Este material é a junção do slides usados durante as aulas da Prof^a Peron no curso SMA354-Cálculo 2, no ICMC-USP, em 2022.

Conteúdo

1 Integral de Riemann

1.1 Caso (I): Integrais definidas (próprias)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **limitada** **(com** $[a, b] \subset \mathbb{R}$ **limitado)**

Partição de $[a, b]$: é um conjunto finito de pontos da forma:

$$\mathcal{P} = \{x_0, ..., x_n : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{n-1} < x_n = b\} \ ;$$

$$\Delta_i x := x_i - x_{i-1}; \qquad \|\mathcal{P}\| := \max\{\Delta_i x : i = 1, \ldots, n\}$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Defina a Soma de Riemann (irregular) (regular) (Wikipédia):

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

Considere o limite

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$$

- quando o limite acima existe e é um número real $L \in \mathbb{R}$ independente da escolha dos pontos ξ_i em $[x_{i-1}, x_i]$, isto é:

  $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \ \forall \mathcal{P}, \|\mathcal{P}\| < \delta, \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ temos } \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L \right| < \varepsilon,$$

  dizemos que

  - f é **Riemann integrável no sentido próprio em** $[a, b]$,
  - L é a **integral definida (de Riemann) de f em** $[a, b]$: $\quad L = \int_a^b f$;

- se tal L não existir (ou depender da escolha dos $\xi' s$), dizemos que

  - f **não é Riemann integrável em** $[a, b]$.

Área

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ a região do plano definida por
$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a,b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$
onde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \geq 0$. Então,
$$\int_a^b f \geq 0$$
e a área da região R é dada por
$$\mathbf{A(R)} := \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}$$

Observação: Estamos interessados em estudar quando uma dada função é "integrável em um dado intervalo I"e como encontrar sua integral em I.

Neste curso, integrabilidade é no sentido de Riemann, e então quando dissermos "**f é integrável**" será equivalente a dizer "**f é Riemann integrável**".

Primeiro estamos considerando o caso em que **f é uma função limitada definida em intervalo I fechado e limitado**: dizemos que f é (ou não) **Riemann integrável no sentido próprio** em I. Neste contexto aprenderemos a encontrar sua integral em I chamada usualmente de **integral definida de f em I**.

Quando também considerarmos os casos em que a **função f pode ser não limitada em I ou pode estar definida em intervalo I não limitado**, então diremos que f é (ou não) **Riemann integrável no sentido impróprio** em I. Também aprenderemos a encontrar a integral de f em I, chamada usualmente de **integral imprópria de f em I**.

Propriedades

- se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável, e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $\{x \in [a,b] : f(x) \neq g(x)\}$ contém um número finito de pontos, **então g é integrável e $\int_a^b f = \int_a^b g$.**

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções limitadas e integráveis em $[a,b]$. Então

- $\alpha f + \beta g$ **é integrável em** $[a,b]$ e
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_a^b f \right) + \beta \left(\int_a^b g \right), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

- $|f|$ **é integrável em** $[a,b]$ e
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|,$$

- fg **é integrável em** $[a,b]$ **,**

- Se $f \geq g$ **em** $[a,b]$**, então**
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ limitada.

- Se $[a,b] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a,b]$ e $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$, **então f é integrável em $[\alpha, \beta]$** .

- Se $[a,b], [b,c] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a,b]$ e em $[b,c]$, **então f é integrável em $[a,c]$ e vale**
$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} + \int_{\mathbf{b}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f}$$

Definição: Se f é integrável em $[a,b]$, definimos
$$\int_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} \mathbf{f} := -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} \qquad e \qquad \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}} \mathbf{f} := \mathbf{0}.$$

Desta maneira a fórmula $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ **vale seja qual for a ordem de** a, b, c **(desde que tudo faça sentido!)**.

Se f é limitada em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$?

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Quando f (limitada) é integrável em $[a,b]$?

Teorema (integrabilidade das contínuas).
Se f é contínua em $[a,b]$ **então f é Riemann integrável em $[a,b]$.**

Teorema (integrabilidade das contínuas por partes).
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e contínua exceto possivelmente em um número finito de pontos, **então f é Riemann integrável em $[a,b]$.**

Como calcular a integral definida de f?

Lembrete: Sejam I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e $F : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $F' = f$ em I dizemos que **F é primitiva de f em I** e vale:

- se F é uma primitiva de f em I então $F + c$ $(\forall\, c \in \mathbb{R})$ também é
- se F, G são primitivas de f em I então $F - G = constante$.
  Escrevemos
  $$\int f = F + c, \;\; c \in \mathbb{R}.$$

$\int f$ = **integral indefinida de f** = “a primitiva na forma mais geral"de f = a família (conjunto) de todas as primitivas de f (num certo intervalo fixado)

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1^o Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $[a, b] \subset I$. Se $F : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f em $[a, b]$. Então,

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{F}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} = \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}).$$

(Resumo das Primitivas)

Teorema do Valor Médio para integral ou Teorema da Média Integral

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada ($m \leq f \leq M$ em $[a, b]$) e integrável, então

- $m \leq \dfrac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$
- se f é também contínua, então **existe** $c \in (a, b)$ **tal que**

$$\frac{\int_a^b \mathbf{f}}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} = \mathbf{f}(\mathbf{c}) \quad \text{(chamado Valor Médio de } f \text{ em } [a,b])$$

2^o Teorema Fundamental do Cálculo

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $c \in [a, b]$. Defina a **função integral** $F_c : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Então,

- F_c **é derivável em** $[a, b]$
- $F_c' = f$ **em** $[a, b]$, (*i.e,* F_c *é primitiva de* f *em* $[a, b]$).

Atenção:

- $\displaystyle\int_a^b f$ é um número,
- $\displaystyle\int f$ é uma família de funções,
- $\displaystyle\int_a^x f$ é uma função.

Derivação da função integral

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua (logo integrável em $[a, b]$) e $c \in [a, b]$.

Seja

$$\mathbf{F} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $x \in [a, b]$. (2^o TFC)

Agora seja

$$\mathbf{G} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $x \in [a, b]$.

Agora seja $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ derivável e

$$\mathbf{G} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

Agora sejam $g, h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ deriváveis e

$$\mathbf{G} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{h}(\mathbf{x})}^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

Área

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \quad 0 \le y \le f(x)\right\}$$

onde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \geq 0$.
Então a área da região R é dada por (definição)

$$\mathbf{A_R = \int_a^b f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \quad f(x) \le y \le 0\right\}$$

onde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \leq 0$.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R = -\int_a^b f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \quad 0 \le y \le f(x) \ \mathit{ou} \ 0 \ge y \ge f(x)\right\}$$

onde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R = \int_a^b |f|}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \quad f(x) \le y \le g(x)\right\}$$

onde $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são limitadas, integráveis e $f \leq g$.
Então a área da região R é dada por

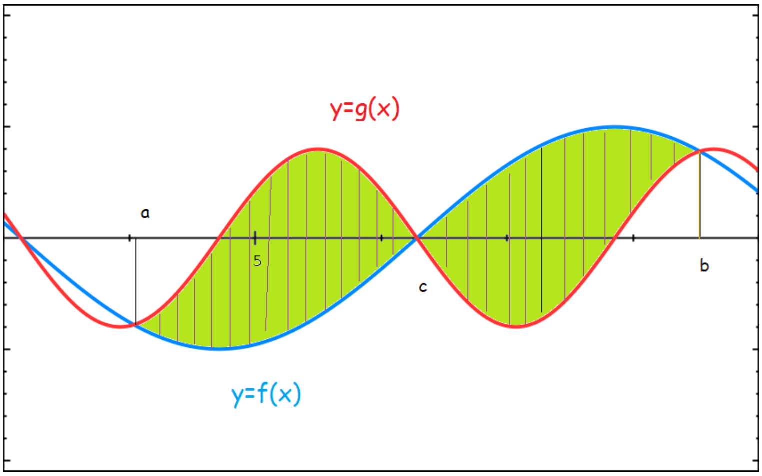
$$\mathbf{A_R = \int_a^b g - f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a,b], \quad f(x) \leq y \leq g(x) \text{ } ou \text{ } g(x) \leq y \leq f(x)\Big\}$$

onde $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{g} - \mathbf{f}| = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{g(x)} - \mathbf{f(x)}|\, \mathbf{dx}$$

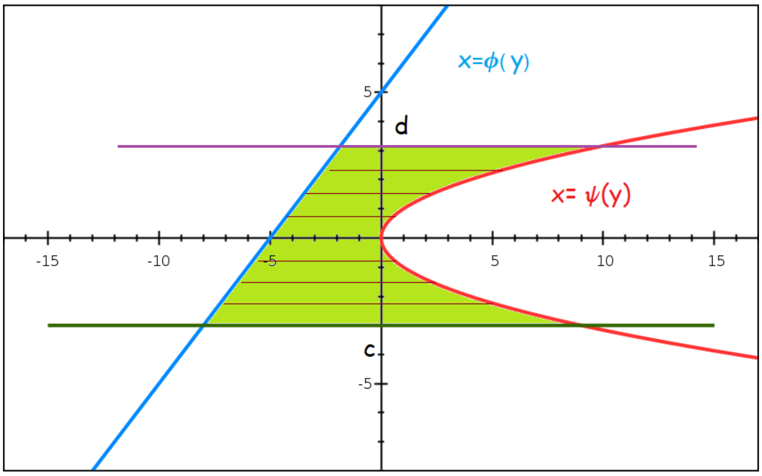


- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [c,d], \quad \phi(y) \leq x \leq \psi(y) \text{ } ou \text{ } \psi(y) \leq x \leq \phi(y)\Big\}$$

onde $\phi, \phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}} |\psi - \phi| = \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}} |\psi(\mathbf{y}) - \phi(\mathbf{y})|\, \mathbf{dy}$$



2 Técnicas de Integração

• Linearidade:
Sejam f, g funções contínuas. Então,

$$\int (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g})\mathbf{dx} = \alpha \left(\int \mathbf{f} \right) + \beta \left(\int \mathbf{g} \right).$$

Na integral definida:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g})\mathbf{dx} = \alpha \left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} \right) + \beta \left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{g} \right).$$

• Substituição (mudança de variável):
Sejam f contínua e g contínua com derivada contínua. Então,

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{x})), \qquad \text{onde} \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{u})\mathbf{du}$$

Interpretando como mudança de variável:

- *substituímos* $g(x) = u$ *e* $du = g'(x)dx$,
- *calculamos a primitiva de* f
- *colocamos de volta* $u = g(x)$

Na integral definida:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \quad F(g(x))\Big|_a^b = \quad F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

e interpretando como mudança de variável:

- *substituímos* $g(x) = u$ *e* $du = g'(x)dx$,
- *substituímos os extremos de integração, mantendo a ordem:* $\begin{cases} x = a \Longrightarrow & u = g(a) \\ x = b \Longrightarrow & u = g(b) \end{cases}$

Sites conhecidos que calculam primitivas:

Integral Calculator; Wolfram Alpha; Symbolab

Cuidado com os resultados!

$$\int_0^{2\sin(t)} x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}$$

Passos

$$\int_0^{2\sin(t)} x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

Aplicar integração por substituição

$$= \int_4^{4-4\sin^2(t)} -\frac{\sqrt{u}}{2}\,du$$

Remover a constante: $\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\int_4^{4-4\sin^2(t)} \sqrt{u}\,du$$

Aplicar a regra da potência

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{4-4\sin^2(t)}$$

Simplificar $4-4\sin^2(t)$: $4\cos^2(t)$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^{4\cos^2(t)}$$

Calcular os limites: $\frac{16}{3}\cos^3(t)-\frac{16}{3}$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{16}{3}\cos^3(t)-\frac{16}{3}\right)$$

Simplificar

$$= -\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sin(t)} r\sqrt{4-r^2}\,drdt = \frac{16\pi}{3} \quad (\text{Decimal: } 16.75516\ldots)$$

Passos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\sin(t)} r\sqrt{4-r^2}\,drdt$$

$$\int_0^{2\sin(t)} r\sqrt{4-r^2}\,dr = -\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}\right)dt$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{8\left(\cos^3(t)-1\right)}{3}\right)dt = \frac{16\pi}{3}$$

$$= \frac{16\pi}{3}$$

• Integração por partes:

Sejam f, g funções contínuas e deriváveis com derivadas contínuas. Então,

$$\int \underbrace{f(t)}_{\mathbf{u}}\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{\mathbf{dv}} = \underbrace{f(t)}_{\mathbf{u}}\,\underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{t})}_{\mathbf{v}} - \int \underbrace{\mathbf{g}(\mathbf{t})}_{\mathbf{v}}\,\underbrace{\mathbf{f}'(\mathbf{t})\,\mathbf{dt}}_{\mathbf{du}}.$$

. . . .

Note:

$$\begin{cases} u = f(t), & \mathbf{du} = \mathbf{f}'(\mathbf{t})\,\mathbf{dt} \\ dv = g'(t)\,dt, & \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{t}) \end{cases} \implies \boxed{\int \mathbf{u}\,\mathbf{dv} = \mathbf{uv} - \int \mathbf{v}\,\mathbf{du}}$$

. . . .

Filme: Vivir dos veces *(Live Twice, Love Once) personagem principal ensina que a regra se lê:*

*"**u**n **d**ía **v**i **u**na **v**aca - **v**estida **d**e **u**niforme"*

Karina, Colombia *diz que o lado direito da igualdade se lê:*

*"**u**na **v**aca **no** **se** **v**iste **d**e **u**niforme"*

. . . .

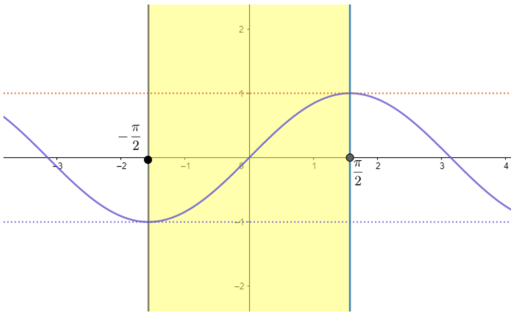
Na integral definida:

$$\begin{aligned} \int_a^b \underbrace{f(t)}_{u}\,\underbrace{g'(t)\,dt}_{dv} &= \Bigg[\underbrace{f(t)}_{u}\,\underbrace{g(t)}_{v}\Bigg]_a^b - \int_a^b \underbrace{g(t)}_{v}\,\underbrace{f'(t)\,dt}_{du} \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(t)f'(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

• **Substituição Trigonométrica/Hiperbólica:** usada quando aparece termo das formas $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ $(a > 0)$, se não tiver substituição melhor

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = a \sin\theta$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $dx = a\cos\theta d\theta$:

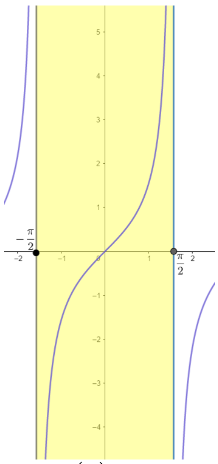
$$\boxed{|x| \leq a \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1}$$



2. $\sqrt{a^2 + x^2}$:

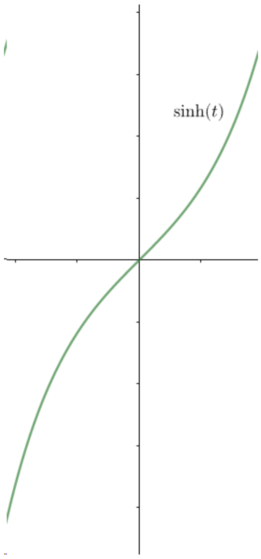
• $x = a\tan\theta$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $dx = a\sec^2\theta d\theta$:

$$\boxed{x \in \mathbb{R}}$$



• $x = a\sinh(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $dx = a\cosh(t)dt$

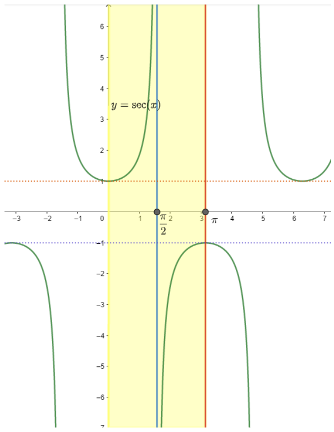
$$\boxed{x \in \mathbb{R}}$$



3. $\sqrt{x^2 - a^2}$:

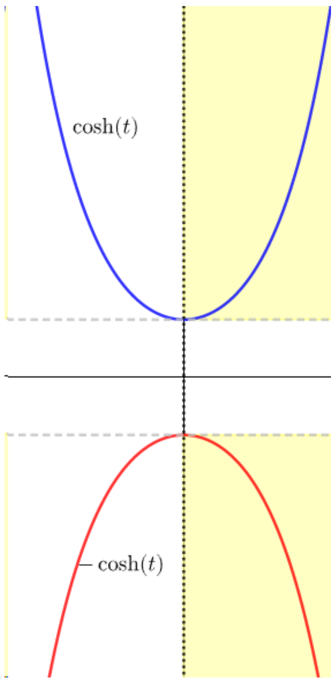
- $x = a\sec\theta$, com $\begin{cases} \theta \in [0, \frac{\pi}{2}), & se\ \frac{x}{a} \geq 1 \\ \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi], & se\ \frac{x}{a} \leq -1 \end{cases}$; $dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$:

$$\boxed{|x| \geq a \Longleftrightarrow \frac{x}{a} \geq 1 \text{ ou } \frac{x}{a} \leq -1}$$



- $x = \pm a\cosh(t), \quad t > 0, \quad dx = \pm\sinh(t)$

$$\boxed{|x| \geq a \Longleftrightarrow \frac{x}{a} \geq 1 \text{ ou } \frac{x}{a} \leq -1}$$



Atenção: o cálculo de algumas integrais que pode ser bastante longo quando usado substituição trigonométrica pode ser bastante simples quando utilizado função hiperbólica. Fique atento! 

- **Frações Parciais:**

Aplicável quando o integrando é uma **função racional** na forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad grau(P) < grau(Q),$$

onde o polinômio Q pode ser decomposto em fatores lineares e/ou quadráticos irredutíveis (distintos ou com repetições):

$$Q(x) = (a_1x+b_1)^{k_1}(a_2x+b_2)^{k_2}\dots(a_rx+b_r)^{k_r}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{s_1}\dots(a_tx^2+b_tx+c_t)^{s_t}$$

Neste caso, existem únicas constantes A_j, B_j de modo que se pode decompor a fração P/Q da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(a_1x+b_1)} + \frac{A_2^1}{(a_1x+b_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^1}{(a_1x+b_1)^{k_1}} + \\
&\vdots \\
&+ \frac{A_1^r}{(a_rx+b_r)} + \frac{A_2^r}{(a_rx+b_r)^2} + \quad \dots\dots \quad + \frac{A_{k_r}^r}{(a_rx+b_r)^{k_r}} + \\
&+ \frac{B_1^1x+C_1^1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2} + \dots + \frac{B_{s_1}^1x+C_{s_1}^1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{s_1}} + \\
&\vdots \\
&+ \frac{B_1^tx+C_1^t}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \frac{B_2^tx+C_2^t}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} + \quad \dots\dots \quad + \frac{B_{s_t}^tx+C_{s_t}^t}{(a_tx^2+b_tx+c_t)^{s_t}}.
\end{aligned}$$

Note: para o termo na decomposição de Q que aparece k_i (ou r_j) vezes, tem-se k_i (ou r_j) "frações parciais" relativas a esse termo.

