf{n}}$ aponta para fora da superfície (ou Regra da mão direita).

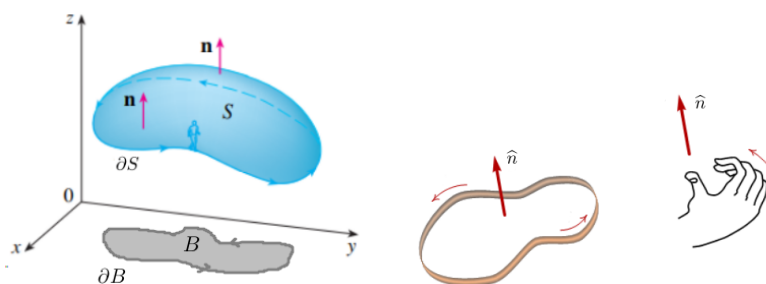


Figura 45: Stewart, vol. 2, e internet

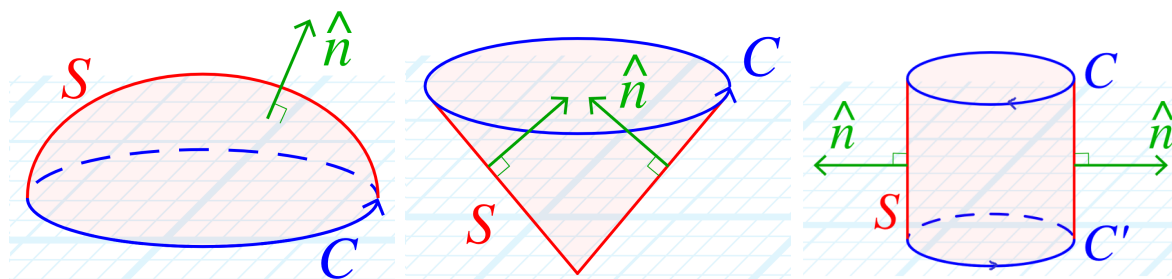


Figura 46: Coert Vonk's homepage

Lembrete: Hipóteses do Teorema de Green para o conjunto B e sua fronteira ∂B (H-TG):

Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ consideremos um conjunto $B \subseteq A$ com as seguintes propriedades:

- B é compacto (fechado e limitado),
- $\text{int}(B) = B' \neq \emptyset$ (interior não vazio),
- a fronteira de B é uma (ou mais) curva fechada, simples, regular por partes.
- $\partial^+ B$ a fronteira de B orientada positivamente, isto é: de forma que “ B esteja sempre a esquerda de quem olha na direção e sentido de $\hat{\mathbf{t}}$ ” (analogamente, tal que $\hat{\mathbf{t}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}_{\text{ext}}$)

Importante: Seja $\sigma : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ superfície parametrizada regular. Se ∂B está orientada positivamente e a superfície está orientada com o campo normal dado por:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|},$$

então

$$\partial^+ \sigma = \sigma(\partial^+ B).$$

Exemplo: $\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$, $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

21.2 Teorema de Stokes no espaço

Lembrete: Teorema de Stokes no plano:

$$\int_{\partial^+ B} F \cdot ds \stackrel{T.S.}{=} \iint_B \text{rot } F \cdot \hat{\mathbf{k}} = \iint_B [\text{rot } F \cdot \hat{\mathbf{n}}] \stackrel{F=(P,Q,0)}{=} \int_{\sigma} \text{rot } F \cdot dS,$$

onde $\text{Im}(\sigma)$ é a porção do plano- xy limitado por ∂B e então $\partial \sigma = \partial B$.

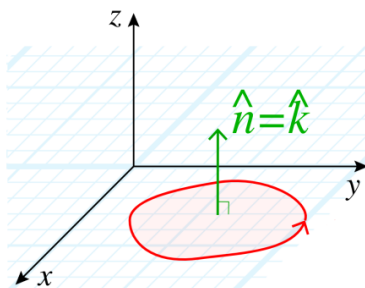


Figura 47: Figura de [Coert Vonk's homepage](#)

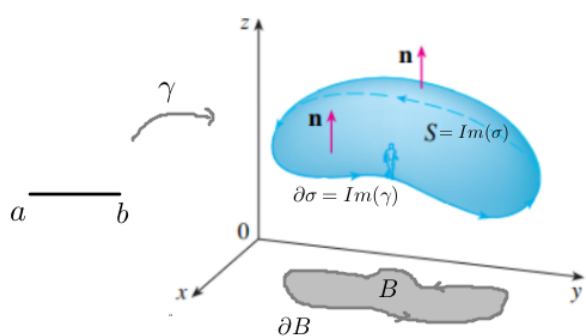
Se σ é uma superfície parametrizada em \mathbb{R}^3 cuja fronteira $\partial\sigma$ (que é a imagem de uma curva em \mathbb{R}^3) está orientada positivamente, então

$$\underbrace{\int_{\partial^+\sigma} F \cdot ds}_{\text{integral de linha de c.v.}} = ???$$

Seja

- $F = (P, Q, R) : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um c.v. de classe C^1
- $B \subset \mathbb{R}^2$ satisfazendo H-TG
- $f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2
- $\sigma : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ tal que
 - $Im(\sigma) \subset A$
 - σ está orientada por $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_t\|}$

(portanto, $\partial\sigma = Im(\gamma)$ e σ têm orientação coerente)



$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y), \quad (x, y) \in B \end{cases}$$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = f(x(t), y(t)), \quad t \in [a, b] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+\sigma} F \cdot ds &= \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_a^b [P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t)]dt \\ &\stackrel{\text{RegraCadeia}}{=} \int_a^b \{P(\star)x'(t) + Q(\star)y'(t) + R(\star)[f_x(\cdot)x'(t) + f_y(\cdot)y'(t)]\}dt \\ &= \int_a^b \{[P(\star) + R(\star)f_x(\cdot)]x'(t) + [Q(\star) + R(\star)f_y(\cdot)]y'(t)\}dt \\ &= \int_{\partial^+B} [P + Rf_x]dx + [Q + Rf_y]dy \end{aligned}$$

.....
 $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y), \quad (x, y) \in B \end{cases} \quad \begin{aligned} \sigma_x \wedge \sigma_y &= (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1) \\ \|\sigma_x \wedge \sigma_y\| &= \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \\ \hat{\mathbf{n}} &= \frac{\sigma_x \wedge \sigma_y}{\|\sigma_x \wedge \sigma_y\|} \end{aligned}$$

.....

integral de linha de c.v.