Resumindo, relativo ao termo linear que aparecer r vezes $(\mathbf{ax+b})^{\mathbf{r}}$ temos que escrever a soma das r frações:

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{ax+b}} + \frac{\mathbf{A_2}}{(\mathbf{ax+b})^{\mathbf{2}}} + \dots + \frac{\mathbf{A_r}}{(\mathbf{ax+b})^{\mathbf{r}}},$$

relativo ao termo quadrático **irredutível** que aparecer r vezes $(\mathbf{ax^2+bx+c})^{\mathbf{r}}$ temos que escrever a soma das r frações:

$$\frac{\mathbf{B_1x+C_1}}{\mathbf{ax^2+bx+c}} + \frac{\mathbf{B_2x+C_2}}{(\mathbf{ax^2+bx+c})^{\mathbf{2}}} + \dots + \frac{\mathbf{B_rx+C_r}}{(\mathbf{ax^2+bx+c})^{\mathbf{r}}}.$$

Note que:

1. $(a \neq 0)$

$$\int \frac{A}{ax+b}\,dx \overset{u=ax+b}{=} \frac{A}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. $(a \neq 0)$

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx \overset{u=ax+b}{=} \frac{A}{a}\int u^{-n}\,du = \frac{A}{a}\frac{1}{(-n+1)(ax+b)^{n-1}}+k, \quad k \in \mathbb{R}, \ (n \geq 2).$$

3. $(a > 0)$

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{Bx+C}{(\sqrt{\mathbf{a}}\mathbf{x}+\tilde{\mathbf{a}})^2+\tilde{c}}\,dx \overset{\mathbf{u}=\sqrt{\mathbf{a}}\mathbf{x}+\tilde{\mathbf{a}}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\tilde{B}u+\tilde{C}}{u^2+\tilde{c}}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\tilde{B}u}{u^2+\tilde{c}}\,du + \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\tilde{C}}{u^2+\tilde{c}}\,du\,,\end{aligned}$$

onde $\tilde{a} = b/2\sqrt{a}$, $\tilde{c} = (4ac-b^2)/4a > 0$, $\tilde{B} = B\sqrt{a}$, $\tilde{C} = C - B\tilde{a}a/\sqrt{a}$,

- $\displaystyle\int \frac{\tilde{B}u}{u^2+\tilde{c}}\,du \overset{v=u^2+\tilde{c}}{=} \frac{\tilde{B}}{2}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{\tilde{B}}{2}\ln|u^2+\tilde{c}| + k$

- $\displaystyle\int \frac{\tilde{C}}{u^2+\tilde{c}}\,du = \frac{\tilde{C}}{\tilde{c}}\int \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{\tilde{c}}}\right)^2+1}\,du = \frac{\tilde{C}}{\tilde{c}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{\tilde{c}}}\right) + k.$

Logo

$$\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2}\ln|ax^2+bx+c| + \frac{\tilde{C}}{\tilde{c}\sqrt{a}}\arctan\left(\frac{x+b/2\sqrt{a}}{\sqrt{(4ac-b^2)/4a}}\right)+k$$

4. Um roteiro para integrais na forma

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \quad (n \geq 2)$$

pode ser encontrado na lista de exercício do Prof. E. Massa **aqui.**

Quanto mais integrais você resolver mais habilidade com as técnicas você terá!

Dicas de integração do Prof. Eugenio Massa:

- **produto $x^n h(x)$ onde conheça primitivas de h:**
  integre por partes pondo $g(x) = x^n$, assim na integral que sobra terá $g'(x) = nx^{n-1}$... continuando até eliminar a potência.
  Funciona para $x^n e^x$, $x^n \cos(x), ...$

  Exemplo:
  $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x \, dx =$
  $= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k, \; k \in \mathbb{R}$

- **produto $x^n h(x)$ onde h tem derivada racional:**
  integre por partes pondo $g(x) = h(x)$, assim na integral que sobra terá apenas uma racional.
  Funciona para $x^n \ln(x)$, $x^n atg(x), ...$

  Exemplo:
  $\int x^2 \ln(x) \, dx = x^3 \ln(x)/3 - \int (x^3/3x) \, dx = x^3 \ln(x)/3 - x^3/9 + k, \; k \in \mathbb{R}$

- **quadrado de trigonométrica ou hiperbólica:**
  integre por partes e depois use identidades...

  Exemplo:
  $\int Ch^2(x) \, dx = Sh(x)Ch(x) - \int Sh^2(x) \, dx =$
  $= Sh(x)Ch(x) - \int (Ch^2(x) - 1) \, dx$
  logo $2 \int Ch^2(x) \, dx = Sh(x)Ch(x) + \int 1 \, dx = Sh(x)Ch(x) + x + k, \; k \in \mathbb{R}$

- **trigonométrica com exponencial:**
  integre por partes duas vezes e leve do outro lado...
  Funciona também para $Sh(x) \cos(x)$, ...

  Exemplo:
  $\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) \, dx =$
  $= e^x \sin(x) - \left[e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x)) \, dx \right]$
  logo $2 \int e^x \cos(x) \, dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + k, \; k \in \mathbb{R}$

- **substituição trigonométrica ou hiperbólica:** quando aparece o termo $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$, se não tiver substituição melhor:
  - no caso $\sqrt{a^2 - x^2}$, substitua $x = a\sin(t),\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$;
  - no caso $\sqrt{a^2 + x^2}$, substitua $x = a\,Sh(t),\ t \in \mathbb{R}$;
  - no caso $\sqrt{x^2 - a^2}$, substitua $x = \pm a\,Ch(t),\ t > 0$.

  isso leva a eliminar a raiz usando relações trigonométricas-hiperbólicas.

  Exemplo:
  $\int \sqrt{4+x^2}\,dx = (x = 2Sh(t),\ dx = 2Ch(t)\,dt)\ \int \sqrt{4(1+Sh^2(t)}2\,Ch(t)\,dt$
  $= \int \sqrt{4Ch^2(t)}2\,Ch(t)\,dt = \int 4Ch^2(t)\,dt = ...$

  Alernativa:
  Também pode funcionar integrar por partes:
  $\int \sqrt{4+x^2}\,dx = x\sqrt{4+x^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = x\sqrt{4+x^2} - \int \frac{4+x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$: agora a primeira integral é igual ao lado esquerdo, a segunda é imediata $(SetSh)$

- **Caso** $\int x^n \left(\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\right)^{\pm 1}$
  - Se n é par use a substituição trigonométrica ou hiperbólica acima.
  - Se n é ímpar, também as substituições $y = \pm a^2 \pm x^2$ ou $z = \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ podem funcionar.

  Exemplo:

  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (y = 9 + x^2,\ dy = 2x\,dx)\ \int (y-9)\sqrt{y}\,dy/2 =$
  $= \int (y^{3/2} - 9\sqrt{y})dy/2 = ...$
  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (z = \sqrt{9+x^2},\ 2z\,dz = 2x\,dx)$
  $\int (z^2-9)z\,zdz = \int (z^4 - 9z^2)dz = ...$

Casos que podem ser reduzidos a funções racionais

Seja R[a,b,..] uma função racional nas variáveis $a, b, ..$

- $\int \mathbf{R}[\sin(\mathbf{x})]\ \cos(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} = \int R(t)\, dt$ *pondo* $t = \sin(x)$.
  O mesmo funciona para $R[\cos(x)]\ \sin(x)\, dx$ **e análogos hiperbólicos**.
  também os casos $R[\sin(x), \cos(x)^2]\ \cos(x)$ **e análogos** encaixam pois pode ver como $R[\sin(x), 1 - \sin(x)^2]\ \cos(x)$

  Exemplo:
  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\sin(x)}{1 - \sin(x) + \cos^2(x)} \cos(x)\, dx = \int \frac{t^2 - 3t}{1 - t + 1 - t^2}\, dt$$

- $\int R[\sin(x), \cos(x)]\, dx$ sempre pode ser tratada da maneira seguinte (mas deixar como última tentativa, pois as contas sao feias!)
  ponha $t = \tan(x/2)$, assim $\sin(x) = 2t/(1 + t^2)$, $\cos(x) = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ e $dx = 2dt/(1 + t^2)$.

  Para o caso $\int R[Sh(x), Ch(x)]\, dx$ *ponha* $t = Th(x/2)$, assim $Sh(x) = 2t/(1 - t^2)$, $Ch(x) = (1 + t^2)/(1 - t^2)$ e $dx = 2dt/(1 - t^2)$.

  Exemplo:
  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\cos(x)}{1 - \sin(x) + \cos(x)}\, dx = \int \frac{4t^2/(1 + t^2) - 3(1 - t^2)}{1 - 2t + (1 - t^2)} \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

- $\int \sin^n(x) \cos^k(x)\, dx, \quad (n, k \in \mathbb{Z})$:

  - *se n ou k é ímpar, substitua a outra:*
    Exemplo:
    $\int \sin^8(x) \cos^7(x)\, dx = (t = \sin(x),\ \ dt = \cos(x)\, dx)$
    $\int t^8 (1 - t^2)^3\, dt = \ldots$

  - *se ambas são par, use as fórmulas de duplicação para baixar o grau*:
    Exemplo:
    $\int \sin^2(x) \cos^2(x)\, dx = \int (1 - \cos(2x))/2 \cdot (1 + \cos(2x))/2\, dx =$
    $= \int (1 - \cos^2(2x))/4\, dx = \ldots$

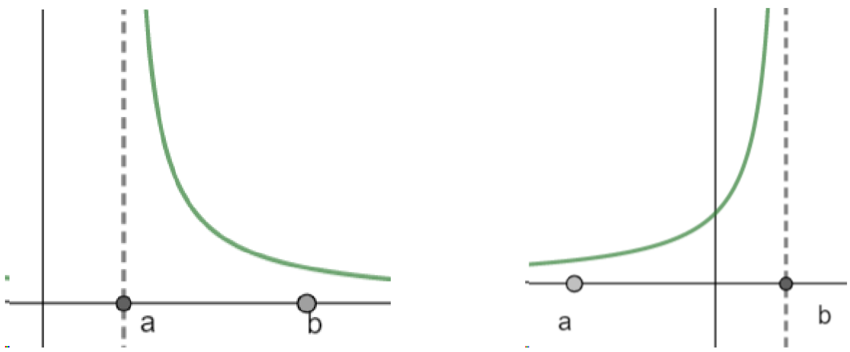
- $\int \sin(nx) \cos(kx)\, dx$ **ou** $\int \sin(nx) \sin(kx)\, dx$ **ou** $\int \cos(nx) \cos(kx)\, dx$:
  use fórmulas trigonométricas

  Exemplo:
  $\int \sin(nx) \cos(kx)\, dx = \int (\sin(nx - kx) + \sin(nx + kx))/2\, dx =$
  $= \ldots$

3 Caso (II): Integrais impróprias

Seja $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ tal que **para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a+\delta,b]}$ seja limitada e integrável em** $[a + \delta, b]$.

- se existir $\displaystyle\lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é **(Riemann) integrável em** $[a, b]$ **em sentido generalizado (s.g.)** *(ou impróprio)*. (**A integral converge**).
  - L é a **integral em sentido generalizado** *(ou a integral imprópria)* **de** f **em** $[a, b]$: (notação $\int_a^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f **não é integrável em** $[a, b]$ **em sentido generalizado** *(ou impróprio)*. (**A integral imprópria não converge, ou ainda, diverge**).



Analogamente, seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\delta > 0$, a função $f|_{[a,b-\delta]}$ seja limitada e integrável em $[a, b - \delta]$.

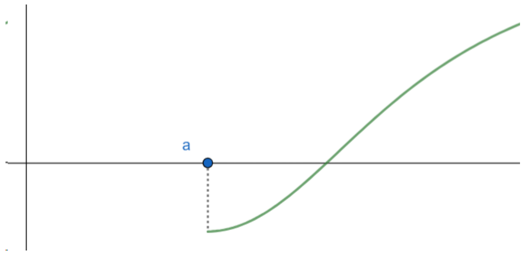
- se existir $\displaystyle\lim_{\delta\to 0^+} \int_{a}^{b-\delta} f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é (Riemann) integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral converge).
  - L é a integral em sentido generalizado (ou impróprio) de f em $[a, b]$: (notação $\int_a^b f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f não é integrável em $[a, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral imprópria não converge — ou, diverge).

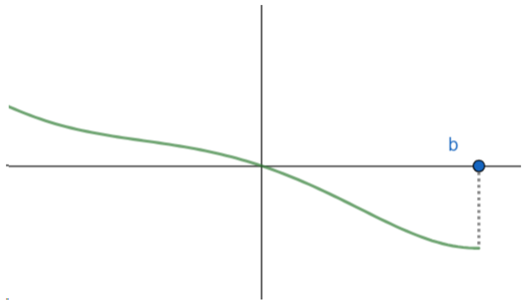
Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que **para todo $M > a$, a função $f|_{[a,M]}$ seja limitada e integrável em** $[a, M]$.

- se existir $\displaystyle \lim_{\mathbf{M}\to+\infty} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{M}} \mathbf{f} = \mathbf{L} \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é **(Riemann) integrável em** $[a, \infty)$ **em sentido generalizado** *(ou impróprio)*. (A integral converge).
  - L é a **integral em sentido generalizado** *(ou impróprio)* **de f em** $[a, \infty)$: (notação $\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f}$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f **não é integrável em** $[a, \infty)$ **em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral imprópria não converge — ou, diverge).*

Analogamente, seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ tal que para todo $M < b$, a função $f|_{[M,b]}$ seja limitada e integrável em $[M, b]$.

- se existir $\displaystyle \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{b} f = L \in \mathbb{R}$ então dizemos
  - f é (Riemann) integrável em $(-\infty, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral converge).
  - L é a integral em sentido generalizado (ou impróprio) de f em $(-\infty, b]$: (notação $\int_{-\infty}^{b} f$).
- se o limite não existir ou for infinito então dizemos f não é integrável em $(-\infty, b]$ em sentido generalizado (ou impróprio). (A integral imprópria não converge — ou, diverge).





Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D_f$

- se A **pode ser decomposto em um número finito de intervalos como os acima tais que f seja integrável em sentido generalizado em TODOS ELES**, então dizemos que f é **(Riemann) integrável em A em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral imprópria converge)*. Dizemos então que a **integral generalizada de f em A** é a soma das integrais em cada intervalo

- **caso contrário**, dizemos que **f não é integrável em A em sentido generalizado** *(ou impróprio). (A integral imprópria não converge)*.

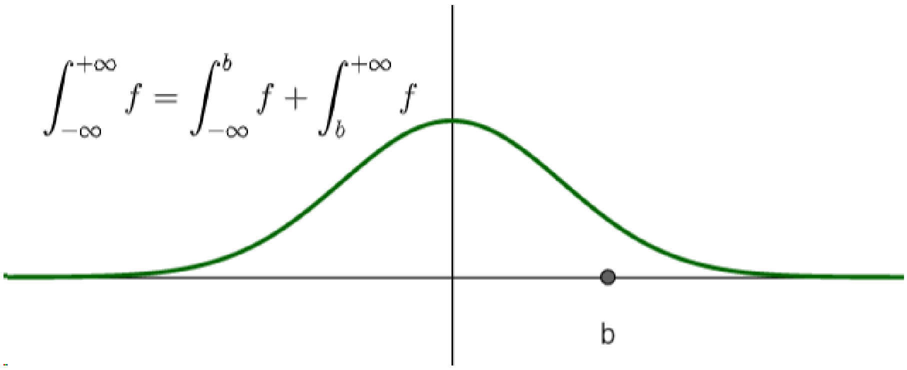


Figura 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ é convergente quando ambas integrais $\int_{-\infty}^{b} f$ e $\int_{b}^{+\infty} f$ são convergentes

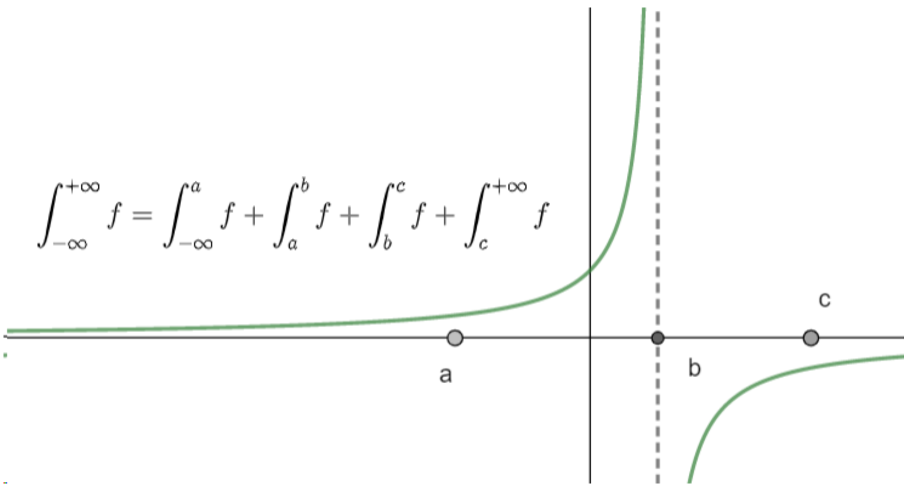


Figura 2: $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ é convergente quando as 4 integrais do lado direito da igualdade acima são convergentes

Teorema do Confronto

Teorema (Teorema do confronto para integrais impróprias). *Sejam* $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *tais que para todo* $\delta > 0$*, as funções* $f, g|_{[a+\delta,b]}$ *sejam limitadas e integráveis em* $[a + \delta, b]$*.*

Se $0 \leq f \leq g$ **em** $(a, b]$ **então:**

- **se** g **é integrável em s.g. em** $[a, b]$ **então** f **também é integrável em s.g. em** $[a, b]$**, e vale**
$$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g$$
- **se** f **não é integrável em s.g. em** $[a, b]$ **então** g **também não o é.**

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos.

Observe que se $f \geq 0$, então a função
$$G(\delta) = \int_{a+\delta}^b f$$
é não negativa monótona crescente e
$$\int_a^b f = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f = \begin{cases} L \geq 0 \\ \textit{ou} \\ +\infty, \end{cases}$$
o limite **não pode** não existir.

Teorema do Confronto com Limite

Teorema. *Sejam* $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *tais que para todo* $\delta > 0$*, as funções* $f, g|_{[a+\delta,b]}$ *sejam limitadas e integráveis em* $[a + \delta, b]$*. Sejam* $f, g \geq 0$ **em** $(a, b]$ *e*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Então,

- $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longrightarrow \int_a^b f$ **e** $\int_a^b g$ **têm o mesmo caráter***: ambas convergem ou ambas divergem.*

. . . .

- $L = 0$ **e** $\begin{cases} \int_a^b g \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f \text{ converge} \\ \int_a^b f \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g \text{ diverge} \end{cases}$

- $L = +\infty$ **e** $\begin{cases} \int_a^b f \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b g \text{ converge} \\ \int_a^b g \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b f \text{ diverge} \end{cases}$

. . . .

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos, avaliando os limites para $x \to b^-$*,* $x \to +\infty$*,* $x \to -\infty$*, respectivamente.*

Teorema. *Seja* $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\delta > 0$*, a função* $f|_{[a+\delta,b]}$ *seja limitada e integrável em* $[a + \delta, b]$*.*

- *Se* $|f|$ *é integrável em s.g. em* $[a, b]$ **então** f **também é integrável em s.g. em** $[a, b]$**, e vale**

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Um resultado análogo vale nos outros 3 casos.

Se $|f|$ é integrável em s.g. dizemos que f **é absolutamente integrável em s.g.** *(absolutamente convergente)*.

Algumas integrais úteis para confrontar

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \overset{(a>0)}{=} \begin{cases} \lim\limits_{M\to\infty}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^M = \lim\limits_{M\to\infty}\dfrac{1}{1-p}\left[M^{1-p}-a^{1-p}\right] = +\infty & se\ p<1 \\ \lim\limits_{M\to\infty}\left[\ln(x)\right]_a^M = \lim\limits_{M\to\infty}\left[\ln(M)-\ln(a)\right] = +\infty & se\ p=1 \\ \lim\limits_{M\to\infty}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^M = \lim\limits_{M\to\infty}\dfrac{1}{1-p}\left[\dfrac{1}{M^{p-1}}-a^{1-p}\right] = \dfrac{a^{1-p}}{p-1} & se\ p>1 \end{cases}$$

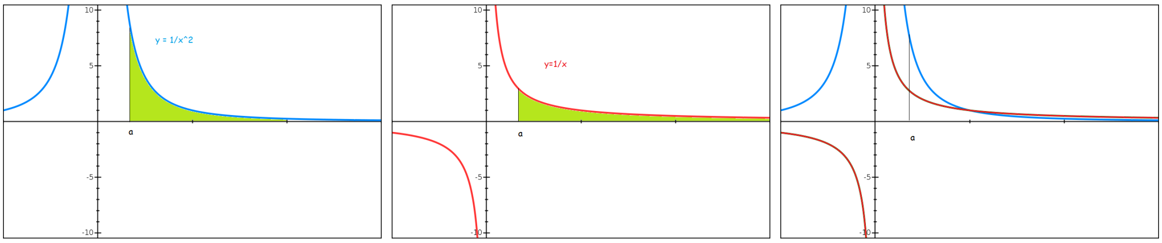


Figura 3: $p>0$

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx \overset{(a>0)}{=} \begin{cases} \lim\limits_{\delta\to0^+}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\delta^a = \lim\limits_{\delta\to0^+}\dfrac{1}{1-p}\left[a^{1-p}-\delta^{1-p}\right] = \dfrac{a^{1-p}}{1-p} & se\ p<1 \\ \lim\limits_{\delta\to0^+}\left[\ln(x)\right]_\delta^a = \lim\limits_{\delta\to0^+}\left(\ln(a)-\ln(\delta)\right) = +\infty & se\ p=1 \\ \lim\limits_{\delta\to0^+}\left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_\delta^a = \lim\limits_{\delta\to0^+}\dfrac{1}{1-p}\left[a^{1-p}-\dfrac{1}{\delta^{p-1}}\right] = +\infty & se\ p>1 \end{cases}$$

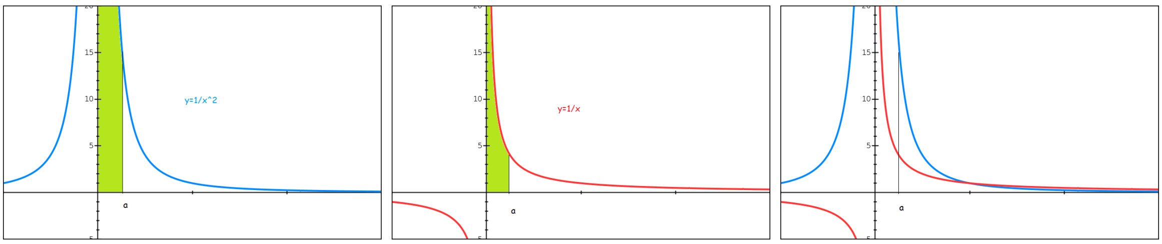


Figura 4: $p>0$

$$\int_a^{\infty} e^{kx}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{k}e^{kx}\right]_a^M = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{k}e^{kM} - \frac{1}{k}e^{ka}\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{k}e^{ka} & se\ k<0 \\ +\infty & se\ k<0 \end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left[x\ln(x)-x\right]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0^+}\left[-1-\delta\ln\delta+\delta\right] = -1$$

Resumindo:

$$\int_a^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} DIVERGENTE & se\ p\le 1 \\ CONVERGENTE & se\ p>1 \end{cases} \qquad (a>0)$$

$$\int_0^{a}\frac{1}{x^p}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} CONVERGENTE & se\ p\in(0,1) \\ DIVERGENTE & se\ p\ge 1 \end{cases} \qquad (a>0)$$

$$\int_a^{\infty} e^{kx}\,dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} CONVERGENTE & se\ k<0 \\ DIVERGENTE & se\ k\ge 0 \end{cases} \qquad (a\in\mathbb{R})$$

$$\int_0^{1}\ln(x)\,dx \quad \text{é} \quad CONVERGENTE$$

4 Aplicações de integral

Volume por Seção Transversal

Seja S um sólido limitado pelos planos $x = a$ e $x = b$ $(a < b)$.

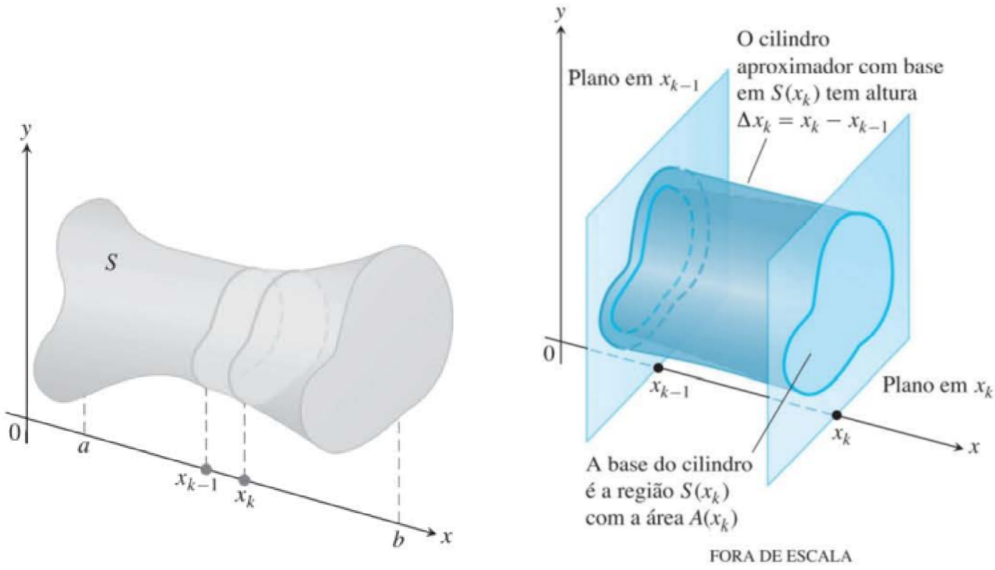
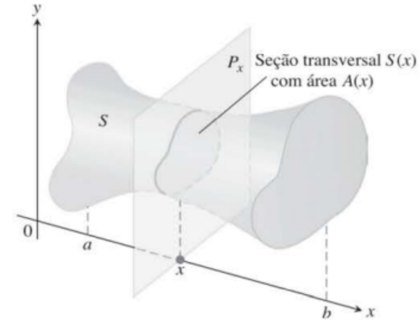


Figura 5: As figuras deste slide foram retiradas do livro Cálculo, vol. 1 , G. B. Thomas., exceto quando dito o contrário

- $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ partição de $[a, b]$
- P_{x_k} = plano perpendicular ao eixo-x passando por x_k
- $S(x_k) = S \cap P_{x_k}$ = região da seção transversal
- $A(x_k)$ = área da seção transversal $S(x_k)$
- S_k = cilindro **reto** com base $S(x_k)$ e altura $\Delta_k x = x_k - x_{k-1}$
- $V(S_k) = A(x_k)\Delta_k x$
- volume V_k da k-ésima fatia de $S \approx V(S_k)$
- $V(S) = \sum_{k=1}^{n} V_k \approx \sum_{k=1}^{n} V(S_k) = \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta_k x$ (soma de Riemann)
- Se A é uma função integrável em $[a, b]$,

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k)\Delta_k x = \int_a^b A(x)dx$$

Se $A(x)$ é a área da região obtida pela intersecção do sólido S com o plano P_x perpendicular ao eixo-x em $x \in [a, b]$ e A é uma função integrável em $[a, b]$, então o **volume do sólido S** é dado por

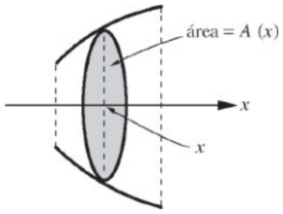


$$V(S) := \int_a^b A(x)\,dx.$$

Em particular: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, com $f \geq 0$ e

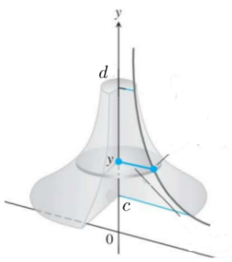
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\},$$

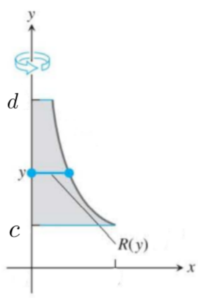
então o volume do **sólido de revolução** S obtido pela rotação da região R ao redor do **eixo-x** é



$$V(S) = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$$

Figura retirada do livro Cálculo, vol. 1, Guidorizzi.





Analogamente:

- se a seção transversal é perpendicular ao eixo-y:

$$V := \int_c^d A(y)\,dy$$

- se a região

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [c, d], \quad 0 \leq x \leq R(y)\right\},$$

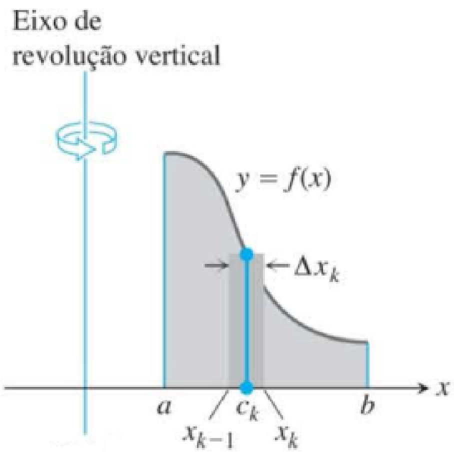
é rotacionada ao redor do eixo-y:

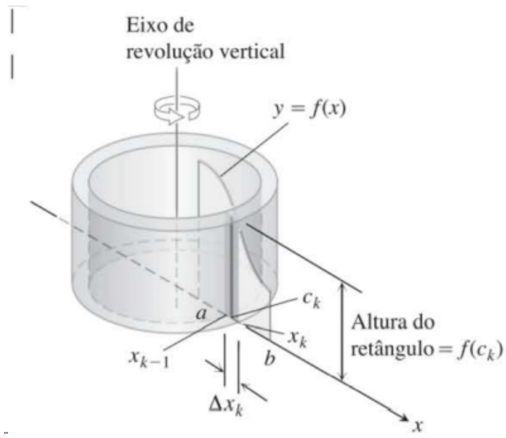
$$V = \int_c^d \pi(R(y))^2\,dy$$

Volume por Cascas Cilíndricas

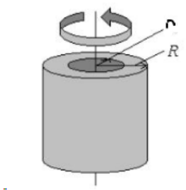
Sejam S o **sólido de revolução** obtido pela rotação da região R ao redor do **eixo-y**, onde

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a,b], \quad 0 \le y \le f(x)\} \qquad (\textit{assuma } a \ge 0).$$





- $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ partição de $[a,b]$
- R_k = retângulo típico de base $\Delta_k x$ e altura $f(c_k)$ $\quad (c_k \in [x_{k-1}, x_k])$
- C_k = casca cilíndrica obtida pela rotação de R_k
  - Volume de uma casca cilíndrica de altura h, raio interno r e raio externo R:



$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = 2\pi h \left(\tfrac{R+r}{2}\right)(R-r)$$

- $c_k = \dfrac{x_k + x_{k-1}}{2}$ (ponto médio)
- $V(C_k) = 2\pi f(c_k) c_k \Delta_k x$
- $V(S) \approx \sum_{k=1}^{n} V(C_k) = \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta_k x$ (soma de Riemann)
- Se f é uma função contínua em $[a,b]$,

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi \underbrace{c_k}_{raio} \underbrace{f(c_k)}_{altura} \Delta_k x = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Seja f uma função contínua em $[a,b]$. O Volume do **sólido de revolução** S obtido pela rotação da região

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b], \ \ 0 \le y \le f(x)\} \qquad (assuma\ a \ge 0)$$

ao redor do **eixo-y** é

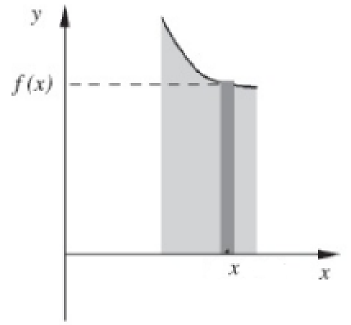


Figura retirada do livro Cálculo, vol. 1, Guidorizzi.

$$V(S) := \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

$$V(S) = \int_a^b 2\pi \left(\begin{matrix}\text{raio}\\ \text{cilindro típico}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{altura}\\ \text{cilindro típico}\end{matrix}\right) dx$$

Analogamente, o volume do **sólido de revolução** S obtido pela rotação da região

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [c,d], \ \ 0 \le x \le g(y)\} \qquad (assuma\ c \ge 0)$$

ao redor do **eixo-x** é

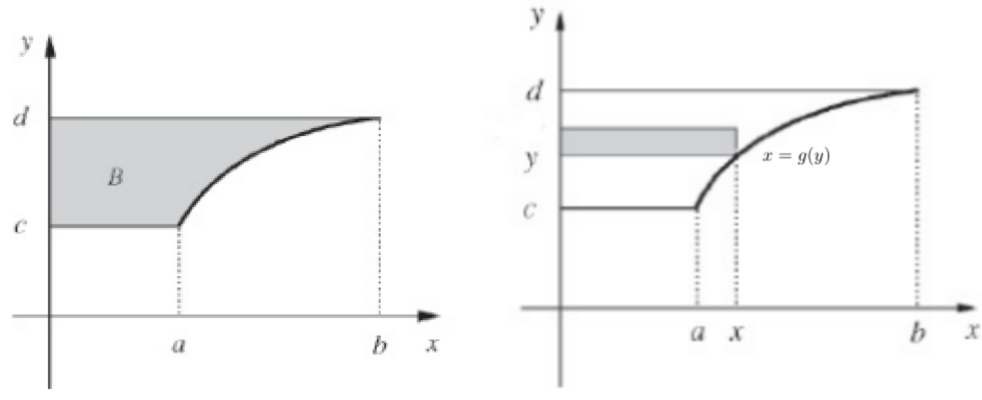


Figura 6: Figura retirada do livro Cálculo, vol. 1, Guidorizzi.

$$V(S) := \int_c^d 2\pi y g(y)\, dy = \int_c^d 2\pi \left(\begin{matrix}\text{raio}\\ \text{cilindro típico}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{altura}\\ \text{cilindro típico}\end{matrix}\right) dy$$

Comprimento de Curva

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com derivada contínua, e seja γ a curva dada pelo gráfico de f.

O **comprimento de γ** é

$$c := \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

$$a = x_0 < \ldots < x_n = b; \qquad P_i = (x_i, f(x_i))$$

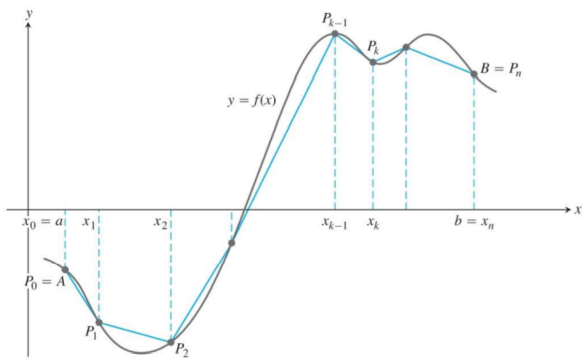


FIGURA 6.22 O comprimento do traçado poligonal $P_0P_1P_2 \cdots P_n$ aproxima o comprimento da curva $y = f(x)$ do ponto A ao ponto B.

$$\begin{aligned} |\overline{P_iP_{i-1}}| &= \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (f'(\xi_i)\Delta_i x)^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta_i x, \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i) \end{aligned}$$

$$c \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta_i x$$

Área de Superfície

A área da **superfície de rotação** obtida quando γ roda ao redor do **eixo-x** é (*assuma* $f \geq 0$)

$$A_S := \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

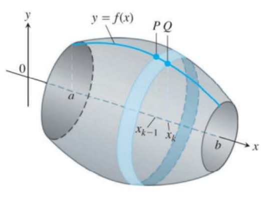


FIGURA 6.30 Superfície gerada pela rotação do gráfico de uma função não negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ em torno do eixo x. A superfície é um conjunto de faixas como a gerada pelo arco PQ.

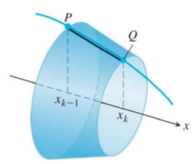


FIGURA 6.31 O segmento de reta que une P e Q gera um tronco de um cone.

área da superfície de um tronco de cone de geratriz $\overline{PQ} := \overline{P_iP_{i-1}}$ e de raios $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$ é:

$$2\pi \overbrace{\frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2}}^{\text{raio médio}} \overbrace{|\overline{P_iP_{i-1}}|}^{\text{compr. geratriz}} \approx$$

$$\approx 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta_i x, \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

Total de pessoas acometidas por uma epidemia

Uma epidemia está se alastrando a partir de um centro (coloque-o na origem do sistema de coordenadas). Segundo os dados recolhidos em pesquisas de campo, o modelo matemático que representa a densidade dos acometidos y a x quilômetros a partir da origem é

$$y = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

ou seja, y representa o número de pessoas que contraíram a doença por quilômetro quadrado. Quantas pessoas ficaram doentes dentro desta região?

Observe que no epicentro da epidemia, a densidade é de $f(0)$ doentes/km^2 e que para $x > a$ supõe-se que não existem mais doentes.

Divida o intervalo $[0, a]$ em n sub-intervalos, $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_n = a$ e escreva $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$.
Então, o número de pessoas N_i que contraíram a doença dentro do anel A_i delimitado pelos raios x_{i-1} e x_i é aproximadamente

$$N_i \approx \text{Area}(A_i) f(\overline{x}_i) = (\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) f(\overline{x}_i) = \pi(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) f(\overline{x}_i),$$

Se

$$\overline{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2},$$

então

$$N_i \approx 2\pi \overline{x}_i f(\overline{x}_i) \Delta_i x.$$

Portanto, o número total de pessoas infectadas é aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \overline{x}_i f(\overline{x}_i) \Delta_i x.$$

Notando que a precisão desses números aumenta quando n tende a infinito, obtemos que o número exato de pessoas infectadas será

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \overline{x}_i f(\overline{x}_i) \Delta_i x \;\; = \;\; \int_0^a 2\pi x f(x) \, dx.$$

Volume de sangue fluindo por segundo através de uma secção transversal de um vaso sanguíneo

Considere uma artéria de raio R. Pela Lei do Fluxo Laminar, a velocidade V do sangue depende da distância r em que o sangue se encontra do centro da artéria e é expressa por

$$V(r) = k(R^2 - r^2), \quad 0 \leq r \leq R,$$

onde k é uma constante positiva, relacionada à viscosidade do sangue e ao comprimento da artéria. Com esse modelo, podemos imaginar o sangue fluindo como se fosse constituído por camadas cilíndricas encaixantes (chamadas lâminas cilíndricas). A espessura de cada lâmina é $\Delta_i r$. Seja

$$\overline{r}_i = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}.$$

Assim, a área da espessura da i-ésima lâmina é

$$A_i = \pi r_i^2 - \pi r_{i-1}^2 = \pi(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) = 2\pi \overline{r}_i \Delta_i r.$$

Além disso, podemos aproximar a velocidade que o sangue está fluindo na i-ésima lâmina por

$$V(\overline{r}_i) = k(R^2 - \overline{r}_i^2).$$

Como o volume de sangue V_i que passa na i-ésima lâmina por unidade de tempo é dado pelo produto da área da i-ésima lâmina pela velocidade que o sangue está fluindo nela, temos que o volume de sangue fluindo pela i-ésima lâmina é aproximadamente

$$V_i \approx A_i V(\overline{r}_i) = 2\pi \overline{r}_i \Delta_i r k(R^2 - \overline{r}_i^2) = 2\pi k(R^2 \overline{r}_i - \overline{r}_i^3)\Delta_i r.$$

Logo, o volume de sangue fluindo na secção transversal é aproximadamente

$$V \approx 2\pi k \sum_{i=1}^{n} (R^2 \overline{r}_i - \overline{r}_i^3)\Delta_i r.$$

Portanto, o volume de sangue fluindo na secção transversal é dado por (Lei do fluxo laminar ou Lei de Poiseuille)

$$V = 2\pi k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (R^2 \overline{r}_i - \overline{r}_i^3)\Delta_i r = 2\pi k \int_0^R (R^2 r - r^3)dr = \frac{\pi k R^4}{2}.$$

5 $\mathbb{R}^n$, propriedades, topologia

Lembrete:

- Dados dois conjuntos A, B é dito **produto cartesiano de A com B** o conjunto
$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A\,,\ b \in B\}\,.$$

Em particular,

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$:
podemos representar no plano.

- $\mathbb{R} \times .. \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : \ x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, ..n\}$:
se $n = 3$ podemos representar no espaço,

se $n > 3$ não podemos desenhar.
(veja o Hipercubo na página do Prof. Ton Marar ou Wikipedia)

Quando $n \geq 2$ representaremos pontos/vetor em $\mathbb{R}^n$ com letras em negrito: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v}$, etc.

Se $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ não é corpo, mas pode ser visto como **espaço vetorial com produto escalar** (**Espaço Euclidiano de dimensão n**):

- se $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definamos
  - $\mathbf{x} = \mathbf{y} \iff x_i = y_i$ para todo $i = 1, ..., n$,
  - $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, .., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$, (soma vetorial)
  - $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1, .., x_n - y_n) \in \mathbb{R}^n$,
  - $\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, .., \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$, (múltiplo do vetor)
  - $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = < \mathbf{x}, \mathbf{y} > = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \in \mathbb{R}$, (produto escalar)
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}$ (norma)
  - $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (distância Euclideana)
  - $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}\right)$ (ângulo)
  - $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ (perpendicularismo)

No caso $n = 3$ (e $n = 2$) podemos definir o **produto vetorial:**

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Propriedades (veja ex 11 p 107 Guidorizzi):

- $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$
- $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})$
- $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$ (antisimetria)
- $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} + \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$
- $(\lambda \mathbf{x}) \wedge \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$
- $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0 = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}), \quad$ i.e., $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \perp \mathbf{x}, \mathbf{y}$

- $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$.

OBS: reveja as definições e propriedades de espaço vetorial, produto escalar, produto vetorial, norma, distância: Guidorizzi ou livro de GA.

Queremos falar sobre **continuidade, derivadas e integral** de funções a valores vetoriais e/ou de funções de várias variáveis.

Esses conceitos estão relacionados com o conceito de **limite**, o qual por sua vez está relacionado, dizendo de maneira rudimentar, com “proximidade" (vizinhança).