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ \sigma} F \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\partial^+ B} [P + Rf_x]dx + [Q + Rf_y]dy \\ &\stackrel{T.Green}{=} \iint_B \frac{\partial}{\partial x}[Q + Rf_y] - \frac{\partial}{\partial y}[P + Rf_x]dxdy \\ &\stackrel{RegraCadeia}{=} \iint_B [Q_x 1 + Q_y 0 + Q_z f_x + (R_x + R_z f_x)f_y + Rf_{yx}] \\ &\quad - \iint_B [P_y 1 + P_z f_y + (R_y + R_z f_y)f_x + Rf_{xy}] \\ &\stackrel{f \in C^2}{=} \iint_B [Q_x + Q_z f_x + R_x f_y - P_y - P_z f_y - R_y f_x] \\ &= \iint_B [(Q_z - R_y)f_x + (R_x - P_z)f_y + (Q_x - P_y)] \\ &= \iint_B [(R_y - Q_z)(-f_x) + (P_z - R_x)(-f_y) + (Q_x - P_y)] \\ &= \iint_B rot F \cdot (-f_x, -f_y, 1) \\ &= \iint_B rot F \cdot \frac{\sigma_x \wedge \sigma_y}{\|\sigma_x \wedge \sigma_y\|} \|\sigma_x \wedge \sigma_y\| \\ &= \underbrace{\int_{\sigma} [rot F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma}_{\text{integral de superfície de função escalar}} = \underbrace{\int_{\sigma} rot F \cdot d\sigma}_{\text{integral de superfície de c.v. fluxo do rot } F} \end{aligned}$$

Teorema (Teorema de Stokes em \mathbb{R}^3). Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que

- B é compacto (fechado e limitado),
- $B' \neq \emptyset$,
- a fronteira de B é a imagem de uma curva fechada, simples, regular por partes de classe C^1 .

Seja $\sigma : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, regular com derivadas parciais de segunda ordem contínuas e **orientada com o campo normal $\hat{\mathbf{n}}$** .

Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\text{Im}(\sigma) \subseteq A$ um c.v. contínuo com derivadas contínuas.

Se $\partial\sigma$ está orientada positivamente (σ e $\partial\sigma$ têm orientação coerente), então

$$\oint_{\partial^+\sigma} F \cdot ds = \iint_{\sigma} [\text{rot}F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma = \iint_{\sigma} \text{rot}F \cdot dS.$$

Nota. Se ∂B está orientada positivamente (como em T-HG), então a orientação da fronteira $\partial\sigma$ de σ dada por $\sigma(\partial^+ B)$ juntamente com a orientação da superfície dada por $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$ proporcionam a orientação coerente na superfície.

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 7](#) do prof. Eugenio Massa: 9, 10, 11, 12, 13.
- Listas no e-disciplinas: Teorema de Stokes

22 Teorema de Gauss no espaço

Seja $F = (P, Q, R) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um c.v. contínuo com derivadas parciais contínuas.

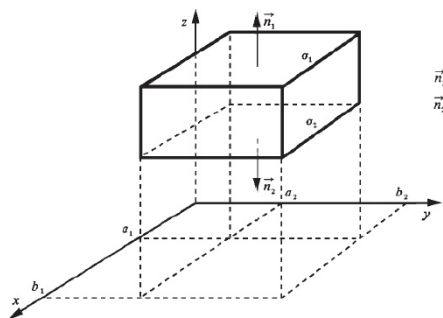
.....
Lembrete: Teorema de Gauss no plano ([Teorema de Green-Slide 11](#)):

$B \subseteq A = \text{dom}F \subset \mathbb{R}^2$ como em H-TG:

$$\int_{\partial^+ B} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{ext}}] ds = \iint_B \text{div} F dx dy$$

Sejam $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ superfície parametrizada regular por partes tal que $Im(\sigma) = \partial V$.

$$\int_{\partial V} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}] dS = \int_{\sigma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}] dS???$$



$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \vec{k} \\ \vec{n}_2 &= -\vec{k} \end{aligned}$$

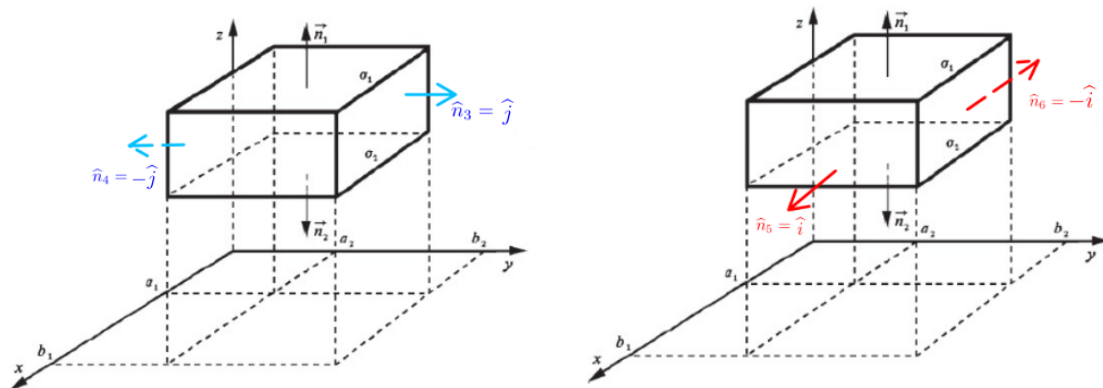
$$\sigma_1 : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = d \end{cases} \quad \sigma_2 : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = c \end{cases}, (u, v) \in B$$

onde $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Guidorizzi, vol. 3: $\int_{\sigma} F \cdot d\sigma = \int_{\sigma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}] ds = ?$