Definições

Sejam $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$ (em $\mathbb{R}$):

- **Esfera de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $S_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta\}$.
- **Bola aberta de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta\}$;
- **Bola fechada de centro $\mathbf{x}_0$ e raio δ**: $\overline{B_\delta(\mathbf{x}_0)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq \delta\}$;

(Compare quando $n = 1, 2, 3$.)

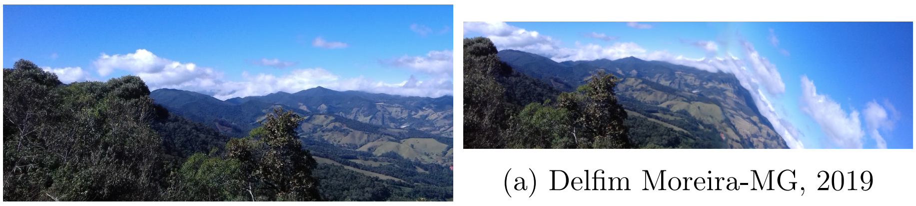
Curiosidades:

1. Uma bola pode não ser redonda! Veja por exemplo **Bolas Quadradas em $\mathbb{R}^2$** ou **Bolas em L^p**.

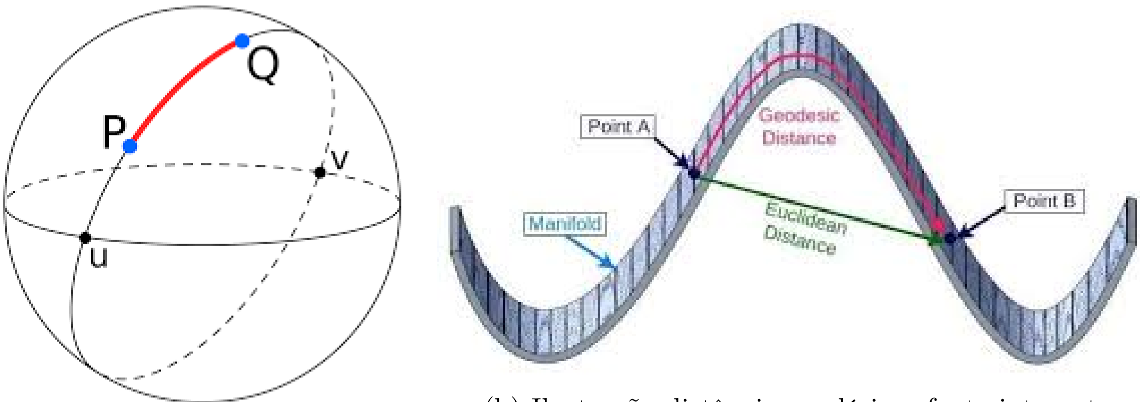
2. Quando $x, y \in S_1(0)$, a função ângulo

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos\left(\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{||x||||y||}\right) = \arccos\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

é a **distância geodésica** entre os pontos x e y, que poderíamos dizer que é a função que determina a “distância real"na Terra (“variedades"), veja por exemplo **Geodésica**.



(a) Delfim Moreira-MG, 2019



(b) Ilustração distância geodésica: fonte internet

Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$

- $\mathbf{p}$ é dito **ponto interior de A** se
$$\exists\, \delta > 0 \ : B_\delta(\mathbf{p}) \subseteq A\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto exterior de A** se
$$\exists\, \delta > 0 \ : B_\delta(\mathbf{p}) \cap A = \emptyset\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto de fronteira de A** se
$$\forall\, \delta > 0 \qquad \exists\, \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p}) \setminus A \qquad e \qquad \exists\, \mathbf{r} \in B_\delta(\mathbf{p}) \cap A\,;$$
- $\mathbf{p}$ é dito **ponto de acumulação de A** se
$$\forall\, \delta > 0\ \exists \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{p}) \cap A \setminus \{\mathbf{p}\}\ .$$
  - **Exemplo:** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos

- A é dito um **conjunto aberto** se todo ponto pertencente ao conjunto A é ponto interior de A;
- A é dito um **conjunto fechado** se seu complementar $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ é aberto;
- A é dito um **conjunto limitado** se existe $\delta > 0$ tal que $A \subseteq B_\delta(\mathbf{0})$.
- **Vizinhança de $\mathbf{x}_0$** : um conjunto qualquer aberto que contenha $\mathbf{x}_0$

Bolas abertas são conjuntos abertos, portanto
$$B_\delta(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta\}$$
é uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$.

Teorema. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. São equivalentes:*

1. *A é fechado*
2. *A contém todos seus pontos de acumulação*
3. *A contém todos seus pontos de fronteira.*

Teorema (Bolzano-Weiestrass)**.** *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é limitado e possui infinitos elementos então ele possui pelo menos um ponto de acumulação.*

Algumas notações

- ∂A: **fronteira de** A (conj. dos pontos de fronteira)
- $int(A)$ **ou** $\mathring{A}$: **interior de** A (conj. dos pontos interiores)
- $\overline{A}$: **fecho de** A (i.e., $A \cup \partial A$)
- A^c: **complementar de** A

6 Funções a valores vetoriais

Uma **Função (de uma variável real) a valores vetoriais** é uma função

$$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)), \qquad f_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}$.

- **Exemplos:**
  $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ $\quad$ $\mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$ $\quad$ $\mathbf{h}(t) = \left(\frac{1}{t}, t^2, \sin(t)\right)$ $\quad$ $D = ?$

6.1 Limites

Seja p um ponto de acumulação de D, e $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$,

- $\lim\limits_{t\to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ significa

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que } t \in D \; e \; 0 < |t - p| < \delta \text{ implica } \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^n$ dizemos que
  $\lim\limits_{t\to p} \mathbf{f}(t)$ não existe

Também podemos definir $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}$ como em cálculo 1.

Teorema: $\lim\limits_{t\to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} = (L_1, \ldots, L_n) \iff \lim\limits_{t\to p} f_i(t) = L_i$ para $i = 1, .., n$

- **Exemplo:**

  $\lim\limits_{t\to 2} \mathbf{f}(t) = ?$

  $\lim\limits_{t\to 0} \mathbf{h}(t) = ?$

6.2 Continuidade

Sejam $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $p \in D$

- dizemos que **f é contínua em** p, se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } t \in D \ e \ |t - p| < \delta \text{ implica } \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(p)\| < \varepsilon$$

- caso contrário, dizemos que **f é descontínua em** p,

(lembre que se $p \notin D$, *não se fala em continuidade ou descontinuidade em* p)

- se $\mathbf{f}$ é contínua em p para todo $p \in A \subset D$ dizemos **f é contínua em** A
- se $\mathbf{f}$ é contínua em p para todo $p \in D$ dizemos **f é contínua**

- se $p \in D$ é ponto de acumulação de D: $\mathbf{f}$ é contínua em p, quando

$$\lim_{t \to p} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(p)$$

- se $p \in D$ não é ponto de acumulação de D: $\mathbf{f}$ é sempre contínua em p.

Corolário: $\mathbf{f}$ é contínua em p $\iff$ cada f_i, $i = 1, .., n$, é contínua em p.

- **Exemplo:** $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$

6.3 Derivada

Seja $p \in D$ um ponto de acumulação de D.

- **Se existir**
$$\lim_{t \to p} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(p)}{t - p} = \mathbf{L} \ \in \mathbb{R}^n,$$
  então dizemos que
  - **f é derivável em p,**
  - **L é a derivada de f em p;** notação: $\mathbf{f}'(p) := \mathbf{L}$.
- caso contrário, dizemos que **f não é derivável em p.**

- se $\mathbf{f}$ é derivável em p para todo $p \in A$ dizemos **f é derivável em A**,
- se $\mathbf{f}$ é derivável em p para todo $p \in D$ dizemos **f é derivável**.

Podemos então definir uma nova função: a **função derivada de f** :

$$\mathbf{f}' : D_{\mathbf{f}'} \to \mathbb{R}^n : p \mapsto \mathbf{f}'(p)$$

onde $D_{\mathbf{f}'} = \{p \in D : \ p$ é de acumul. de D e $\mathbf{f}$ é derivável em $p\} \subseteq dom(\mathbf{f})$

Teorema: $\mathbf{f}$ é derivável em $p \iff$ cada f_i, $i = 1, .., n$, é derivável em p e

$$\mathbf{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), ..., f_n'(t))$$

Teorema: $\mathbf{f}$ é integrável em $[a, b] \iff$ cada f_i, $i = 1, .., n$, é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b \mathbf{f}(t) = \left(\int_a^b f_1(t), \int_a^b f_2(t), ..., \int_a^b f_n(t) \right)$$

- **Exemplos:** $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$ $\quad \mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

  $\mathbf{f}' =?$ $\quad \mathbf{g}' =?$

Vale:

- se $\mathbf{f}$ é derivável em p então **o gráfico da reta**

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(p) + \mathbf{f}'(p)(t-p), \quad t \in \mathbb{R}$$

é a reta tangente em $(p, \mathbf{f}(p))$ ao gráfico de $\mathbf{f}$.

i.e., a única reta tal que $\dfrac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{r}(t)}{t-p} \to 0$ quando $t \to p$

Propriedades (regras de cálculo de derivadas):

Sejam $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriváveis, então

$\mathbf{f}+\mathbf{g}, \quad \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}, \quad \lambda\mathbf{f}$ são deriváveis e vale:

- $(\mathbf{f}+\mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$
- $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})' = \mathbf{f}'\cdot\mathbf{g} + \mathbf{f}\cdot\mathbf{g}'$ (*produto escalar*)
- $(\lambda\mathbf{f})' = \lambda'\mathbf{f} + \lambda\mathbf{f}'$ (*produto de escalar por vetor*)

Sejam $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda : C \subseteq \mathbb{R} \to D$ deriváveis

- $(\mathbf{f}\circ\lambda)'(t) = \mathbf{f}'(\lambda(t))\lambda'(t) \quad \forall t \in C$

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(t) = \\
&= [f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + \ldots + f_n(t)g_n(t)]' \\
&= (f_1(t)g_1(t))' + (f_2(t)g_2(t))' + \ldots + (f_n(t)g_n(t))' \\
&= f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t) + f_2'(t)g_2(t) + f_2(t)g_2'(t) + \ldots + f_n'(t)g_n(t) + f_n(t)g_n'(t)) \\
&= (f_1'(t), \ldots, f_n'(t)) \cdot (g_1(t), \ldots, g_n(t)) + (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \cdot (g_1'(t), \ldots, g_n'(t)) \\
&= (\mathbf{f}'\cdot\mathbf{g})(t) + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}')(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{f}\circ\lambda)'(t) = &\\
&= ((f_1\circ\lambda)'(t), (f_2\circ\lambda)'(t), ..., (f_n\circ\lambda)'(t)) \\
&= (f_1'(\lambda(t))\lambda'(t), f_2'(\lambda(t))\lambda'(t), ..., f_n'(\lambda(t))\lambda'(t)) \\
&= (f_1'(\lambda(t)), f_2'(\lambda(t)), ..., f_n'(\lambda(t)))\lambda'(t) \\
&= \mathbf{f}'(\lambda(t))\lambda'(t)
\end{aligned}
$$

6.4 Curvas

Definição

Chamamos de **Curva em $\mathbb{R}^n$** uma função contínua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo.
Definimos:

- **Traço da curva**: a imagem
- **equação paramétrica/vetorial da curva**: a lei
  - **Exemplos:** $\gamma_1(t) = (t^2, t) \qquad \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, 1) \qquad (t \in \mathbb{R})$

- Dizemos que a curva é **simples** se γ é injetora.
- Dizemos que a curva é **fechada** se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Dizemos que a curva é **fechada simples** se fechada e $\gamma|_{[a,b)}$ injetora.
- Dizemos que a curva é **derivável** se γ é derivável

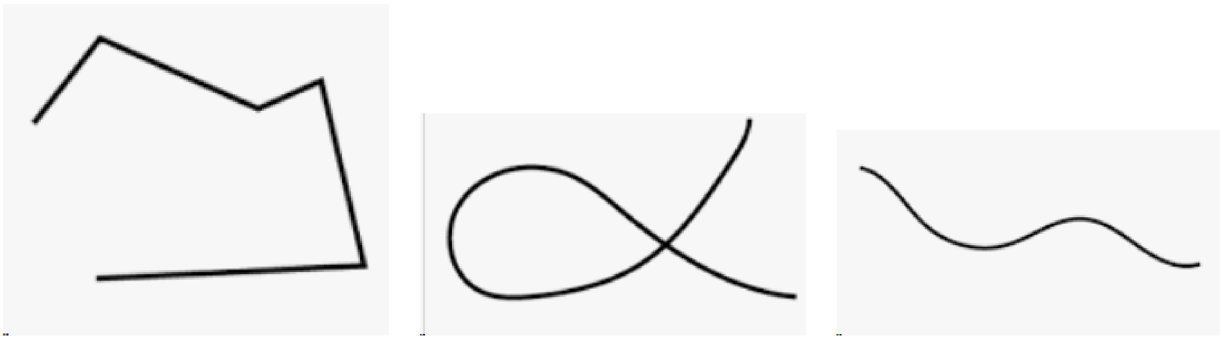


Figura 8: (aberta, simples, não der.), (aberta, não simples, der.), (aberta, simples, der.)

Figura 9: (fechada, simples, não der.), (fechada, não simples, der.), (fechada, simples, der.)

Figuras retiradas da internet

Seja $p \in I$. Se γ é derivável em p e $\gamma'(p) \neq 0$ então

- $\gamma'(p)$ é um **vetor tangente ao traço** no ponto $\gamma(p)$
  Assim,

  ⋆ o traço da curva(reta) dada por:

  $$\mathbf{r}(t) = \gamma(p) + t\gamma'(p), \quad t \in \mathbb{R}$$

  é uma **reta tangente ao traço de** γ no ponto $\gamma(p)$.

  ⋆ o traço da curva(reta) dada por:

  $$\mathbf{r}(t) = \gamma(p) + t\widehat{\mathbf{n}}(p), \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{onde } \ \widehat{\mathbf{n}} \cdot \gamma' = 0)$$

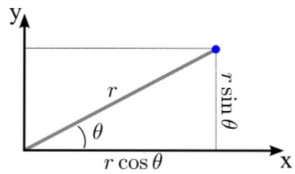
  é uma **reta normal ao traço de** γ no ponto $\gamma(p)$.

- Dizemos que a curva é **regular** (ou **suave**) se γ é derivável e $\gamma' \neq \mathbf{0}$ em todo I: logo o traço possui reta tangente em todo ponto.

6.5 Coordenadas polares no plano

Representamos o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em coordenadas polares como:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta), \quad r \geq 0, \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Podemos usá-las para descrever curvas em $\mathbb{R}^2$:

a curva dada (em coordenadas polares) por

$$r = f(\theta) \geq 0, \ \theta \in [a, b]$$

é a curva de equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos(\theta) \\ y = f(\theta)\sin(\theta)\,, \end{cases} \qquad \theta \in [a, b]\,.$$

7 Funções de várias variáveis

Uma **Função (real) de várias variáveis** é uma função

$$f : D \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}), \quad \text{onde } D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

7.1 Algumas funções típicas

- **função linear**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ fixado.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = (2, 1, -3) \cdot (x, y, z) = 2x + y - 3z$
- **função afim**:$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ fixados.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = (2, 1, -3) \cdot (x, y, z) + 5 = 2x + y - 3z + 5$
- **função polinomial**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} = (x_1, .., x_n) \mapsto p(\mathbf{x})$ com p polinômio nas variáveis $x_1, .., x_2$.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $p(x, y, z) = 3x^4 + 2x^2y^3 - xyz$ (polinômio de grau 5).
- **funções racionais, algébricas, transcendentais**: como em cálculo 1.
  Exemplo: Em $\mathbb{R}^3$: $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - 5yx}{2x - z}$, $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 - y^2 + z}$
- **função homogênea de grau λ**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
  $$f(t\mathbf{x}) = t^\lambda f(\mathbf{x}) \text{ para todos } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } t > 0.$$
  Exemplos: todas as funções lineares, todos os polinômios homogêneos: $p(x, y, z) = 3x^4 + 2xy^3 - xyz^2$, $f(x, y) = \dfrac{x \sin(x/y)}{x^2 + xy - y^2}, \ \dots$.

Valem as mesmas definições do caso de funções de uma variável (**domínio natural**, contradomínio, imagem, sobrejetora, injetora, bijetora, operações, **composição**, inversa, **gráfico**, **função limitada**, supremo, ínfimo, máximo, mínimo...), veja **Slides de Cálculo 1, prof. E. Massa, aqui**.

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Gráfico: **graf(f)** $:= \{(\mathbf{x}, \clubsuit) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \mathbf{x} \in D_f \ \text{ e } \ f(\mathbf{x}) = \clubsuit\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

- $\boxed{\text{Como “se comportam" geometricamente os domínios quando } n = 1, 2, 3?}$

- $\boxed{\text{Como “se comportam" geometricamente os gráficos quando } n = 1, 2, 3?}$

Podemos também considerar uma **Função de várias variáveis a valores vetoriais**:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_k(\mathbf{x})).$$

7.2 Conjunto de nível

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Definição: O **Conjunto de nível de f** é um conjunto da forma

$$N_k = N_k(f) = \{\mathbf{x} \in D : \ f(\mathbf{x}) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^n,$$

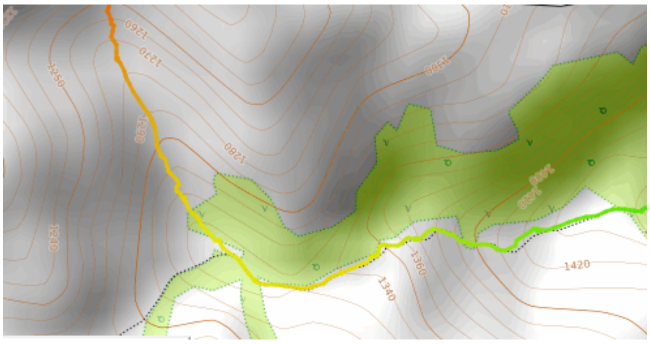
para um $k \in \mathbb{R}$ fixado. Se $k \notin Im(f)$, então $N_k = \emptyset$.

Se $n = 2$, $f(\mathbf{x}) = k$ é dita **curva de nível de f**

Se *($n > 3$)*$n = 3$, $f(\mathbf{x}) = k$ é dita *(hiper)***superfície de nível de f**.

- $\boxed{\text{Como “se comportam" geometricamente os conjuntos de nível quando } n = 2, 3?}$

(a) Delfinópolis - MG



(b) Pico do Papagaio - Aiuruoca - MG

Figura 10: Curvas de nível (mapa topográfico)

Observação: O gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pode ser visto como a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$ da função $F : D \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$:

$$\underbrace{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}}_{graf(f)} = \underbrace{\{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0\}}_{N_0(F)}$$

7.3 Limites

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p}$ um ponto de acumulação de D.

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$ significa

  $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \textit{ e } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

- se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$ dizemos que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$ não existe

---

Formulações alternativas de limite:

- $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \setminus \{\mathbf{p}\} \quad \text{implica } f(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(L)$$

- $$\forall\, Y \text{ vizinhança de } L\ \exists\, X \text{ vizinhança de } \mathbf{p} \text{ tal que}$$
  $$\mathbf{x} \in D \cap X \setminus \{\mathbf{p}\} \quad \text{implica } f(\mathbf{x}) \in Y$$

Limites infinitos:

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = +\infty$ significa

  $$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \textit{ e } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } f(\mathbf{x}) > M$$

- $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = -\infty$ significa

  $$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \textit{ e } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } f(\mathbf{x}) < M$$

Limites no infinito (para D não limitado):

- $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = L$ significa

  $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, H > 0 \text{ tal que } x \in D \textit{ e } \|\mathbf{x}\| > H \text{ implica } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

7.4 Continuidade

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$.

- dizemos que f **é contínua em p**, se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \textit{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta \text{ implica } |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})| < \varepsilon$$

- caso contrário, dizemos que f **é descontínua em p**, (*lembre que se* $\mathbf{p} \notin D$*, não se fala em continuidade ou descontinuidade em* $\mathbf{p}$)
  - se f é contínua em $\mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in A$ dizemos f **é contínua em** A
  - se f é contínua em $\mathbf{p}$ para todo $\mathbf{p} \in D$ dizemos f **é contínua**

- $\mathbf{p} \in D$ é ponto de acumulação de D: f é contínua em $\mathbf{p}$ se, e somente se,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p})$$

- $\mathbf{p} \in D$ não é ponto de acumulação de D: f é sempre contínua em $\mathbf{p}$.

Observação: Definições de limite e continuidade para funções de várias variáveis a valores vetoriais $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ são análogas às anteriores, basta substituir $|\cdot|$ por $\|\cdot\|$ onde for necessário.

8 Propriedades

8.1 Cálculo de limites:

Valem propriedades análogas ao caso em uma variável (limite de operações, da composta, unicidade, permanência do sinal, confronto, anulamento: veja Propriedades - suficiente substituir $|\cdot|$ por $\|\cdot\|$ onde precisar). Em particular:

8.1.1 Limite da composta: forma geral

Teorema (Limite da composta: forma geral).
Sejam

$$\mathbf{f} : D_{\mathbf{f}} \subseteq \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^n\,, \quad \mathbf{g} : D_{\mathbf{g}} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k\,, \quad Im(\mathbf{f}) \subseteq D_{\mathbf{g}},$$

$$\mathbf{p} \text{ ponto de acumulação de } D_{\mathbf{f}}\,, \quad \mathbf{a} \text{ ponto de acumulação de } D_{\mathbf{g}}\,,$$

tais que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \quad \text{e} \quad \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = L\,.$$

Se vale pelo menos UMA entre:

(a) $\mathbf{a} \in D_{\mathbf{g}}$ e $\mathbf{g}$ contínua em $\mathbf{a}$,

(b) $\exists\, r > 0 :\ \mathbf{x} \in D_{\mathbf{f}}\ e\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{a}\,.$

Então

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = L\,.$$

Em particular: se $\mathbf{f}$ é contínua em $\mathbf{p}$ e $\mathbf{g}$ é contínua em $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ então

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{p})).$$

Corolário (Continuidade das composições de contínuas).
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão, composição de funções continuas, **é contínua no seu domínio natural**.

São contínuas, no seu domínio:
- projeção: $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto x_i$,
- norma: $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$,
- polinomiais, racionais, algébricas, transcendentais

8.1.2 Teorema do Confronto

Teorema (de confronto).
Sejam $f, g, h : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{p}$ ponto de acumulação de D. Se

$$\exists\, r > 0 : \ \mathbf{x} \in D \ e \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \ \Rightarrow f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$$

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = L$$

então $\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = L$.

8.1.3 Teorema do Anulamento

Teorema (do Anulamento).
Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{p}$ ponto de acumulação de D. Se

$$\exists\, M > 0, \exists\, r > 0 : \ \mathbf{x} \in D \ e \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \ \Rightarrow |f(\mathbf{x})| \leq M$$

(isto é, f é limitada em uma vizinhança de $\mathbf{p}$)

e

$$\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = 0$$

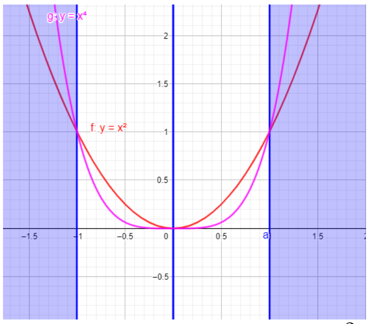
então $\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = 0$.

8.1.4 Limites por caminhos

Motivação: Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$?

Considere $F(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$, $\quad D_F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

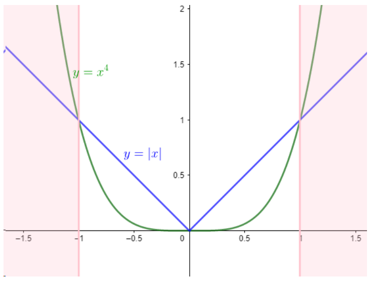
Conseguimos escrever $F(x,y) = f(x,y)g(x,y)$, onde f é uma função limitada e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$?



$$F(x,y) = \frac{x^2}{x^4+y^2}\,y$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$

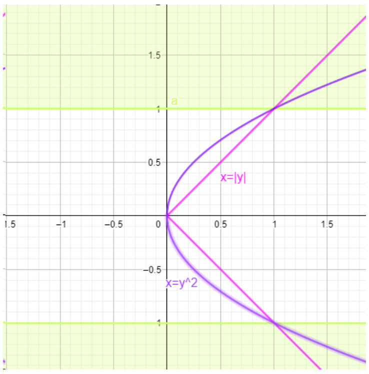
$\left|\dfrac{x^2}{x^4+y^2}\right| \leq 1$ para $|x| \geq 1$



$$F(x,y) = \frac{x}{x^4+y^2}\,xy$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$

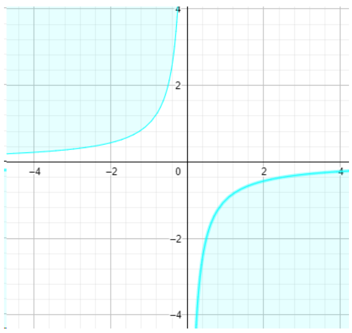
$\left|\dfrac{x}{x^4+y^2}\right| \leq 1$ para $|x| \geq 1$



$$F(x,y) = \frac{y}{x^4+y^2}\,x^2$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$

$\left|\dfrac{y}{x^4+y^2}\right| \leq 1$ para $|y| \geq 1$



$$F(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^2}\,x$$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$

$\left|\dfrac{xy}{x^4+y^2}\right| \leq 1$ para $|xy| \geq 1$ e $xy < 0$

Figuras geradas no Geogebra2D

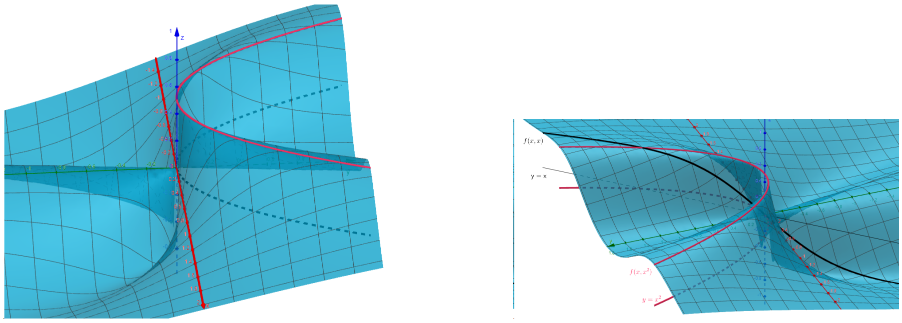


Figura 11: Intersecções de $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ com $x = 0$, $y = x$ e $y = x^2$, Geogebra 3D Classic

Teorema. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{p}$ *um ponto de acumulação de* D*.*

Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to D \cup \{\mathbf{p}\}$ *uma curva (portanto contínua,* I *intervalo) tal que:*

- $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$ *para algum* $t_0 \in I$*,*
- $\gamma(t) \neq \mathbf{p}$*, para todo* $t \neq t_0$*.*

Se $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$*, então* $\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = L$

Consequências:

- se γ como acima e vale $\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma(t)) = L$ então

$$\text{ou} \quad \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L \quad \text{ou} \quad \nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$$

- se para γ_1, γ_2 (distintas) como acima vale $\lim\limits_{t\to t_0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim\limits_{t\to t_1} f(\gamma_2(t))$, então

$$\nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$$

Figura 12: Intersecções de $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ com $x = 0$, $y = 0$ e $y = x$

8.2 Teoremas sobre funções contínuas (ver máximos e mínimos absolutos, Slide 12)

Lembrete de Cálculo 1:

Teorema (**Teorema do valor intermediário**).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) > \gamma > f(b) \qquad ou \qquad f(a) < \gamma < f(b)$$

então existe $c \in (a, b) : \ f(c) = \gamma$.
Em particular f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema (**Teorema de Weiestrass**).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então existem $x_1, x_2 \in [a, b] : \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall\, x \in [a, b]$.

Corolário.
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.

Definições

- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **compacto** quando é fechado e limitado.
- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **conexo por caminhos** quando para todos $x, y \in D$ existe uma curva (contínua) $\gamma : [a, b] \to D$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

Teorema (**Teorema de Weiestrass em** $\mathbb{R}^n$).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto,
então existem $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D : \ f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \ \forall\, \mathbf{x} \in D$.

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D conexo por caminhos.
Se $c, d \in Im(f)$ **com** $c < d$, **então** $[c, d] \subseteq Im(f)$.

Corolário.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto e conexo por caminhos,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.

9 Derivadas Parciais

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in D$ um ponto de acumulação de D. Seja $\mathbf{e_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ o versor (vetor unitário) cujas coordenadas são todas iguais a 0 exceto a i-ésima que é igual a 1.

- **Se existir**

  $$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{e_i}) - f(\mathbf{p})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p_1,\ldots,p_i+h,\ldots,p_n) - f(p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_n)}{h} = L$$

  ($L \in \mathbb{R}$) então dizemos que

  - **L é a derivada parcial de f, em relação à variável x_i, em $\mathbf{p}$**

    notação: $L := \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}) = f_{x_i}(\mathbf{p}) = f_i(\mathbf{p}) = D_i f(\mathbf{p}) = D_{\mathbf{e_i}}(\mathbf{p})$.

- Se o limite ou não existir ou for infinito, dizemos que

  - **a derivada parcial de f, em relação à x_i, em $\mathbf{p}$ não existe**.

Note: se considerarmos $\mathbf{x} = \mathbf{p} + h\mathbf{e_i} = (p_1, \ldots, p_i + h, \ldots, p_n)$, então

$$\mathbf{x} = (p_1, \ldots, x_i, \ldots, p_n) \quad \text{onde } x_i = p_i + h$$

e portanto $h = x_i - p_i$ e

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{e_i}) - f(\mathbf{p})}{h} = \lim_{x_i\to p_i} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})}{x_i - p_i}$$

9.1 Interpretação Geométrica

Caso particular $\mathbf{n = 2}$: $\mathbf{p} = (a, b)$, $f(x, b) = g(x)$, $f(a, y) = w(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{\overbrace{f(x,b)}^{g(x)}-\overbrace{f(a,b)}^{g(a)}}{x-a} = g'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} = \lim_{y\to b}\frac{\overbrace{f(a,y)}^{w(y)}-\overbrace{f(a,b)}^{w(b)}}{y-b} = w'(b)$$

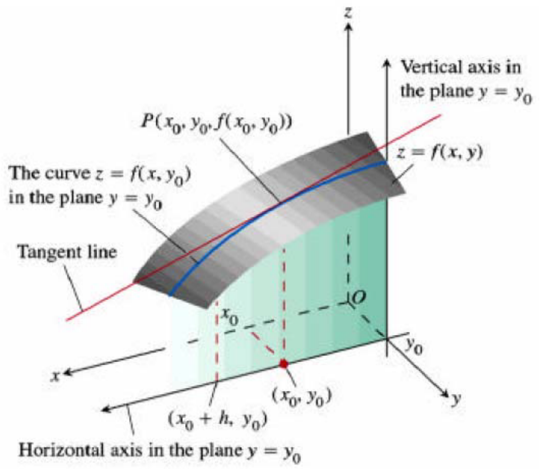


Figura 13: figura encontrada na internet

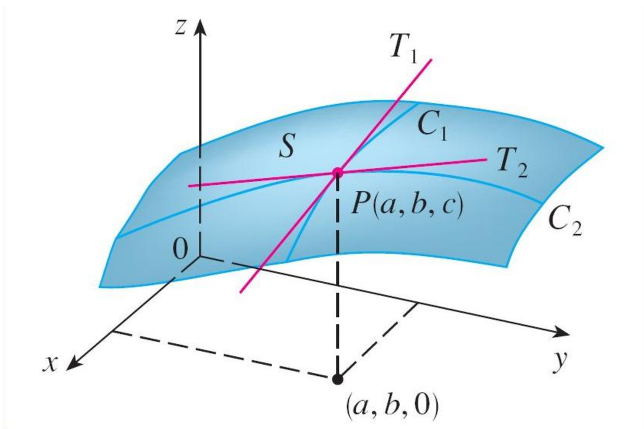


Figura 14: Stewart, Cálculo , vol. 2

Animação no Geogebra

Caso particular **$n = 3$**: $\mathbf{p} = (a, b, c)$,

$$f(x, b, c) = \varphi(x), \;\; f(a, y, c) = \psi(y), \;\; f(a, b, z) = \rho(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(a+h, b, c)}^{\varphi(a+h)} - \overbrace{f(a, b, c)}^{\varphi(a)}}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b, c) - f(a, b, c)}{x - a} = \varphi'(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \lim_{k \to 0} \frac{\overbrace{f(a, b+k, c)}^{\psi(b+k)} - \overbrace{f(a, b, c)}^{\psi(b)}}{k} = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y, c) - f(a, b, c)}{y - b} = \psi'(b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{r \to 0} \frac{f(a, b, c+r) - f(a, b, c)}{r} = \lim_{z \to c} \frac{\overbrace{f(a, b, z)}^{\rho(z)} - \overbrace{f(a, b, c)}^{\rho(c)}}{z - c} = \rho'(c)$$

Se a derivada parcial de f em relação a x_j existe em todos os pontos de um conjunto $A \subset D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ então podemos definir a **função derivada parcial**:

$$f_{x_j} : A \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f_{x_j}(\mathbf{x}); \qquad j = 1, .., n,$$

e o domínio A éo conjunto

$$dom(f_{x_j}) = \{p \in D_f : p \text{ é ponto de acumulação de } D_f \text{ e } L \text{ é finito}\} \subseteq D_f$$

Cálculo das derivadas parciais: basta usar as regras de derivação (do Cálculo 1) supondo que a função dependa só daquela variável, enquanto as outras variáveis SÃO PENSADAS como constantes.

Lembre-se: as regras de derivação podem ser aplicadas no conjunto dos pontos onde todas as funções “envolvidas" são deriváveis!!!

9.2 Derivadas de ordem superior

Derivadas parciais de ordem superior: quando podemos derivar cada *função derivada parcial* mais vezes teremos:

derivadas parciais de segunda ordem:

- derivada segunda de f com respeito a x_k (primeiro) e a x_j (depois):

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\underleftarrow{\partial x_j \partial x_k}}\right) \quad \text{ou} \quad (f_{x_k})_{x_j} = f_{x_k x_j} \left(f_{\underrightarrow{x_k x_j}}\right)$$

- derivada segunda de f com respeito a x_j duas vezes:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \quad \text{ou} \quad (f_{x_j})_{x_j} = f_{x_j x_j}$$

Pela definição, por exemplo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (f_y)_x(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h} \\ &= \lim_{w\to x} \frac{f_y(w,y) - f_y(x,y)}{w-x}\end{aligned}$$

derivadas parciais de terceira ordem:

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k^2} = f_{x_k x_k x_j}$

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_k \partial x_i} = f_{x_i x_k x_j}$

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j^3} = f_{x_j x_j x_j}$

$\vdots$

etc.

9.3 Classes de derivabilidade e derivadas mistas

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$:

- dizemos que **f é de classe $\mathcal{C}^k$ em A** ($f \in \mathcal{C}^k(A)$) se f e todas suas derivadas parciais até a ordem k existem e são contínuas em todo A.
- dizemos que **f é de classe $\mathcal{C}^\infty$ em A** ($f \in \mathcal{C}^\infty(A)$) se f e todas suas derivadas parciais de todas as ordens existem e são contínuas em todo A.

Teorema (**Teorema de Schwarz**).
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{C}^2(A)$, **então $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ em A.**

Corolário.
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{C}^k(A)$, **então, em A, a ordem de derivação não importa para as derivadas até a ordem k.**

Corolário.
Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$, **então, em A, a ordem de derivação não importa para as derivadas parciais de qualquer ordem.**

- Exemplos:
  1. Funções polinomiais pertencem à classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
  2. Funções racionais são funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ em seus domínios naturais.
  3. Soma, produto, composta de funções que pertencem à classe $\mathcal{C}^k(A)$ são funções de classe $\mathcal{C}^k(A)$:

$$f(x,y) = x^3 y + e^{y^2} \text{ é de classe } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$$
$$f(x,y) = |x|^3 + y \text{ é de classe } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2) \qquad (verifique!)$$

Se $f = f(x,y)$, **pode $f_{xy} \neq f_{yx}$?**

9.4 Existe relação entre derivadas parciais e continuidade?

Em Cálculo 1:

Se $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função e $p \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f, então:

- f derivável em $p \Longrightarrow f$ contínua em p.
- f não contínua em $p \Longrightarrow f$ não derivável em p.
- f contínua em $p \not\Rightarrow f$ derivável em p.

10 Diferenciabilidade

- Em cálculo 1 uma função derivável era sempre contínua, e sempre possuía um reta tangente.
- Uma função de várias variáveis pode ter todas as derivadas parciais mas não ser contínua.

Em Cálculo 1 temos:

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é derivável (diferenciável) em** p , *onde* $p \in D$ *um ponto de acumulação de* D*, quando:*

$\boxed{\text{existe } M \in \mathbb{R}}$ *tal que:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = M \iff \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(p+h)-f(p)-\overbrace{Mh}^{\mathcal{L}(h)}}{|h|}\right] = 0$$

onde $\boxed{\mathcal{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } \mathcal{L}(x) = Mx \text{ é uma função linear}}$.

Neste caso, dizemos que $\boxed{M = f'(p)}$ *é a* *derivada de f em p*.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D.

- Dizemos que f **é diferenciável em p,** se existe uma função linear $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \mathcal{L}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Lembre-se:

- Uma **função linear** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem a forma:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = M_1 x_1 + \ldots + M_n x_n,$$

onde $\mathbf{a} = (M_1, \ldots, M_n)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

Caso particular $n = 2$**:**

- $\mathbf{x} = (x, y)$ $\mathbf{p} = (a, b)$, $\mathbf{h} = (h, k)$,
- Uma **função linear** $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tem a forma: $\mathcal{L}(x, y) = Mx + Ny$.
- f **é diferenciável em** (a, b) **quando: existem** $M, N \in \mathbb{R}$ **tais que**

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - M(x-a) - N(y-b)}{\|(x-a, y-b)\|} = 0$$

ou

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - Mh - Nk}{\|(h,k)\|} = 0$$

ou, escrevendo

$$E_{(a,b)}(h,k) = E(h,k) := f(a+h, b+k) - f(a,b) - Mh - Nk,$$

$$\lim_{(\mathbf{h},\mathbf{k})\to(\mathbf{0},\mathbf{0})} \frac{\mathbf{E}(\mathbf{h},\mathbf{k})}{\|(\mathbf{h},\mathbf{k})\|} = \mathbf{0}$$

$(n = 2)$ f **é diferenciável em p** $= (a, b) \iff \exists M, N \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0, \qquad (\star)$$

$$E(h,k) := f(a+h, b+k) - f(a,b) - Mh - Nk.$$

10.1 Condições necessárias para diferenciabilidade

$n = 2:$ $\mathbf{p} \in D_f$ ponto de acumulação, interior de D_f

f é diferenciável em $\mathbf{p} = (a, b)$ $\iff$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}\|(h,k)\| = 0$$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(a+h, b+k) - f(a,b) - Mh - Nk] = 0$$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(a+h, b+k) - f(a,b)] = 0$$

$$\underset{y=b+k}{\overset{x=a+h}{\iff}} \lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) - f(a,b)] = 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

- **f é contínua em p.**

---

f é diferenciável em $\mathbf{p} = (a, b)$ $\iff$

$$\iff \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

✓ $$\Longrightarrow \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \gamma:\, k=0}} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{h\to 0} \frac{E(h,0)}{\|(h,0)\|} = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b) - Mh}{|h|} = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b) - Mh}{h} = 0$$

$$\iff \quad \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} - M\right] = 0$$

$$\iff \quad M = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\right] = f_x(a,b)$$

. . . .

✓

$$\Longrightarrow \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \gamma:\, h=0}} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$\iff N = f_y(a,b)$$

- **existem as derivadas parciais de f em p.**

- $M = f_x(\mathbf{p})$ **e** $N = f_y(\mathbf{p})$

Teorema. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.
Se f é diferenciável em $\mathbf{p}$ então

- **f é contínua em p,**
- **existem as derivadas parciais de f em p,**
- **necessariamente** $M_1 = f_{x_1}(\mathbf{p}), \ldots, M_n = f_{x_n}(\mathbf{p})$

Em particular,

$$f \text{ diferenciável} \Longrightarrow f \text{ contínua}$$

Consequências:

- f não contínua em $\mathbf{p} \Longrightarrow f$ não diferenciável em $\mathbf{p}$
- $\nexists$ alguma derivada parcial de f em $\mathbf{p} \Longrightarrow f$ não diferenciável em $\mathbf{p}$

10.2 Condição suficiente e necessária para diferenciabilidade

Teorema 10.1. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.

f é diferenciável em $\mathbf{p}$ se, e somente se,

- existe $f_{x_1}(\mathbf{p})$
- existe $f_{x_2}(\mathbf{p})$
- $\vdots$
- exite $f_{x_n}(\mathbf{p})$
- $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} \dfrac{E(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$, onde

$$E(\mathbf{h}) := f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - f_{x_1}(\mathbf{p})h_1 - f_{x_2}(\mathbf{p})h_2 - \ldots - f_{x_n}(\mathbf{p})h_n$$

Note:

$$E(\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - (f_{x_1}(\mathbf{p}), f_{x_2}(\mathbf{p}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{p})) \cdot \mathbf{h}$$

10.3 Vetor Gradiente, Derivada e Diferencial

Vetor Gradiente

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que as derivadas parciais de primeira ordem existem em $\mathbf{p}$, onde $\mathbf{p} \in D$ é um ponto interior de D.