- $\int_{\sigma_1} F \cdot dS = \int_{\sigma_1} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_1] dS = \iint_B F(u, v, d) \cdot (0, 0, 1) dudv = \iint_B R(u, v, d) dudv$
- $\int_{\sigma_2} F \cdot dS = \int_{\sigma_2} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_2] dS = \iint_B F(u, v, c) \cdot (0, 0, -1) dudv = \iint_B -R(u, v, c) dudv$
- $\int_{\sigma_1} F \cdot dS + \int_{\sigma_2} F \cdot dS = \iint_B [R(u, v, d) - R(u, v, c)] dudv$
 $= \iint_B \left[\int_c^d \frac{\partial}{\partial z} R(u, v, z) dz \right] dudv = \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} R(u, v, z) dz dudv$

Considerando as outras 4 faces de V e com contas similares obtemos:



- $\int_{\sigma_3} F \cdot \hat{j} dS + \int_{\sigma_4} F \cdot (-\hat{j}) dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial y} Q(u, v, z) dz du dv$
- $\int_{\sigma_5} F \cdot \hat{i} dS + \int_{\sigma_6} F \cdot (-\hat{i}) dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} P(u, v, z) dz du dv$

Portanto,

$$\int_{\sigma} F \cdot d\sigma = \int_{\sigma} [F \cdot \hat{n}_{ext}] dS = \sum_{i=1}^6 \int_{\sigma_i} [F \cdot \hat{n}_i] dS = \iiint_V \operatorname{div} F dx dy dz$$

.....

Quais as condições que um conjunto V de \mathbb{R}^3 deve satisfazer para valer o Teorema de Gauss no espaço?

.....

Hipóteses para o conjunto $V \subset \mathbb{R}^3$ e sua fronteira ∂V :

Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ consideremos um conjunto $V \subseteq A$ com as seguintes propriedades:

- V é compacto (fechado e limitado),
- $\text{int}(V) = V' \neq \emptyset$ (interior não vazio),
- a fronteira (bordo) ∂V de V é composta de um número finito de superfícies regulares por partes: $\partial V = \cup_{i=1}^n \text{Im}(\sigma_i)$ (união disjunta). Chamamos de **superfície fechada** a fronteira de V ;
- existe campo normal unitário em cada σ_i tal que $\hat{\mathbf{n}}_i$ aponta para fora de V ;
- a fronteira $\partial^+ V$ de V está **orientada positivamente**, isto é: orientada pelo campo normal unitário exterior $\hat{\mathbf{n}}_{ext}$, composto pelos campos normais $\hat{\mathbf{n}}_i$, que aponta para fora de V .

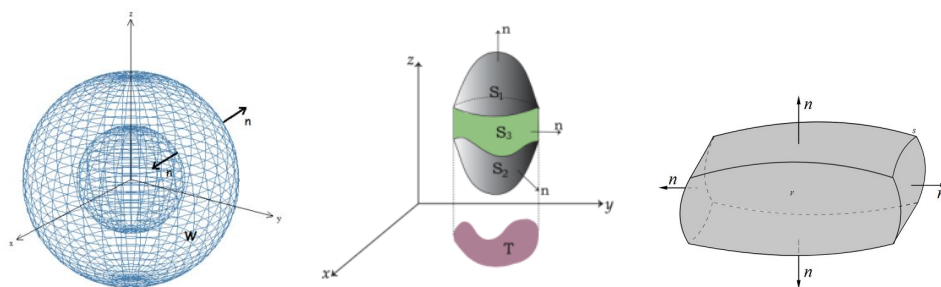


Figura 48: Figuras da internet e Notas de aula de [Marcos Pérez](#)

Teorema 22.1 (Teorema de Gauss em \mathbb{R}^3). *Seja $V \subseteq \mathbb{R}^3$ uma região compacta satisfazendo as condições acima*.*

Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $V \subseteq A$ um campo contínuo com derivadas parciais contínuas.

Então

$$\iiint_V \text{div} F \, dV = \iint_{\partial^+ V} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}] \, d\sigma.$$

* Vale para regiões bastante gerais. Suponhamos que V possa ser decomposta em um número finito de regiões que podem ser vistas na forma

$$V = \{(x_1, x_2) \in B, f(x_1, x_2) \leq x_3 \leq g(x_1, x_2)\}$$

onde f, g são contínuas com derivadas contínuas em B e B é como no Teorema de Green. Isso para qualquer (todas) ordem das variáveis!

Chamamos de **superfície fechada** a borda de uma região assim.

23 Campos solenoidais

Seja $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um c.v. regular derivável com derivadas contínuas.

Lembrete: Se $F = \nabla\varphi$ para algum $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ (F é **conservativo**), isso implica:

- $\int_{\gamma} F \cdot d\vec{s}$ não depende do caminho (só dos extremos: $= \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}_1)$)
- $\oint_{\gamma} F \cdot d\vec{s} = 0$ (em curvas fechadas)
- $\text{rot}F = 0$ (campo **irrotacional**)

viceversa,

- se $\text{rot}F = 0$ e A é simplesmente conexo então $F = \nabla\varphi$.
- se $\text{rot}F = 0$ mas A não é simplesmente conexo então F poderia não ser conservativo.

Se $F = \text{rot}G$ para algum $G : A \rightarrow \mathbb{R}^3$, isso implica (nas condições dos T. Stokes e Gauss):

1. $\iint_{\sigma} F \cdot d\vec{S}$ não depende da superfície (só da borda: $= \int_{\partial+\sigma} G \cdot d\vec{s}$)

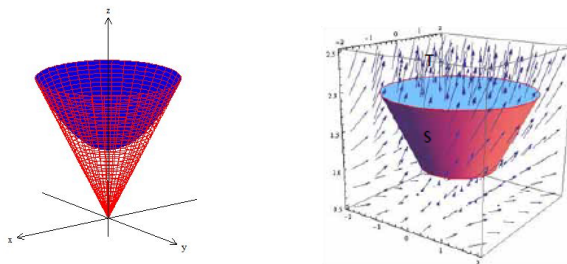


Figura 49: Figuras da internet

2. $\oiint_{\sigma} F \cdot d\vec{S} = 0$ (em superfícies fechadas)

3. $\text{div}F = 0$ (campo **solenoidal**)

viceversa,

- se $\text{div}F = 0$ e A é **fortemente conexo** então valem (a) e (b) e $F = \text{rot}G$.
- se $\text{div}F = 0$ mas A não é fortemente conexo então (a) e (b) poderiam não valer e logo F não seria o rotacional de um campo.