O **vetor gradiente** de f em $\mathbf{p}$ é definido por

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p})\right).$$

Para verificar diferenciabilidade de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{p}$ é preciso primeiro calcular $\nabla f(\mathbf{p})$ e depois verificar se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = 0$$

ou

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Derivada

Lembre-se: Em Cálculo 1: Quando $\exists M \in \mathbb{R}$;

$\lim_{h\to 0}\left[\dfrac{f(p+h)-f(p)-Mh}{|h|}\right]=0$, *dizemos que* $M = f'(p)$ *é a* *derivada de* f *em* p

---

Definimos a **derivada** de $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{p}$ por $f'(\mathbf{p}) := \nabla f(\mathbf{p})$.

A **função derivada** de f é aquela dada por:

$$f' : D_{f'} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

onde

$D_{f'} := \{\mathbf{x} \in D_f : \mathbf{x}$ é ponto interior de D_f e f possui todas derivadas parciais em $\mathbf{x}\}$

e

$$f'(\mathbf{x}) := \nabla f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_{f'}.$$

Dizemos que f é **derivável em** A quando ∇f existe (i.e., todas as derivadas parciais existem) em todos os pontos de A.

Portanto,

$$\boxed{f \text{ diferenciável} \implies f \text{ derivável}}$$

Diferencial

Em Cálculo 1, a diferencial de f $(y = f(x))$ é definida por:

$$df = dy = f'(p)dx, \qquad dx = h, \qquad\qquad e\ vale: \quad dy \approx \Delta y.$$

(Para uma interpretação geométrica, ver aqui)

A **diferencial de f em p** é definida por $df_{\mathbf{p}} = \mathcal{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$$df_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = f'(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$

ou

$$df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) = \mathcal{L}(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} = f'(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}.$$

Ainda, sendo $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ e $dx_i := h_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então

$$df_{\mathbf{p}}(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p})dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{p})dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p})dx_n$$

Fazendo $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$,

$$E(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}),$$

se f é diferenciável em $\mathbf{p}$, então:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \underbrace{\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})}_{df_{\mathbf{p}}(x)} + E(\mathbf{x}),$$

onde

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} \frac{E(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} = 0 \quad \text{(e portanto } \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} E(\mathbf{x}) = 0\text{)}.$$

Portanto,

$$df_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) =: \Delta z, \quad \textbf{quando } \mathbf{x} \approx \mathbf{p}$$

10.4 Condição suficiente para diferenciabilidade

Teorema (Condição para diferenciabilidade).
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.

Se **existem** as derivadas parciais de f em uma vizinhança de $\mathbf{p}$ e elas **são contínuas** em $\mathbf{p}$ então f **é diferenciável em p.**

Portanto: se A é aberto e $f \in \mathcal{C}^1(A)$ então f é diferenciável em A.

Atenção: pode acontecer de f ser diferenciável mas não ter derivadas parciais contínuas!

- **Exemplo:**
  - $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \mathbf{p} = (0,0)$$

$$\checkmark\, f_x(0,0) = \begin{cases} 2x\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 \sin\left(\dfrac{1}{h^2}\right)}{h} = 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) : \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f_x(x,y) :$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) :$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\pi + 2n\pi}} \to 0; \cos\left(\frac{1}{2x_n^2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad t_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \to 0; \cos\left(\frac{1}{2t_n^2}\right) = 1$$

$$\checkmark\, f_y(0,0) = \begin{cases} 2y\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0) \\[2em] \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0}\dfrac{k^2\sin\left(\dfrac{1}{k^2}\right)}{k} = 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$$

$$\boxed{\checkmark\, f_x \text{ e } f_y \text{ NÃO são contínuas em (0,0)}}$$

$$\checkmark \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\|(h,k)\|}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(h^2+k^2)\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right)$$

$$= 0$$

$$\boxed{f \text{ é diferenciável em } (0,0).}$$

De fato, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

10.5 Regras e teoremas de derivação / diferenciação

Sejam $k \in \mathbb{R}$ e

$f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **deriváveis** em $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D)

então

- $kf,\ f \pm g,\ fg$ **são deriváveis em** $\mathbf{p}$,
- f/g **é derivável em** $\mathbf{p}$, **desde que** $g(\mathbf{p}) \neq 0$,
- **vale**

$$\begin{cases} \nabla(kf)(\mathbf{p}) = k\,\nabla f(\mathbf{p})\,, \\ \nabla(f \pm g)(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \pm \nabla g(\mathbf{p})\,, \\ \nabla(fg)(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})\nabla f(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\nabla g(\mathbf{p})\,, \\ \\ \nabla(f/g)(\mathbf{p}) = \dfrac{g(\mathbf{p})\nabla f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})\nabla g(\mathbf{p})}{g^2(\mathbf{p})} \qquad (\text{se } g(\mathbf{p}) \neq 0). \end{cases}$$

Sejam $k \in \mathbb{R}$ e

$f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, **diferenciáveis** em $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D)

então

- $kf,\ f \pm g,\ fg$ **são diferenciáveis em** $\mathbf{p}$,
- f/g **é diferenciável em** $\mathbf{p}$, **desde que** $g(\mathbf{p}) \neq 0$,
- **vale**

$$\begin{cases} d(kf)_{\mathbf{p}} = k\,df_{\mathbf{p}}\,, \\ d(f \pm g)_{\mathbf{p}} = df_{\mathbf{p}} \pm dg_{\mathbf{p}}\,, \\ d(fg)_{\mathbf{p}} = g(\mathbf{p})df_{\mathbf{p}} + f(\mathbf{p})dg_{\mathbf{p}}\,, \\ \\ d(f/g)_{\mathbf{p}} = \dfrac{g(\mathbf{p})df_{\mathbf{p}} - f(\mathbf{p})dg_{\mathbf{p}}}{g^2(\mathbf{p})} \qquad (\text{se } g(\mathbf{p}) \neq 0). \end{cases}$$

10.6 Resumo

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.

- f **diferenciável em p** $\Longrightarrow$ f **é contínua em p,**
- f **diferenciável em p** $\Longrightarrow$ f **é derivável em p,**
- f **derivável numa viz. de p e** f' **contínua em p** $\Longrightarrow$ f **diferenciável em p,**
- f **diferenciável em p** $\Longleftrightarrow$ f **derivável e** $\lim_{\mathbf{h}\to 0} \dfrac{E(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$

$$E(\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \underbrace{\nabla f(\mathbf{p})}_{f'(\mathbf{p})} \cdot \mathbf{h}$$

- **vale** $df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$
- f **diferenciável em p** $\Longrightarrow$ $df_{\mathbf{p}}(\mathbf{h}) \approx \Delta z = f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})$ **para** $\mathbf{h} \approx 0$

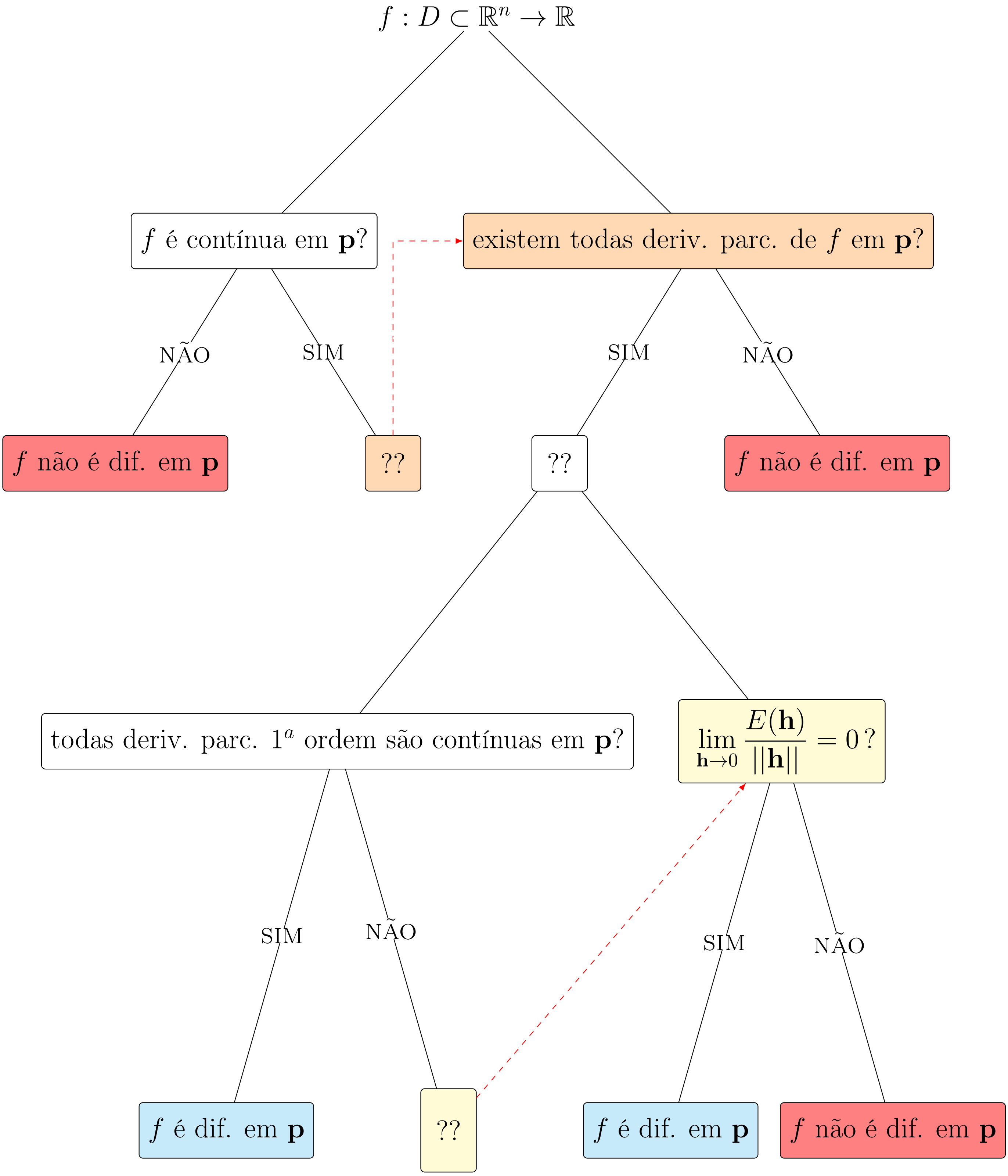
Consequentemente:

- f **não contínua em p** $\Longrightarrow$ f **não é diferenciável em p,**
- **alguma derivada parcial de** 1^a **ordem de** f **não existe em p** $\Longrightarrow$ f **não é diferenciável em p.**

Atenção para não errar:

- f **contínua em p** $\not\Rightarrow$ f **derivável em p**
- f **contínua em p** $\not\Rightarrow$ f **diferenciável em p**
- f **derivável em p** $\not\Rightarrow$ f **contínua em p**
- f **derivável em p** $\not\Rightarrow$ f **diferenciável em p**
- **derivadas parciais de** 1^a **ordem de** f **não contínuas em p** $\not\Rightarrow$ f **não diferenciável em p**

10.7 Diagrama: como decidir se f é diferenciável?



$$\boxed{E(\mathbf{h}) := f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}}$$

11 Derivada Direcional

Lembre-se: $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{e_i})-f(\mathbf{p})}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. *(Geogebra)*

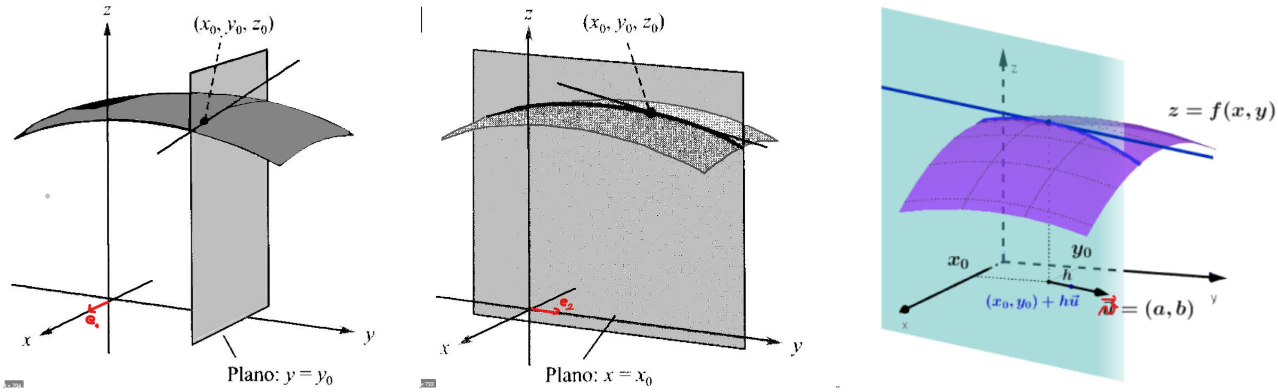


Figura 15: Figuras da internet

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in \mathring{D}$ e $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ um vetor unitário.

- **Se existir**
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+h\vec{\mathbf{v}})-f(\mathbf{p})}{h} = L \ \in \mathbb{R},$$
então dizemos que
  - **f é derivável em p na direção $\vec{\mathbf{v}}$,**
  - **L é a derivada direcional de f em p, na direção $\vec{\mathbf{v}}$;**

  notação: $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p}) := L$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\mathbf{p}) := L$.
- Se o limite não fizer sentido, ou não existir (ou for infinito), dizemos que
  - **f não é derivável em p na direção $\vec{\mathbf{v}}$.**

Teorema.
Sejam $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D e $\vec{\mathbf{v}}$ um vetor unitário.

Se f *é diferenciável* em $\mathbf{p}$ então

- **f é derivável em p em qualquer direção,**
- **vale $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$**

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D$ um ponto interior de D.

Se f *é diferenciável* em $\mathbf{p}$ e $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$ então

- o valor máximo de $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p})$ ocorre quando $\vec{\mathbf{v}} = \nabla f(\mathbf{p}) / \|\nabla f(\mathbf{p})\|$, e
- o **valor máximo** de $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(\mathbf{p})$ é $\|\nabla f(\mathbf{p})\|$

  e ainda mais

- a partir de $\mathbf{p}$, a **direção** e o **sentido** que se deve tomar para que f **cresça mais rapidamente** é a do vetor gradiente $\nabla f(\mathbf{p})$.

Analogamente,

- a partir de $\mathbf{p}$, a **direção** e o **sentido oposto** de $\nabla f(\mathbf{p})$ é a de **mínimo crescimento para** f
- a **taxa de variação mínima** de f em $\mathbf{p}$ é $-\|\nabla f(\mathbf{p})\|$.

12 Plano Tangente

Em Cálculo 1:
f é derivável (diferenciável) em p quando existe $M = f'(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)}{x-p}\right] = \lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-[f(p)+f'(p)(x-p)]}{|x-p|}\right] = 0,$$

e quando f é derivável em p, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é definida pela função afim $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$.
De outra forma, podemos definir, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ como sendo a única função afim $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T(p) = f(p)$ e

$$\lim_{x\to p}\left[\frac{f(x)-T(x)}{|x-p|}\right] = 0;$$

e assim, f é derivável em p se e somente se *$T(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$.*

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de D.

Definição:
O **(hiper)plano tangente ao gráfico de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$** é a única (se existir) função afim $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\pi(\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$ e satisfaz a propriedade:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{f(\mathbf{x})-\pi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|} = 0.$$

Observação: O (hiper)plano tangente é a **função afim que (neste sentido) melhor aproxima a função, quando x está perto de p**:

$$f(\mathbf{x}) \approx \pi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \approx \mathbf{p}.$$

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p} \in D$ um ponto <u>interior</u> de D.
Se f é diferenciável em $\mathbf{p}$ então

$$\pi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})$$

Caso $n = 2$: $\mathbf{p} = (a, b)$ e $\mathbf{x} = (x, y)$

Se f é diferenciável em (a, b), então o **plano tangente ao gráfico de f no ponto** $P = (a, b, f(a, b))$ é dado por:

$$z = \pi(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \tag{12.1}$$

Atenção: O (hiper)plano $\pi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ *pode existir*, mas ele *pode não ser o (hiper)plano tangente* ao gráfico de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$!!!

. . . .

Resumo: Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto,

- f diferenciável em $D \iff graf(f)$ possui plano tangente em todos pontos
- f derivável em $D \not\Rightarrow graf(f)$ possui plano tangente em todos pontos

13 Derivada

Lembrete: A derivada de $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em $\mathbf{p}$ foi definida por

$$f'(\mathbf{p}) := \nabla f(\mathbf{p}) \cong \left(\frac{\partial f1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{p}) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{p})\right)_{1\times n}.$$

Se $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \geq 1)$ é tal que

$$\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

então dizemos que **$\mathbf{f}$ é diferenciável** (resp., **derivável**) em $\mathbf{p}$ quando cada função $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, é diferenciável (resp., derivável) em $\mathbf{p}$. A **derivada de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{p}$** é definida como sendo a aplicação linear $\mathbf{f}'(\mathbf{p}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

representada pela matriz $m \times n$ (chamada **Matriz Jacobiana**):

$$\mathbf{f}'(\mathbf{p}) := \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \nabla f_j(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{p}) \end{bmatrix}_{m\times n} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \\ & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Outras notações para a matriz Jacobiana: $\nabla \mathbf{f} = J_{\mathbf{f}} = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ (Wikipédia)

14 Regra da Cadeia

Do Cálculo 1, sabemos que: se $y = f(x)$ e $x = g(t)$ são funções diferenciáveis, então

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} = \frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = f'(g(t))g'(t) = \frac{df}{dx}(g(t))\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}}\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$$

14.1 Função (real) de várias variáveis composta com Curva

Se

- $\gamma : D_\gamma \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é uma curva
- $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com $Im(\gamma) \subseteq D_f$ é uma função de várias variáveis
- t_0 ponto interior de D_γ
- $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$ ponto interior de D_f
- γ é diferenciável em t_0, i.e.,

$$\exists \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} = \gamma'(t_0)$$

- f é diferenciável em $\mathbf{p} = \gamma(t_0)$, i.e.,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\gamma(t_0)} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\gamma(t_0)) - \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (\mathbf{x} - \gamma(t_0))}{\|\mathbf{x} - \gamma(t_0)\|} = 0,$$

então:

$F := f \circ \gamma : D_\gamma \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é diferenciável em** t_0 **e vale**

$$F'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = \underbrace{\nabla f}_{f'}(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

Quando $n = 2$**:** $z = f(x, y)$; $\gamma(t) = (x(t), y(t))$: $x = x(t)$ e $y = y(t)$ temos:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

14.2 Função (real) de várias variáveis composta com Função (vetorial) de várias variáveis

Se $(m, n \geq 1)$

- $\mathbf{g} : D_\mathbf{g} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função de várias variáveis a valores vetoriais
- $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com $Im(\mathbf{g}) \subseteq D_f$, é uma função de várias variáveis a valores reais
- $\mathbf{p}_0$ é ponto interior de $D_\mathbf{g}$
- $\mathbf{p} = \mathbf{g}(p_0)$ é ponto interior de D_f
- $\mathbf{g}$ é diferenciável em $\mathbf{p}_0$
- f é diferenciável em $\mathbf{p} = \mathbf{g}(\mathbf{p}_0)$,

então $F := f \circ \mathbf{g} : D_\mathbf{g} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ **é diferenciável em** $\mathbf{p}_0$ **e vale**

$$F'(\mathbf{p}_0) = (f \circ \mathbf{g})'(\mathbf{p}_0) = f'(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{p}_0)$$

Escrevendo:

$$
\begin{array}{ll}
f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, & f = f(x_1, \ldots, x_n) \\
\mathbf{g} : D_{\mathbf{g}} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, & \mathbf{g} = \mathbf{g}(u_1, \ldots, u_m) = (g_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, g_n(u_1, \ldots, u_m)) \\
F = f \circ g : D_{\mathbf{g}} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, & F = F(u_1, \ldots, u_m)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f' &= \nabla f \cong \text{matriz } 1 \times n \\
\mathbf{g}' &= \nabla \mathbf{g} \cong \text{matriz } n \times m \\
F' &= \nabla F \cong \text{matriz } 1 \times m
\end{aligned}
$$

$$
f'(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \; \ldots \; \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \; \ldots \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \right)_{1 \times n}
$$

$$
\mathbf{g}'(\mathbf{p}_0) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial g_1}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial g_j}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_j}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_j}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0) \\
 & & & & \\
\frac{\partial g_n}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0)
\end{pmatrix}_{n \times m}
$$

$$
F'(\mathbf{p}_0) = f'(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{p}_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}(\mathbf{p}_0) \; \ldots \; \frac{\partial F}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) \; \ldots \; \frac{\partial F}{\partial u_m}(\mathbf{p}_0) \right)_{1 \times m}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \frac{\partial g_1}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \frac{\partial g_j}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \frac{\partial g_n}{\partial u_k}(\mathbf{p}_0) \\
&= \nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{p}_0)) \cdot \text{“} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{p}_0)}{\partial u_k} \text{”}
\end{aligned}
$$

$n, m = 2$: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $f = f(x, y)$, $\mathbf{g}(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$

$(f \circ \mathbf{g})(u, v) = f(\mathbf{g}(u, v)) = f(g_1(u, v), g_2(u, v)) = F(u, v)$

$f = f(x, y)$, onde $x = g_1(u, v)$ e $y = g_2(u, v) \Longrightarrow f = F(u, v)$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(u, v), g_2(u, v))\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

15 Interpretação Geométrica do Vetor Gradiente

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e $\mathbf{p} \in D$ um ponto de acumulação de D. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva regular tal que $\gamma(t_0) = \mathbf{p}$, contida num conjunto de nível de f: $f(\mathbf{x}) = c$. Então:

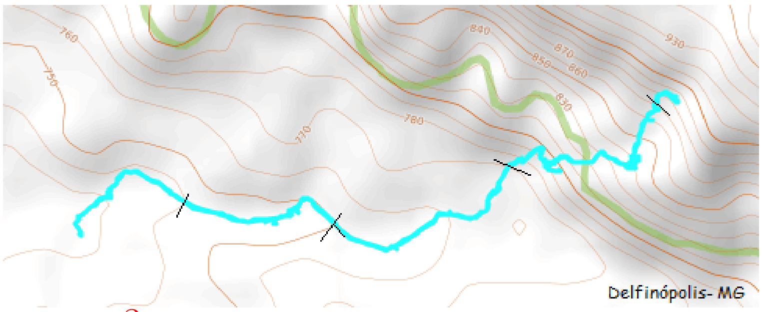
$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot \gamma'(t_0) = 0,$$

isto é: $\nabla f(\mathbf{p})$ é perpendicular a (qualquer curva no) conjunto de nível.