Nesta situação G é dito **potencial-vetor** do campo solenoidal F .

Existem infinitos: $G + \nabla\psi$ também é.

Definição 23.1. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ é dito **fortemente conexo** se é conexo por caminhos e vale uma das seguintes condições equivalentes:

- toda superfície fechada contida em A pode ser deformada a um ponto sem sair de A ,
- dadas duas superfícies contidas em A que tenham a mesma borda, uma pode ser deformada até a outra sem sair de A ,
- toda superfície fechada contida em A é a borda de uma região contida em A .

Exemplos.

- São fortemente conexos:
 - \mathbb{R}^3
 - \mathbb{R}^3 menos uma reta
 - \mathbb{R}^3 menos um semiplano
 - Paralelepípedos,...
- Não são fortemente conexos:
 - \mathbb{R}^3 menos um ponto.

Sugestão de Exercícios:

- [Lista 7](#) do prof. Eugenio Massa: 14 a 23.
 - Listas no e-disciplinas: Teorema da Divergência
 - Listas no e-disciplinas: Revisão para P2, partes I e II
-

24 Aplicações dos Teoremas de Gauss e Stokes

24.1 Interpretações para o rotacional e o divergente

Usando os teoremas de Stokes e de Gauss em \mathbb{R}^3 podemos obter a seguinte interpretação do significado do rotacional e do divergente de um campo tridimensional F :

$$[\operatorname{rot} F(\mathbf{p})] \cdot \hat{\mathbf{v}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_{\partial^+ D_r^{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})} F \cdot d\mathbf{s}}{|D_r^{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})|_2} \right)$$

onde $D_r^{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})$ é o disco de raio r , centro \mathbf{p} e normal $\hat{\mathbf{v}}$.

“A circulação de F sobre a fronteira do disco é aproximadamente o produto da área do disco pela componente do $\operatorname{rot} F$ na direção $\hat{\mathbf{v}}$. Portanto a componente de $\operatorname{rot} F$ na direção $\hat{\mathbf{v}}$ pode ser interpretada como circulação por unidade de área no ponto \mathbf{p} .”

$$\operatorname{div} F(\mathbf{p}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{\partial B_r(\mathbf{p})} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ext}] d\sigma}{|B_r(\mathbf{p})|_3} \right)$$

onde $B_r(\mathbf{p})$ é a bola de raio r e centro \mathbf{p} .

“O fluxo de F através da fronteira da bola é aproximadamente o produto do volume da bola pelo $\operatorname{div} F$. Portanto, o $\operatorname{div} F$ em \mathbf{p} pode ser interpretado como um fluxo por unidade de volume em \mathbf{p} de F através da fronteira da bola.

24.2 Eq. de Maxwell

“As equações de Maxwell são um grupo de equações diferenciais parciais que, juntamente com a lei da força de Lorentz, compõem a base do eletromagnetismo clássico no qual está embebida toda a óptica clássica. O desenvolvimento das equações de Maxwell, e o entendimento do eletromagnetismo, contribuíram significativamente para toda uma revolução tecnológica iniciada no final do século XIX e continuada durante as décadas seguintes.” (Fonte: Wikipédia: [Eq. de Maxwell](#))

24.2.1 Lei de Gauss (para o campo elétrico)

$$\operatorname{div} E = \rho / \varepsilon_0$$

(ρ densidade de carga (escalar)). Integrando:

$$\iint_{\partial V} E \cdot d\vec{S} = Q_V / \varepsilon_0$$

“O fluxo elétrico através de uma superfície fechada é igual³ à carga total na região interior”.

No vácuo, o fluxo elétrico através de uma superfície

$$\iint_{\sigma} E \cdot d\vec{S}$$

depende apenas da $\partial^+\sigma$.

24.3 Lei de Gauss para o campo magnético

$$\operatorname{div} B = 0$$

Integrando

$$\iint_{\partial V} B \cdot d\vec{S} = 0$$

“O fluxo magnético através de uma superfície fechada é sempre igual a zero”.

O fluxo magnético através de uma superfície

$$\iint_{\sigma} B \cdot d\vec{S}$$

depende apenas da $\partial^+\sigma$.

O campo B admite um potencial-vetor (em conjuntos fortemente conexos).

24.4 Lei de Ampere (caso estático - sem correção de Maxwell)

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 \vec{j}$$

(\vec{j} densidade de corrente (Campo Vetorial)). Integrando

$$\int_{\partial^+\sigma} B \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_{\sigma}$$

“A circulação de B ao longo da curva fechada $\partial^+\sigma$ é igual¹ ao fluxo de corrente por σ ”.

³a igualdade é sempre através de alguma constante de proporcionalidade.

24.5 Lei de Ampere (caso geral - com correção de Maxwell)

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 E_t$$

$$\int_{\partial^+ \sigma} B \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{\sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \iint_{\sigma} E \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_{\sigma} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \Phi_{\sigma}(E)$$

“A circuitação de B ao longo da curva fechada $\partial^+ \sigma$ é igual¹ ao fluxo de corrente por σ mais a derivada temporal do fluxo de E por σ ”.

24.6 Lei de Faraday (indução eletromagnética)

$$\operatorname{rot} E = -B_t$$

$$\int_{\partial^+ \sigma} E \cdot d\vec{s} = -\partial_t \iint_{\sigma} B \cdot d\vec{S} = -\partial_t \Phi_{\sigma}(B)$$

A circuitação de E ao longo da curva fechada $\partial^+ \sigma$ é igual¹ ao oposto da derivada do fluxo de B por σ

“A força eletromotriz induzida em qualquer circuito fechado é igual ao oposto da variação do fluxo magnético com o tempo na área delimitada pelo circuito”

25 Exercícios

Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.

25.1 Integral múltipla em retângulos

1. $\iint_R f$ onde $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Resp.: $2/3$
2. $\iint_R f$ onde $f(x, y) = xe^{xy}$ e $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Resp.: $e - 2$
3. $\iiint_R f$ onde $f(x, y) = xyz$ e $R = [0, 1] \times [-1, 0] \times [0, 1]$. Resp.: $-1/8$

25.2 Integral múltipla em conjuntos limitados

4. A função abaixo é integrável no conjunto D dado:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}, & y < x \end{cases} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Se f é integrável em D , escreva $\iint_D f dA$ em integrais iteradas.