$n = 2$:

• $\nabla f(\mathbf{p})$ é um **vetor normal (perpendicular) à curva de nível $f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$**. A **reta tangente à curva de nível** $f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$ é dada por:

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0.$$



$\nabla f(\mathbf{p})$ indica a direção de maior crescimento de f

$n = 3$:

• $\nabla f(\mathbf{p})$ é um **vetor normal (perpendicular) à qualquer curva na superfície de nível $f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$**. O **plano tangente à superfície de nível**

$f(\mathbf{x}) = c$ em $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$$

ou seja, fazendo $\mathbf{p} = (a, b, c)$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$,

$$f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c) = 0. \tag{15.1}$$

OBS.: Se $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, então o gráfico de f é a superfície de nível $F(x, y, z) = 0$. Se f é diferenciável em (a, b), então as Equações 2.1 do Slide 9 e 15.1 acima coincidem. O vetor gradiente $\nabla F(a, b, f(a, b))$ é normal ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$.

16 Derivação implícita

A função $y = g(x)$ é **definida implicitamente** pela equação $f(x, y) = 0$ quando

$$f(x, g(x)) = 0, \quad x \in D_g.$$

Em Cálculo 1: *$y = g(x)$ tal que $y^2 + 2xy^3 = 0$, $y' = ?$:*

$$2yy' + 2y^3 + 6xy^2y' = 0 \Longrightarrow y' = \frac{-2y^3}{2y + 6xy^2}, \quad \textit{desde que } 2y + 6xy^2 \neq 0$$

Agora também podemos usar a Regra da Cadeia para funções de várias variáveis:

Se f e g são funções diferenciáveis tais que:

. . . .

- $F = f(x, y), \quad x = x \quad y = g(x), \quad$ *onde* $\quad f(x, g(x)) = 0, \quad x \in D_g.$

Então,

$$\frac{d}{dx}\left[f(x,g(x))\right]=0$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}g'(x)=0,$$

o que implica

$$\boxed{y'=g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))},\quad \text{desde que } f_y(x,g(x))\neq 0.}$$

. . . .

- $F=f(x,y,z),\quad x=x,\quad y=y,\quad z=g(x,y),\quad onde\quad f(x,y,g(x,y))=0.$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y,g(x,y))\right]=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

o que implica

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))},\quad \text{desde que } f_z(x,y,g(x,y))\neq 0.}$$

16.1 Teorema da Função Implícita, caso $f(x,y)=0$

Sejam

- $D\subset\mathbb{R}^2$ um conjunto aberto
- $f=f(x,y)$ **uma função de classe** $\mathcal{C}^1(D)$
- $(a,b)\in D$.

Se

$$f(a,b)=0,\qquad e\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0,$$

então a equação $f(x,y)=0$ define y como função de x, $y=g(x)$, numa vizinhança de (a,b),

isto é, exitem intervalos abertos $I\ni a$ e $J\ni b$ tais que

- para cada $x \in I$ existe um único $g(x) \in J$ com $f(x, g(x)) = 0$.

Além disso, a função $g : I \to J$ **é diferenciável** e vale

$$y' = g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}, \quad x \in I.$$

16.2 Teorema da Função Implícita, caso $f(x, y, z) = 0$

Sejam

- $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto
- $f = f(x, y, z)$ **uma função de classe** $\mathcal{C}^1(D)$
- $(a, b, c) \in D$.

Se

$$f(a, b, c) = 0, \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0,$$

então a equação $f(x, y, z) = 0$ define z como função de x, y, $z = g(x, y)$, numa vizinhança de (a, b, c),

isto é, exitem uma bola aberta $B \ni (a, b)$ e um intervalo aberto $J \ni c$ tais que

- para cada $(x, y) \in B$ existe um único $g(x, y) \in J$ com $f(x, y, g(x, y)) = 0$.

Além disso, a função $g : B \to J$ **é diferenciável** e vale

$$g_x(x, y) = -\frac{f_x(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}, \quad g_y(x, y) = -\frac{f_y(x, y, g(x, y))}{f_z(x, y, g(x, y))}, \quad (x, y) \in B.$$

. . . .

Se

$$f(a, b, c) = 0, \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) \neq 0,$$

então a equação $f(x, y, z) = 0$ define x como função diferenciável de y, z, $x = g(y, z)$, numa vizinhança $B' \times J' \ni (b, c) \times \{a\}$,

$$g_y(y, z) = -\frac{f_y(x, y, g(y, z))}{f_x(x, y, g(y, z))}, \quad g_z(y, z) = -\frac{f_z(x, y, g(y, z))}{f_x(x, y, g(y, z))}, \quad (y, z) \in B'.$$

Se
$$f(a,b,c) = 0, \qquad e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) \neq 0,$$
então a equação $f(x,y,z) = 0$ define y como função diferenciável de x, z, $y = g(x,z)$, numa vizinhança $B_1 \times J_1 \ni (a,c) \times \{b\}$,
$$g_x(x,z) = -\frac{f_x(x,y,g(x,z))}{f_y(x,y,g(x,z))}, \quad g_z(x,z) = -\frac{f_z(x,y,g(x,z))}{f_y(x,y,g(x,z))}, \quad (x,z) \in B_1.$$

17 Polinômio de Taylor

17.1 Teorema do Valor Médio e consequências

Lembrete de Cálculo 1: Teorema do valor médio.
Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Consequência: Se $f' \equiv 0$ em (a,b), então f é constante em (a,b).

Teorema (Teorema do valor médio para funções de várias variáveis). Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$, então existe $t \in (0,1)$ tal que
$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}.$$
Equivalentemente:
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \nabla f(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$$
para algum $\mathbf{q}$ no segmento entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{x}$.

Algumas consequências:

- Seja $f \in \mathcal{C}^1(A)$ com $\nabla f \equiv 0$ em A, onde A é aberto e conexo por caminhos. **Então, f é constante em A.**

- Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0, 1]$. Então

$$|f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p})| \leq C\|\mathbf{h}\|,$$

onde $C = max\{\|\nabla f(\mathbf{p} + t\mathbf{h})\|, \quad t \in [0, 1]\}$

17.2 Lembrete: Polinômio de Taylor em uma variável

- Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função k vezes derivável em $t_0 \in I$,

$$T^k_{f,t_0}(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!}(t - t_0)^j$$

é chamado **Polinômio de Taylor de ordem k, de f, no ponto t_0.**

Teorema (**P.d.T. com resto de Peano**).
Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função k vezes derivável em t_0, **então**

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - T^k_{f,t_0}(t)}{(t - t_0)^k} = 0\,.$$

Em outras palavras,

$$E^k_{f,t_0}(t) := f(t) - T^k_{f,t_0}(t) = o((t - t_0)^k) \text{ quando } t \to t_0\,.$$

Além disso, T^k_{f,t_0} é o único polinômio de grau no máximo k com esta propriedade.

Teorema (**P.d.T. com resto de Lagrange**).
Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função $k + 1$ vezes derivável em $V_\delta(t_0)$, para algum $\delta > 0$ então dado $t \in V_\delta(t_0) \setminus \{t_0\}$ existe c_t entre t e t_0 tal que

$$E^k_{f,t_0}(t) = f(t) - T^k_{f,t_0}(t) = \frac{f^{(k+1)}(c_t)}{(k + 1)!}(t - t_0)^{k+1}\,.$$

Se $|f^{(k+1)}(t)| \leq M$, $t \in V_\delta(t_0)$, *então*

$$|E^k_{f,t_0}(t)| \leq \frac{M}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1} \quad t \in V_\delta(t_0).$$

17.3 Polinômio de Taylor para funções de várias variáveis

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$.

Defina $g(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\mathbf{p} + t\mathbf{h})$ (que é $k+1$ vezes derivável em $[0,1]$):
Então

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) &= g(1) = T^k_{g,0}(1) + \frac{g^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}1^{k+1} \\ &= \sum_{\mathbf{j=0}}^{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{g^{(j)}(0)}}{\mathbf{j!}} + \frac{\mathbf{g^{(k+1)}(c)}}{\mathbf{(k+1)!}} \\ &= \text{“}\mathbf{T^k_{f,p}(p+h)} + \mathbf{E^k_{f,p}(p+h)}\text{”}, \end{aligned}$$

sendo $c \in (0,1)$.

- $T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})$ é o polinômio de Taylor de ordem k de f em $\mathbf{p}$
- $E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})$ é o resto de Lagrange

17.3.1 Encontrando as derivadas $g^{(j)}(0)$ e o polinômio de Taylor

Usando a Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \\ g'(t) &= \nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_i \\ g''(t) &= \overbrace{(\nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}))'}^{\mathbf{J_{\nabla f}(p+}t\mathbf{h})\cdot \mathbf{h}} \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} (\nabla f_{x_i}(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h})h_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_jh_i \\ g'''(t) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\nabla f_{x_ix_j}(\mathbf{p}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h})h_jh_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f_{x_ix_jx_k}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_kh_jh_i \\ \cdots &\cdots \cdots \\ \cdots &\cdots \cdots \\ g^{(k)}(t) &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} f_{x_{i_1}x_{i_2}..x_{i_k}}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})h_{i_1}h_{i_2}\ldots h_{i_k} \end{aligned}$$

. . . .

Interpretando a forma quadrática $(\mathbf{J}_{\nabla \mathbf{f}}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})\cdot\mathbf{h}\cdot\mathbf{h})$ acima: caso $n=2$:

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{p}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

$$H_f(\star)\mathbf{h} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\star) & f_{x_1x_2}(\star) \\ f_{x_2x_1}(\star) & f_{x_2x_2}(\star) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\star)h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2 \\ f_{x_2x_1}(\star)h_1 + f_{x_2x_2}(\star)h_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H_f}(\star)\mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = \begin{cases} \underbrace{\mathbf{h^tH_f}(\star)\mathbf{h}}_{matrizes} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}_{1\times 2} \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\star)h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2 \\ f_{x_2x_1}(\star)h_1 + f_{x_2x_2}(\star)h_2 \end{bmatrix}_{2\times 1} \\ \qquad ou \\ (f_{x_1x_1}(\star)h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2, f_{x_2x_1}(\star)h_1 + f_{x_2x_2}(\star)h_2)\cdot(h_1,h_2) \end{cases}$$

$$= f_{x_1x_1}(\star)h_1h_1 + f_{x_1x_2}(\star)h_2h_1 + f_{x_2x_1}(\star)h_1h_2 + f_{x_2x_2}(\star)h_2h_2$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f_{x_ix_j}(\star)h_jh_i$$

Definimos a Matriz Hessiana de f em $\mathbf{p}$:

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_1x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\mathbf{p}) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{p}) & f_{x_2x_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_2x_n}(\mathbf{p}) \\ \vdots & & \vdots & \\ \cdots & & f_{x_ix_j}(\mathbf{p}) & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{p}) & f_{x_nx_2}(\mathbf{p}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

(OBS: ela é simétrica se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$). Assim

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\star)h_jh_i = H_f(\star)\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}$$

. . . .

O Polinônio de Taylor de ordem k de f em $\mathbf{p}$ pode ser escrito como:

$$T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!}$$

- $T^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$
  $T^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})$

- $T^2_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}H_f(\mathbf{p})\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$
  $T^2_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \frac{1}{2}H_f(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p})$

- ...

- $T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})$ =polin de grau até k, nas variáveis $h_1, .., h_n$, com coeficientes que dependem das derivadas de f de ordem até k, em $\mathbf{p}$.

O Erro pode ser escrito como:

$$E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h}) = \frac{g^{(k+1)}(\mathrm{c_h})}{(k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} f_{x_{i_1}x_{i_2}..x_{i_{k+1}}}(\mathbf{p}+\mathrm{c_h}\mathbf{h})h_{i_1}h_{i_2}...h_{i_{k+1}} :$$

$$E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_{k+1}=1}^{n} f_{x_{i_1}x_{i_2}..x_{i_{k+1}}}(\mathbf{p}+\mathrm{c_h}(\mathbf{x}-\mathbf{p}))(x_{i_1}-p_{i_1})...(x_{i_{k+1}}-p_{i_{k+1}}) :$$

Esta expressão é o **resto na forma de Lagrange**: é calculado usando as derivadas $(k+1)$-ésimas de f, em um **ponto** c_{h} **(incógnito)** ao longo do segmento entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}+\mathbf{h}$

$$f(\mathbf{x}) = T^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x})$$

Se $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, existe $\delta > 0$ tal que todas as derivadas $(k+1)$-ésimas são limitadas em $\overline{B_\delta(\mathbf{p})}$.

Logo, se $\|\mathbf{h}\| < \delta$

$$|E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})| \leq C\,\|\mathbf{h}\|^{k+1}$$

concluímos

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|\to 0} \frac{E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^k} = 0$$

equivalentemente,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \frac{E^k_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^k} = 0.$$

Este é o análogo do teorema do **resto na forma de Peano**.

17.4 Taylor: alguns casos particulares úteis

Teorema (Caso $k = 1$).
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $f \in \mathcal{C}^2(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) &= f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}\mathbf{h})h_j h_i \\ &= \underbrace{f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{h}}_{T^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p})} + \underbrace{\frac{1}{2}H_f(\mathbf{p}+c_{\mathbf{h}}\mathbf{h})\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}}_{E^1_{f,\mathbf{p}}(\mathbf{p}+\mathbf{h})}, \end{aligned}$$

sendo $c_{\mathbf{h}} \in (0,1)$.

Caso $n = 2$: ponha $\mathbf{p} = (a, b)$, $\mathbf{h} = (r, s)$, $\mathbf{q}_t = \mathbf{p} + t\mathbf{h} = (a + tr, b + ts)$

$$
\begin{aligned}
g(t) &= f(\mathbf{q}_t) \\
g'(t) &= \nabla f(\mathbf{q}_t) \cdot \mathbf{h} = f_x(\mathbf{q}_t)r + f_y(\mathbf{q}_t)s \\
g''(t) &= H_f(\mathbf{q}_t)\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = f_{xx}(\mathbf{q}_t)r^2 + 2f_{xy}(\mathbf{q}_t)rs + f_{yy}(\mathbf{q}_t)s^2 \\
g'''(t) &= \overbrace{(H_f(\mathbf{p} + t\mathbf{h}))'\mathbf{h}}^{\mathbf{J_{H_f}}(\mathbf{p}+t\mathbf{h})\mathbf{h}\cdot\mathbf{h}} \cdot \mathbf{h} = f_{xxx}(\mathbf{q}_t)r^3 + 3f_{xxy}(\mathbf{q}_t)r^2 s + 3f_{xyy}(\mathbf{q}_t)rs^2 + f_{yyy}(\mathbf{q}_t)s^3 \\
\cdots & \cdots \cdots \\
g^{(k)}(t) &= \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(\mathbf{q}_t) r^i s^{k-i}
\end{aligned}
$$

Teorema (Caso $n = 2$).
Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.

$$
\begin{aligned}
f(a + r, b + s) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{\partial^j f}{\partial x^i \partial y^{j-i}}(a, b) r^i s^{j-i} + \\
&\quad + \frac{1}{(k+1)!} \sum_{i=0}^{k+1} \begin{pmatrix} k+1 \\ i \end{pmatrix} \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^i \partial y^{k+1-i}}(a + cr, b + cs) r^i s^{k+1-i},
\end{aligned}
$$

sendo $c \in (0, 1)$ (depende de r, s).

Teorema (Caso $n = 2, k = 1$).
Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^2(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.

$$
\begin{aligned}
f(a + r, b + s) &= f(a, b) + f_x(a, b)r + f_y(a, b)s + \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(a + cr, b + cs)r^2 + f_{xy}(a + cr, b + cs)rs + \frac{1}{2} f_{yy}(a + cr, b + cs)s^2,
\end{aligned}
$$

sendo $c \in (0, 1)$ (depende de r, s).

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^2 + f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-b)^2 \,, \end{aligned}$$

sendo $(\overline{x},\overline{y})$ um ponto no segmento entre (a,b) e (x,y).

Ou ainda,

$$f(x,y) = T^1_{f,(a,b)}(x,y) + E^1_{f,(a,b)}(x,y), \qquad (x,y) \in A,$$

onde

$$T^1_{f,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b),$$

$$E^1_{f,(a,b)}(x,y) = \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^2 + 2f_{xy}(\overline{x},\overline{y})(x-a)(y-b) + f_{yy}(\overline{x},\overline{y})(y-b)^2 \right].$$

Teorema (Caso $n=2, k=2$:). *Se $f \in \mathcal{C}^3(A)$*

$$f(x,y) = T^2_{f,(a,b)}(x,y) + E^2_{f,(a,b)}(x,y), \qquad (x,y) \in A,$$

onde

$$\begin{aligned} T^2_{f,(a,b)}(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^2_{f,(a,b)}(x,y) &= \frac{1}{3!}\big[f_{xxx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^3 + 3f_{yxx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)^2(y-b) + \\ &+ 3f_{yyx}(\overline{x},\overline{y})(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(\overline{x},\overline{y})(y-b)^3 \big]. \end{aligned}$$

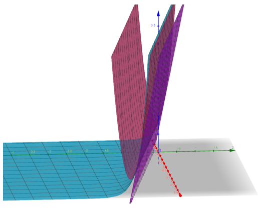
Observação.

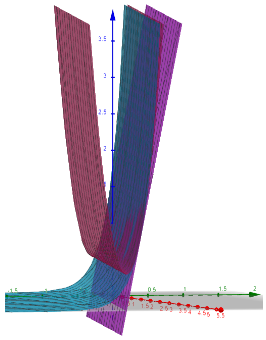
$$f(x,y) \approx T^k_{f,(a,b)}(x,y), \qquad (x,y) \approx (a,b)$$

$$(\text{pois } E^k_{f,(a,b)}(x,y) = o(||(x-a,y-b)||^k), \text{ quando } (x,y) \to (a,b))$$

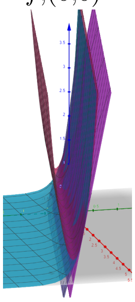
(para $k=1$, compare com diferencial, Slide 8, pag. 7, e plano tangente, Slide 9, pag. 4.)