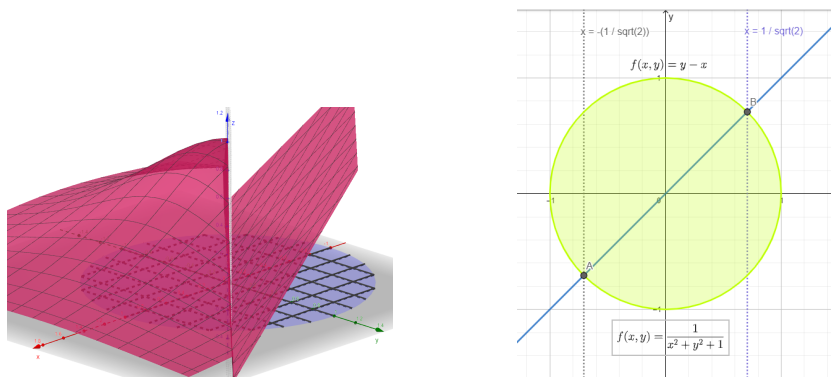


Figura 50: Geogebra, gráfico, Geogebra, domínio

5. Quais alternativas abaixo são corretas:

$$(a) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^x \int_0^1 f(x, y) dx dy$$

$$(b) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^y f(x, y) dx dy$$

$$(c) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy$$

$$(d) \int_0^{1/2} \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy dx = \int_{x^2}^{2x} \int_0^{1/2} f(x, y) dx dy$$

$$(e) \int_0^{1/2} \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy dx = \int_0^{1/2} \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx dy$$

$$(f) \int_0^{1/2} \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy dx = \int_0^{1/4} \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_{1/4}^{1/2} \int_{y/2}^{1/2} f(x, y) dx dy$$

6. Seja D o sólido limitado por $y = x^2$, $x = z$, $y = x$ e $z = 0$. Escreva a integral tripla $\iiint_D (x + 2y) dV$ em integrais iteradas. (Resp.: $2/15$)

7. Desenhe a região de integração de

$$I = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{y/3} z dx dy dz \quad (= 27/8)$$

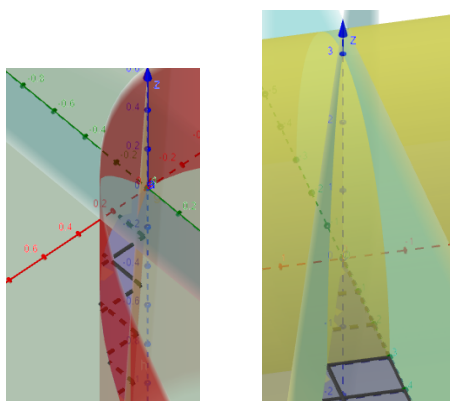


Figura 51: Geogebra (Sólidos dos Ex. 6 e 7)

25.3 Aplicações de integral múltipla

8. Usando integral dupla, calcule o volume do sólido limitado por $y^2 + z^2 = 4$, $x = 2y$, no primeiro octante. (Resp.: $16/3u^3$)
9. Usando integral dupla, calcule a área da região limitada por $x = y^3$, $x + y = 2$ e $y = 0$. (Resp.: $5/4u^2$)
10. Usando integração tripla, calcule o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$. (Resp.: $4\pi u^3$)
11. Usando integração, expresse a área da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano $z = 1$. (Resp.: $6.26u^2$)
12. Determine a área da superfície $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$. (Resp.: $9\sqrt{30}\pi u^2$)
13. Faça um esboço do sólido cujo volume é dado por
 - (a) $\int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy dx.$
 - (b) $\int_0^5 \int_0^3 (5 - x) dy dx.$
14. Calcule o volume do sólido no primeiro octante limitado por $x + z^2 = 1$, $y = x$ e $x = y^2$. (Resp. $\frac{15\pi - 32}{120}u^3$)

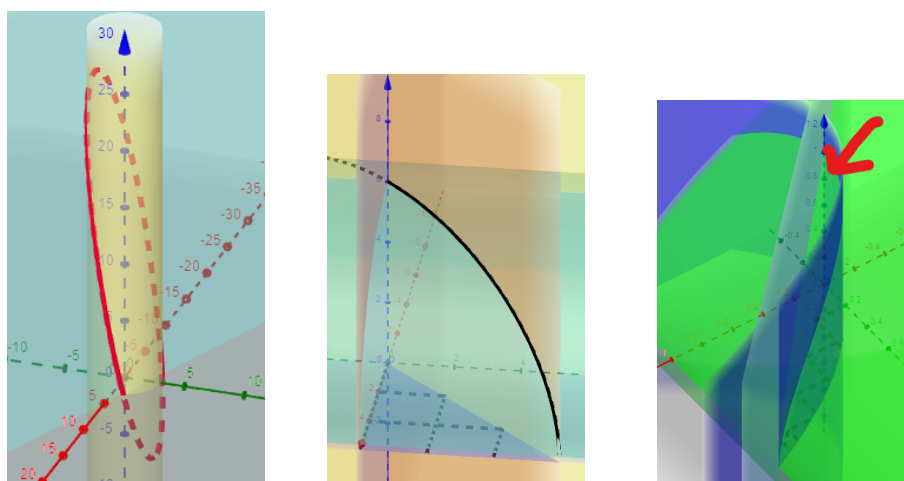


Figura 52: [Geogebra](#) (Ex. 12); [Geogebra](#) (Ex. 13) [Geogebra](#) (Ex. 14)

25.4 Mudança de variável em integral múltipla

15. Faça uma mudança de variáveis para calcular

$$I = \iint_D e^{(x+y)/(x-y)} dA$$

onde D é a região limitada pelo trapézio de vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ e $(0, -1)$. (Resp.: $\frac{3}{4}(e - \frac{1}{e})$)

16. Usando integral dupla, expresse a área da região limitada por $r = 1 - \sin \theta$. (Resp.: $\frac{3\pi}{2}u^2$)

17. Calcule $\iint_D y dA$, onde D é a região no primeiro quadrante limitada por $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$ e $y = 0$. (Resp.: $9 - \frac{9\sqrt{2}}{2}u^2$)

18. Calcule a área da região limitada por $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ e $y \geq 0$. (Resp.: $\frac{5\pi}{2}u^2$)

19. Calcule $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$. (Resp.: $\frac{16}{9}$)

20. Calcule o volume do sólido limitado por $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ e $z = 4$. (Resp.: $6\pi u^3$)

21. Calcule o volume do sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x + y + z = 5$ e pelos planos coordenados. (Resp.: $\frac{25\pi}{4} - \frac{38}{3}u^3$)

22. Esboce o sólido limitado por $\rho = 2$, $\rho = 4$ e acima de $\varphi = \pi/3$ e expresse seu volume usando integral tripla. (Resp.: $\frac{56\pi}{3}u^3$)

23. Faça um esboço do sólido cujo volume é dado por (Resp.: ver [Geogebra](#))

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} \int_r^3 r dz d\theta dr$$

24. Expresse o volume do sólido (nas 3 coordenadas) que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo da superfície $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$. (tarefa! - Resp.: $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$)

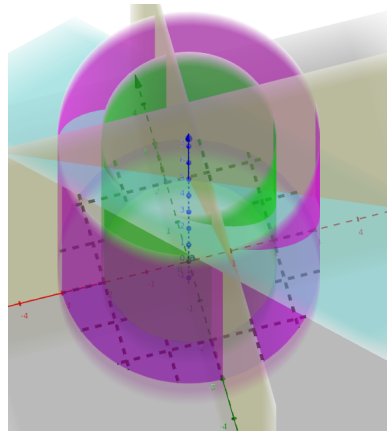
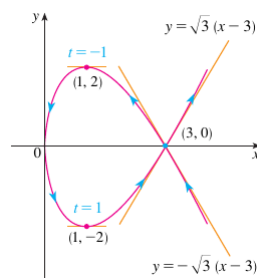


Figura 53: Geogebra (Ex. 21)

25.5 Curvas

25. Discussão sobre ser simples, fechada, regular, traço e sentido para as curvas:

- (a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
- (b) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$
- (c) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$
- (d) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1)$, $t \in [0, 2\pi]$
- (e) $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ (cálculo 2 - Aula 10)
- (f) uma parametrização para $y = x^4$ do ponto $(1, 1)$ ao ponto $(0, 0)$
- (g) $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3t)$, $t \in \mathbb{R}$

Figura 54: Stewart, Cálculo, vol.2: $\gamma(t) = (t^2, t^3 - 3t)$

25.6 Integral de linha de função escalar

26. (a) Calcule $\int_{\gamma} (2 + x^2y) ds$, onde γ é a metade superior de $x^2 + y^2 = 1$.
 (Resp.: $2\pi + \frac{2}{3}$) **Atenção:** se usarmos a parametrização do círculo dada por $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$, para quais valores de t percorre-se a metade superior do círculo?
- (b) Qual o comprimento da curva γ do item anterior? (Resp.: π)
27. $\int_{\gamma} 2x ds$, onde γ é dada pelo arco $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de $(1, 1)$ a $(1, 2)$. (Resp.: $\frac{11+5\sqrt{5}}{6}$)
28. $\int_{\gamma} y^2 dx + x dy$, onde γ é:
- (a) o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Resp.: $-\frac{5}{6}$)
- (b) o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Resp.: $\frac{245}{6}$)

25.7 Revisão e aprofundamento: Integrais duplas e triplas

- (24) Expresse o volume do sólido (nas 3 coordenadas: cartesianas, cilíndricas e esféricas) que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo da superfície $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$. (Resp.: $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$)
29. Considere $\iiint_D z dx dy dz$ onde D é o sólido definido pelas desigualdades $x^2 + y^2 \leq z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ e $z \geq 0$: escrevas as integrais iteradas usando as 3 coordenadas (cartesianas, cilíndricas e esféricas)
30. Calcule $\iint_D (x - y)e^{x^2 - y^2} dx dy$, onde D é o retângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ e $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. (Resp.: $\frac{1}{6}(e^6 - 7)$)
31. Calcule a área dentro de $r = 4 \sin \theta$ e fora de $r = 2$ (Resp.: $\frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$).
Esboce a região no plano xy .
32. Calcule o volume do sólido acima do plano xy , limitado por $z = x^2 + 4y^2$ e por $x^2 + 4y^2 = 4$. (Resp.: 4π)

25.8 Integral de linha de Campo Vetorial

33. $F(x, y) = (-y, x) = -y \vec{i} + x \vec{j}$ é um c.v. em \mathbb{R}^2
34. $F(x, y, z) = (0, 0, z) = z \vec{k}$ é um c.v. em \mathbb{R}^3
35. $F(x, y) = (y^2, x)$,
- (a) o segmento de reta de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Resp.: $-\frac{5}{6}$)
- (b) o arco de parábola $x = 4 - y^2$ de $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Resp.: $\frac{245}{6}$)
36. $F(x, y) = (y, x)$ e γ dos itens (a) e (b) anteriores. (Resp.: -15)

25.9 Campo Vetorial Conservativo: independência do caminho

37. Determine se F é um campo vetorial conservativo em A (quais resultados podem ser utilizados em cada item?) e, no caso afirmativo, encontre uma função potencial.

(a) $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

(b) $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

(c) $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, $A = \{(x, y) : y > 0\}$

(d) $F(x, y) = (2y^2, x + 2y)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

(e) $F(x, y) = (y, x + 2y)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

(f) $F(x, y) = (y, x + 2y)$, $A = \mathbb{R}^2$

(g) $F(x, y, z) = (e^{x+y^2} + zy, 2ye^{x+y^2} + zx, xy + z)$, $A = \mathbb{R}^3$

38. Calcule $\int_{\gamma} F \cdot dr$, onde:

Sabemos: $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, então $\int_{\gamma} F \cdot dr = 2\pi$.

(a) $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ e $\gamma(t) = (2 + \cos t, 3 + \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $F(x, y) = (y, x + 2y)$ e γ é a semi-circunferência superior do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(2, 1)$.

(c) $F(x, y) = (\cos(xy) - xy \sin(xy), -x^2 \sin(xy))$ e γ é o segmento de reta de $(3, \pi)$ a $(2, \frac{\pi}{4})$ (tarefa!! Resp.: 3)

25.10 Teorema de Green (Gauss, Stokes no plano)

39. Calcular a área da região limitada por $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, onde $a > 0$ e $b > 0$.

40. Calcule $\oint_{\gamma} F \cdot ds$, onde $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$ e:

(a) γ é a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, no sentido anti-horário;

(b) γ é uma curva simples, fechada, regular por partes, orientada positivamente que não contém a origem em seu interior (não enlaça a origem);

(c) γ é uma curva simples, fechada, regular por partes, orientada positivamente que contém a origem em seu interior (enlaça a origem).

(d) γ é uma curva simples, regular por partes de $(1, 0)$ a $(2, 2)$ sem passar pela origem;

41. Calcule $\oint_{\gamma} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$, com γ como nos itens (a)-(d) do exercício anterior.

25.11 Integrais de superfície de função escalar e de c.v.

42. Calcule $\int_{\sigma} f(x, y, z) dS$, em que

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2}$, σ é a parte de $z^2 + x^2 = 1$ que se encontra dentro de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(b) $f(x, y, z) = z$, σ é a parte de $z^2 = x^2 + y^2$ tal que $4z \geq x^2 + y^2 + 3$.

43. Calcule $\int_{\sigma} F \cdot dS$, onde

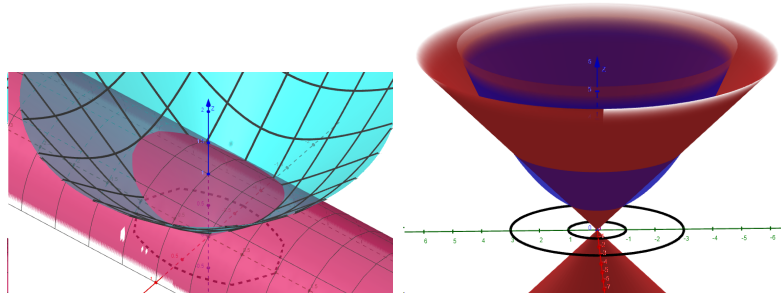


Figura 55: Geogebra

- (a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ e σ é o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, com normal que aponta para o eixo z .

25.12 Teorema de Stokes

44. Calcule $\int_{\gamma} F \cdot ds$ onde

- (a) $F(x, y, z) = x^2 y \hat{i} + \frac{1}{3} x^3 \hat{j} + xy \hat{k}$ e γ é a curva de intersecção da sela $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

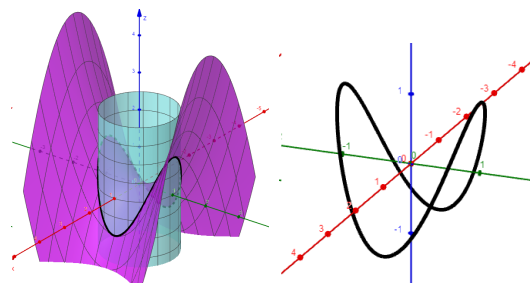


Figura 56: Geogebra

25.13 Teorema de Gauss

45. Calcule $\int_{\sigma} F \cdot dS$ onde $F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$ e

- (a) σ é uma superfície fechada que não contém a origem em seu interior (não enlaça a origem), orientada com normal exterior.

- (b) σ é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, orientada com normal que se afasta do eixo- z (para fora), orientada com normal exterior.
- (c) σ é uma superfície fechada que contém a origem em seu interior (enlaça a origem), orientada com normal exterior.

25.14 Revisão e aprofundamento: Integrais de linha e de superfície

Integrais de linha: revise as definições e propriedades

46. Sejam $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um c.v. de classe C^1 , $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ curva regular, $\widehat{\mathbf{t}}$ vetor tangente unitário a γ e $\widehat{\mathbf{n}}$ vetor normal unitário a γ . É verdade que: **(tarefa para casa!)**

(a) $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$?

(b) $\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$?

(c) $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$?

(d) $\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\gamma} [F \cdot \widehat{\mathbf{t}}] ds$?

(e) $\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{\gamma} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] ds$?

(f) Se $n = 2$ e $F = (P, Q)$, $\int_{\gamma} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] ds = \int_{\gamma} P dy - Q dx$?

(g) Se $n = 3$ e $F = (P, Q, R)$, $\int_{\gamma} [F \cdot \widehat{\mathbf{t}}] ds = \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$?

(h) $\int_{\gamma} F \cdot ds = \int_{-\gamma} F \cdot ds$?

(i) $\int_{\gamma} f ds = \int_{-\gamma} f ds$?

(j) Se $n = 2$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, $\int_{\partial B} F \cdot ds = \iint_B \text{rot} F \cdot \widehat{\mathbf{k}} dx dy$?

(k) Se $n = 2$ e $B \subset \mathbb{R}^2$ um compacto, $\int_{\partial B} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}] ds = \iint_B \text{div} F dx dy$?

Integrais de superfície: revise as definições e propriedades

47. Sejam $F : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um c.v. de classe C^1 , $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $\sigma : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow A$ superfície regular orientada com o campo normal unitário $\widehat{\mathbf{n}}$, e $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ curva regular. É verdade que: **(tarefa para casa!)**

- (a) Se $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$, vale $\int_{\sigma} f dS = \iint_B f(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \wedge \sigma_v) dudv$?
- (b) Se $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$, vale $\int_{\sigma} F \cdot dS = \iint_B F(\sigma(u, v)) \cdot (\sigma_u \wedge \sigma_v) dudv$?
- (c) Se $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$, vale $\int_{\sigma} f dS = \iint_B f(\sigma(u, v)) \cdot \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| dudv$?
- (d) $\int_{\sigma} f dS$ depende da direção de $\hat{\mathbf{n}}$?
- (e) $\int_{\sigma} F \cdot dS$ depende da direção de $\hat{\mathbf{n}}$?
- (f) $\int_{\sigma} F \cdot dS = \int_{\sigma} [F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma$?
- (g) $\int_{\partial\sigma} F \cdot ds = \int_{\sigma} [\text{rot } F \cdot \hat{\mathbf{n}}] d\sigma$?
- (h) Se $V \subset A$ é um compacto, $\int_{\partial V} [\text{rot } F \cdot \hat{\mathbf{n}}] dS = \iiint_V \text{div } F dV$?

Campo conservativo

48. Determine se F é um campo vetorial conservativo em A (quais resultados podem ser utilizados em cada item?). Se sim, encontre uma função potencial. Se não, encontre caminhos distintos γ_1 e γ_2 ligando pontos $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in A$ tais que $\int_{\gamma_1} F \cdot ds \neq \int_{\gamma_2} F \cdot ds$.

(a) $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = x, x \geq 0\}$

tarefa para casa!

(b) $F(x, y) = (2y + x, 2x - 1)$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ (Resp.: F é c.v.c.
Dica: A é simplesmente conexo?)

(c) $F(x, y) = (y + x, y - x)$, $A = \mathbb{R}^2$. (Resp.: F não é c.v.c.)

49. Calcule $\int_{\gamma} F \cdot ds$ onde $F(x, y, z) = (2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2)$ e

- (a) * γ é o segmento de reta de $(1, -1, 1)$ a $(0, 0, 0)$ seguido pelo arco de parábola $y = z^2$ de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$. (Resp.: 12). **Dica:** verifique se pode, por exemplo, mudar o caminho sem que se altere o valor da integral.
- (b) $\gamma(t) = (9 \cos(t), 4 \sin(t), 5)$, $t \in [0, 2\pi]$. (Resp.: 0)

Teoremas de Green/Stokes e Gauss no plano

50. Considere γ o arco de parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 2$, seguido pelo segmento de $(2, 3)$ a $(-1, 0)$. Calcule

(a) $\int_{\gamma} \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \hat{n} ds$, onde \hat{n} é o vetor normal unitário exterior; (Resp.: 2π).

Dica: note que $\text{int}(\gamma) \not\subseteq \text{dom } F$: “isole o problema” e use o Teorema de Gauss.

(b) $\int_{\gamma} \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \cdot \hat{n} ds$, onde \hat{n} é o vetor normal unitário exterior; (Resp.: 0).

Dica: $\text{int}(\gamma) \not\subseteq \text{dom } F$

(c) $\int_{\gamma} (xe^y, e^{x^2} \cos x) \cdot \hat{n} ds$, onde \hat{n} é o vetor normal unitário exterior. (Resp.: 0).

51. Calcule $\int_{\gamma} F \cdot \hat{n} ds$, onde \hat{n} é o normal com componente $y \geq 0$ e:

(a) * $F(x, y) = (2x^2y - x \cos y)\hat{i} + (\sin y - 2xy^2 + y)\hat{j}$,

$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $t \in [\pi/2, \pi]$; (Resp.: π). **Dica:** o caminho dado não é fechado e o c.v. não é conservativo: feche o caminho escolhendo caminhos convenientes e aplique o Teorema Gauss. Atenção para a orientação do vetor normal! E se $t \in [\pi, 3\pi/2]$??

(b) $F(x, y) = y^2\hat{i}$, $\gamma(t) = (2 \cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$. (Resp.: 0).

Área de superfície

52. Calcule a área da superfície $z = xy$ que se encontra dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Resp.: $\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$).

Integrais de superfície

53. Calcule $\int_{\sigma} F \cdot dS$, onde

- (a) $F(x, y, z) = (x, y, 0)$ e σ é a parte de $z^2 = x^2 + y^2 - 1$, $0 \leq z \leq 1$, com normal que se afasta do eixo z . (Resp.: $\frac{8}{3}\pi$).
- (b) $F(x, y, z) = (y, x, z)$ e σ é a fronteira do sólido limitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$, com normal que aponta para fora. (Resp.: $\frac{\pi}{2}$)
 Cuidado para o normal em cada superfície que compõem σ fornecer a orientação pedida!

Teorema de Stokes

54. Calcule $\int_{\gamma} F \cdot ds$ onde

- (a) $F(x, y, z) = e^{-x}\hat{i} + e^x\hat{j} + e^z\hat{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante orientado com vetor normal para cima. (Resp.: $2e - 4$.)
- (b) * $F(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{j} + \sin(1 + z^{10})\hat{k}$ e γ é a curva de intersecção de $x^2 + y^2 = 1$ com $z = \sqrt[3]{\sin(y)} + 5$ orientada no sentido anti-horário quando vista de cima. (Resp.: 2π . Dica: Note que $\text{int}(\gamma) \not\subseteq \text{dom}F$ (veja Figura 8). Então considere, por exemplo, γ_1 a curva cujo traço é $x^2 + y^2 = 1$ e aplique o Teorema de Stokes na superfície que é a parte do cilindro entre γ e γ_1 .)

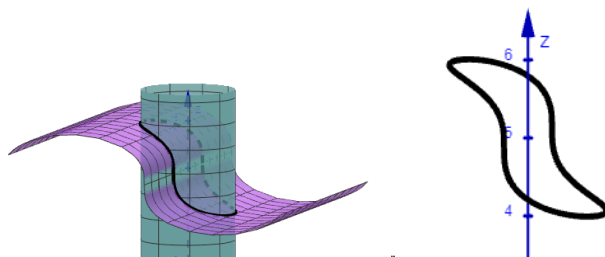


Figura 57: Geogebra

Teorema de Gauss

55. Calcule $\int_{\sigma} F \cdot dS$ onde

(a) $F(x, y, z) = (x^3, 2xz^2, 3y^2z)$ e σ é a superfície do sólido limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano- xy orientada com normal que se afasta do eixo- z (para fora). (Resp.: 32π)

(b) $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + z^2, \frac{x}{x^2 + y^2}, xy \right)$ e σ é a fronteira de um sólido contido em $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo-}z\}$, orientada com normal exterior. (Resp.: 0. *Dica: $\text{dom}F$ é fortemente conexo?*)

(c) $F(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$ e σ é a superfície do sólido limitado por $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 0$ orientada com normal que se afasta do eixo- z (para fora). (Resp.: $\frac{184}{35}$.)