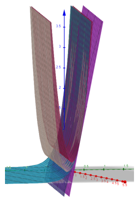
$\mathbf{f(x,y) = e^{x+5y}}$; $\quad \mathbf{T^1_{f,(0,0)} = 1 + 5y + x}$, $\quad \mathbf{T^2_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2}}$,



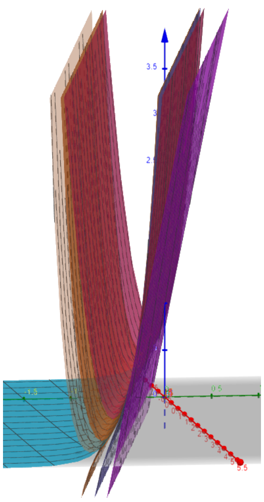


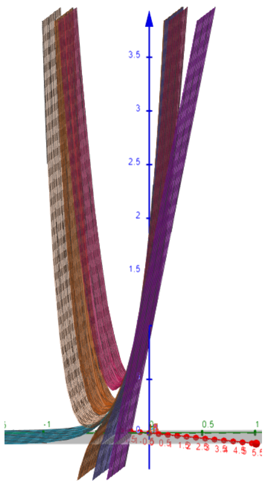
$$T^3_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!},$$
$$T^4_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!} + \frac{(x+5y)^4}{4!} :$$





$$T^5_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!} + \frac{(x+5y)^4}{4!} + \frac{(x+5y)^5}{5!},$$
$$T^6_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2} + \frac{(x+5y)^3}{3!} + \frac{(x+5y)^4}{4!} + \frac{(x+5y)^5}{5!} + \frac{(x+5y)^6}{6!} :$$





18 Máximos e mínimos

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ com $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in D$:

- $\mathbf{p}$ é **ponto de máximo global (absoluto) (PMA) de f** se

$$\forall \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

  - $f(\mathbf{p})$ é o **valor máximo global (absoluto) (VMA) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de máximo local (PML) de f** se

$$\exists\, \delta : \forall \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

  - $f(\mathbf{p})$ é o **valor máximo local (VML) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de mínimo global (absoluto) (pma) de f** se

$$\forall \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

  - $f(\mathbf{p})$ é o **valor mínimo global (absoluto) (vma) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de mínimo local (pml) de f** se

$$\exists\, \delta : \forall \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

  - $f(\mathbf{p})$ é o **valor mínimo local (vml) de f**.

- $\mathbf{p}$ é **ponto de extremo (p.e.) (local ou global) de f** se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de f.

18.1 Máximos e Mínimos interiores (livres)

Seja $\mathbf{p}$ um ponto interior do domínio da função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teorema (Análogo do T. de Fermat).
Seja $\mathbf{p}$ um ponto de extremo.

- Se f é derivável em $\mathbf{p}$ na direção $\widehat{\mathbf{v}}$ **então** $D_{\widehat{\mathbf{v}}}f(\mathbf{p}) = 0$.
- Se f é derivável em $\mathbf{p}$ **então** $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Geometricamente ($n = 2$):
se $\mathbf{p}$ é ponto de extremo de f e $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, então $\nabla F(\mathbf{p}) = (0, 0, 1)$ é normal ao plano tangente ao gráf. de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$, o que implica que o plano tangente ao gráfico de f em $(\mathbf{p}, f(\mathbf{p}))$ é paralelo ao plano xy.

Dizemos que

- $\mathbf{p}$ é **ponto crítico (pc) de f** se vale $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$.

Consequências:

- $\mathbf{p}$ *ponto de extremo* $\Longrightarrow$ $\mathbf{p}$ *é ponto crítico;*
- $\nabla f(p) \neq \mathbf{0} \Longrightarrow$ $\mathbf{p}$ *não é ponto de extremo;*
- $\mathbf{p}$ *ponto crítico* $\not\Rightarrow$ $\mathbf{p}$ *é ponto de extremo.*

Dizemos que

- p é **ponto de sela de f** se for um ponto crítico mas nem máximo nem mínimo:

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \text{ e } \forall\, \delta > 0 : \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ tais que } f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{p}) > f(\mathbf{y})$$

RESUMO: Possíveis pontos de extremo:

- pontos *interiores do domínio* que sejam *críticos*,
- pontos *onde f não é derivável*,
- pontos *na borda do domínio*,
- pontos *onde f não é contínua*.

18.1.1 Critério da derivada segunda

. . . .

Em Cálculo 1 ($n = 1$): se p é um pc tal que $f'(p) = 0$, vale:
- **Se $f''(p)$ é positiva então p é ponto de mínimo local**
- **Se $f''(p)$ é negativa então p é ponto de máximo local**
- **Se f'' é "*indefinida*"(isto é, muda de sinal em torno de p) então p é ponto de inflexão**
- **Se $f''(p)$ é nula então nada podemos dizer**

. . . .

Para $n \geq 2$, consideramos a Matriz Hessiana de f em $\mathbf{p}$:

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_1x_n}(\mathbf{p}) \\ \dots & f_{x_ix_j}(\mathbf{p}) & \dots \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_nx_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

(OBS: ela é simétrica se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$).

Teorema.
Se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$ e $\nabla f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ vale:
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é **definida positiva** então $\mathbf{p}$ é ponto de mínimo local
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é definida negativa então $\mathbf{p}$ é ponto de máximo local
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é *indefinida* então $\mathbf{p}$ é ponto de sela
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é semidefinida então nada podemos dizer

---

Geometricamente: $H_f(\mathbf{p})$ permite saber se, perto de $\mathbf{p}$, o gráfico de f está acima do seu plano tangente em $\mathbf{p}$, abaixo dele, ou o cruza.

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ simétrica a função da forma

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jx_i$$

é chamada **forma quadrática em n variáveis**. Dizemos

- **a matriz A é definida positiva**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **a matriz A é definida negativa**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- **a matriz A é** *indefinida*
  se existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$: $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ e $Q(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} < 0$
- **a matriz A é semidefinida positiva**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0$
- **a matriz A é semidefinida negativa**
  se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0$

Condição necessária e suficiente para a matriz A ser definida:

- $det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, ..n \iff A$ definida positiva.
- $(-1)^k det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, ..n \iff A$ definida negativa.

onde A_k é a matriz $k \times k$ com as primeiras k linhas e k colunas de A.

Condição para $n = 2$: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

- $det(A) = ac - b^2 > 0$ e $a > 0 \iff A$ é **definida positiva**;
- $det(A) = ac - b^2 > 0$ e $a < 0 \iff A$ é definida negativa;
- $det(A) = ac - b^2 < 0 \iff A$ *indefinida*;
- $det(A) = ac - b^2 = 0$ e a ou $c > 0 \iff A$ é semidefinida positiva;
- $det(A) = ac - b^2 = 0$ e a ou $c < 0 \iff A$ é semidefinida negativa;
- $a = b = c = 0 \iff A$ é semidefinida positiva e negativa.

Caso $n = 2$: $\mathbf{p} = (a, b)$

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\mathbf{p}) & f_{xy}(\mathbf{p}) \\ f_{yx}(\mathbf{p}) & f_{yy}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

Teorema. Sejam $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta((a,b)))$ e $\det H_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$.

Se $\nabla f(a,b) = \mathbf{0}$ então vale:

- Se $\det H_f(a,b) > 0$ **e** $f_{xx}(a,b) > 0$ então $\mathbf{p}$ é ponto de mínimo local
- Se $\det H_f(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$ então $\mathbf{p}$ é ponto de máximo local
- Se $\det H_f(a,b) < 0$ então $\mathbf{p}$ é ponto de sela
- Se $\det H_f(a,b) = 0$ então nada podemos dizer

Uma demonstração do Teorema acima pode ser encontrada em: **"O Hessiano em duas e várias variáveis"**, do Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira - IME - USP (veja Teorema 6).

18.2 Máximos e Mínimos Absolutos

Definição

- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **compacto** quando é fechado e limitado.

Teorema (Teorema de Weiestrass em $\mathbb{R}^n$).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto, **então**

existem $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D: \; f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \; \forall \mathbf{x} \in D$.

Consequência: Se f é contínua em um compacto D e ∇f existe nos pontos interiores de D, então os pontos de máximo e mínimo absolutos de f estão entre os pontos críticos e os pontos de máximos e mínimos de f restrita à fronteira de D.
O **maior valor** dentre os valores de f calculada nos p.c. e nos pontos de máximos da fronteira é o **Valor Máximo Absoluto**.
O **menor valor** dentre os valores de f calculada nos p.c. e nos pontos de mínimos da fronteira é o **Valor Mínimo Absoluto**.

19 Método dos Multiplicadores de Lagrange

19.1 Um vínculo

Objetivo: encontrar pontos de extremo de f no conjunto $N = \{\mathbf{x} \in A : \ g(\mathbf{x}) = 0\}$, onde $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

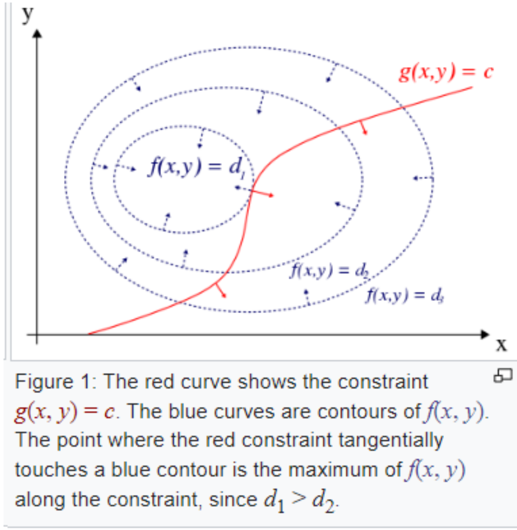


Figura 16: Wikipedia

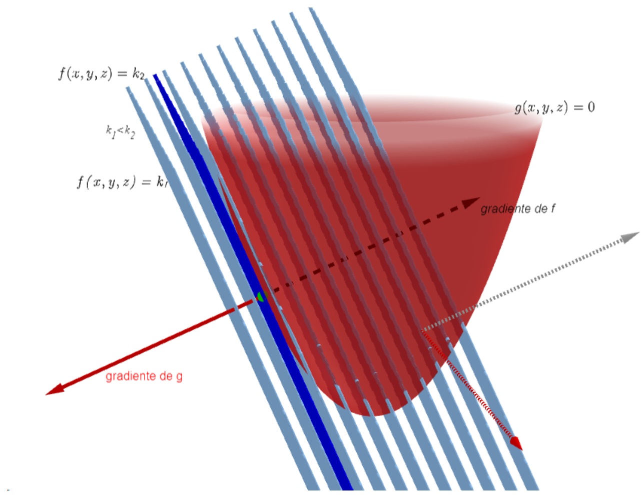


Figura 17: Geogebra

Teorema.
Sejam $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : \ g(\mathbf{x}) = 0\}$.

Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto de extremo de f no conjunto N e $\nabla g(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla g(\mathbf{p})$.

19.2 Dois ou mais vínculos

Objetivo: encontrar pontos de extremo de f em $N = \{\mathbf{x} \in A : \ g_i(\mathbf{x}) = 0 : \ i = 1, .., k\}$, onde $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A), \ i = 1, .., k$, e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

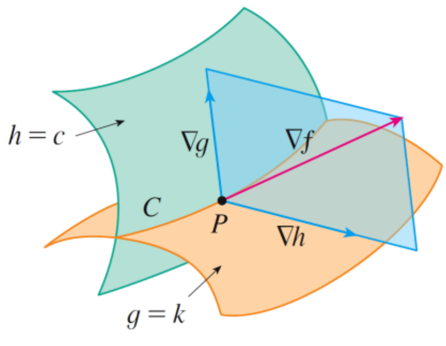


Figura 18: Stewart, Cálculo, vol. 2

Teorema.
Sejam $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : \ g_i(\mathbf{x}) = 0 : \ i = 1, .., k\}$.

Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto extremal de f no conjunto N e os vetores $\nabla g_i(\mathbf{p})$, $i = 1, .., k$ são linearmente independentes, **então**

existem $\lambda_1, .., \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{p})$.

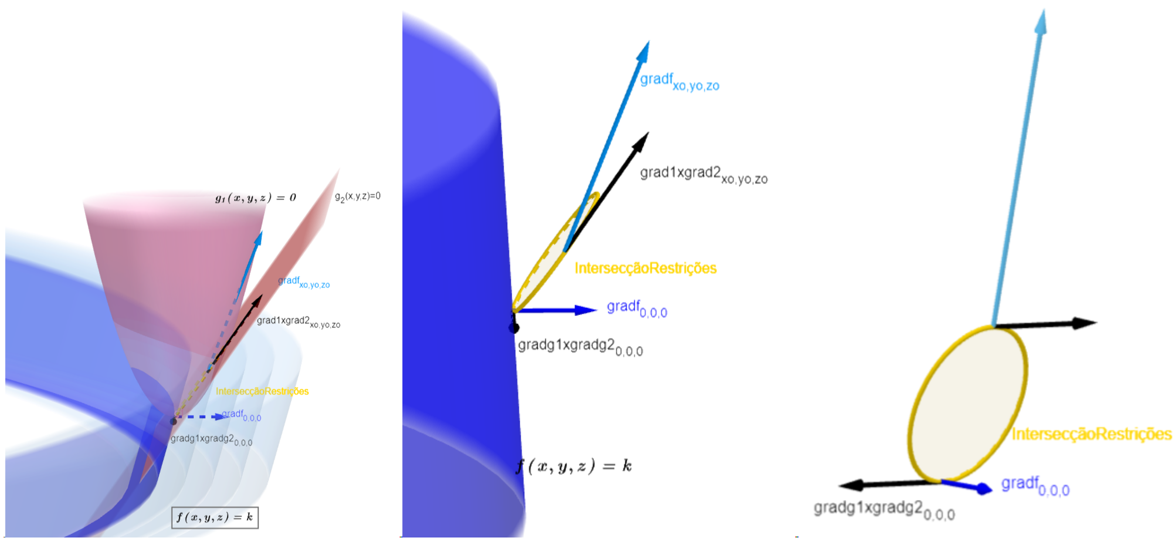


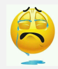
Figura 19: Geogebra: $\nabla f(\mathbf{p}) \perp (\nabla g_1(\mathbf{p}) \wedge \nabla g_2(\mathbf{p}))$

Consequência: Encontrando as soluções $(\mathbf{x}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ do sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

determina-se os candidatos $\mathbf{x}$ a pontos de máximo ou mínimo de f sujeita às condições $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, .., k$.

Se f é contínua e N é compacto, então o **valor máximo absoluto** (resp. valor mínimo absoluto) de f em N é o **maior** (resp. menor) valor dentre os valores $f(\mathbf{x})$.

Se f não é contínua ou N não é compacto, não existe regra geral!! 

20 Exercícios

Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[1]

20.1 Integral Definida

1. Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2} dx \in [a, b]$. Resp.: $a = 1, b = e$

2. Usando interpretação geométrica de integral definida, calcule $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$. Resp.: $\frac{\pi}{4}$

3. Calcule, mas antes verifique se a função é integrável no intervalo:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$. Resp.: $\frac{1}{2} - \ln 2$

[1] Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left|x - x^2\right| dx$. Resp.:

4. Encontre o domínio (considerando integral no sentido próprio) da função h e sua derivada h':

   (a) $h(x) = \displaystyle\int_{2}^{x} \frac{\cos^2(t-1)}{\sqrt{t^2+1}} dt$. Resp.: $D = \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{\cos^2(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$

   (b) $h(x) = \displaystyle\int_{2}^{x} \frac{1}{t} dt$. Resp.: $D = (0, \infty)$, $h'(x) = \frac{1}{x}$

   (c) $h(x) = \displaystyle\int_{1}^{x^2} \frac{1}{t} dt$. Resp.: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h'(x) = \frac{2}{x}$

   (d) $h(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x^2} \frac{1}{t} dt$. Resp.: $D = \emptyset$

5. Expresse a área da região R, limitada pelas curvas dadas, de duas formas: usando integração em x e integração em y. Calcule área usando uma das formas.

   (a) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$, eixo x. Resp.: $\frac{17}{4}$

   (b) $y = x^2$, $y = 16 - x^2$. Resp.: $\frac{128\sqrt{2}}{3}$

   (c) $y = x + 5$, $y = -1$, $y = 2$, $y^2 = x$. Resp.: $\frac{33}{2}$

   subTécnicas de integração

20.1.1 Substituição

Calcule e quando tratar de função determine seu domínio:

6. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\cos(x^2) dx$. (Resp.: $\frac{\sin 1}{2}$) $\qquad$ $\displaystyle\int_{0}^{1} x e^{x^2} dx$. (Resp.: $\frac{e-1}{2}$)

7. Sendo f integrável em $[-a, a]$, calcule $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx$ quando f é par e quando f é ímpar. Resp.: $\begin{cases} 0, & \text{se } f \text{ é ímpar} \\ 2\int_0^a f, & \text{se } f \text{ é par} \end{cases}$

8. Quanto vale $\int_{-2}^{-1} x^4 \sin(x^3)dx - \int_{-2}^{1} x^4 \sin(x^3)dx$? Resp.: 0

9. $\int \frac{3\ln(x)}{x\ln^2(3x)}dx$. Resp.: $\begin{cases} 3\ln(\ln 3x) + 3\frac{\ln 3}{\ln 3x} + c, & x \in (\frac{1}{3}, \infty) \\ 3\ln(-\ln 3x) + 3\frac{\ln 3}{\ln 3x} + c, & x \in (0, \frac{1}{3}) \end{cases}$

20.1.2 Integração por partes

10. $\int_1^4 x\ln(x)dx$. Resp.: $8\ln 4 - \frac{15}{4}$; ($\int x \ln x\, dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c, \quad x > 0$)

11. $\int \arctan(x)dx$. Resp.: $x\arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

20.1.3 Integrais trigonométricas

12. $\int \cos^2(x)dx$. Resp.: $\frac{\sin(2x)+2x}{4} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

13. $\int \sin^2(x)\cos^{3}(x)dx$. Resp.: $\frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5} + c, \quad x \in \mathbb{R}$

14. $\int \tan^{3}(x)\sec^{4}(x)dx$. Resp.: $\begin{cases} \frac{\tan^6(x)}{6} + \frac{\tan^4(x)}{4} + c, & x \in I \quad {\scriptstyle I \text{ intervalo}} \\ \frac{\sec^6(x)}{6} - \frac{\sec^4(x)}{4} + c, & x \in I \quad {\scriptstyle I \subset \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}} \end{cases}$

20.2 Substituição trigonométrica/hiperbólica

15. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. Resp.: $\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + c, \quad x \in [-1, 1]$

16. $\int \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$. Resp.: $\ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) + c, \quad x \in \mathbb{R}$

20.2.1 Frações Parciais

17. $\displaystyle\int \frac{2x^2-5x-3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$. Resp.: $2\ln|x+1| - 5\arctan(x) + c$

18. $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4-x^2}\,dx$. Resp.: $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + c$

19. $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. Resp.: $\ln|x| + \frac{1}{x^2+1} + c$

20. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$. Resp.: $\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + c$

20.3 Integrais Impróprias

21. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ $(a>0)$. Resp.: ver Slide 3

22. $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx$ $(a>0)$. Resp.: ver Slide 3 *(fazer em casa!)*

23. $\displaystyle\int_a^\infty e^{kx}\,dx$ $(a\in\mathbb{R})$. Resp.: ver Slide 3

24. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$. Resp.: ver Slide 3

25. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$. Resp.: divergente

26. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Resp.: convergente

27. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$. Resp.: divergente

28. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin^3(x)\,dx$. Resp.: convergente

29. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Resp.: convergente

30. $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$. Resp.: divergente

31. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$. Resp.: convergente

20.4 Aplicações de integral de Riemann

32. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo x da região sob a curva $y=\sqrt{x}$ para $x=0$ até $x=1$. Resp.: $\frac{\pi}{2}$

33. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y=2x^2-x^3$, $y=0$. Resp.: $\frac{16\pi}{5}$

34. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação ao redor do eixo y da região limitada por $y=x^3$, $y=8$ e $x=0$. Resp.: $\frac{96\pi}{5}$

35. Considere a região R limitada por $y=x$ e $y=x^2$. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação de R
    (a) ao redor do eixo x; (Resp.: $\frac{2\pi}{15}$)
    (b) ao redor da reta $y=2$. (Resp.: $\frac{8\pi}{15}$)

36. Considere S a superfície obtida pela rotação da curva $y=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$, em torno do eixo-x (conhecida como trombeta de Gabriel) e B o sólido obtido pela rotação da região $R=\{(x,y): 0\leq y\leq \frac{1}{x}, x\geq 1\}$ em torno do eixo-x. Determine a área de superfície de S e o volume do sólido B.
    Resp.: $A_S=\infty$ e $V(S)<\infty$

20.5 $\mathbb{R}^n$: topologia

37. Determine o conjunto dos pontos interiores, exteriores, fronteiras e de acumulação dos conjuntos:
    (a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$

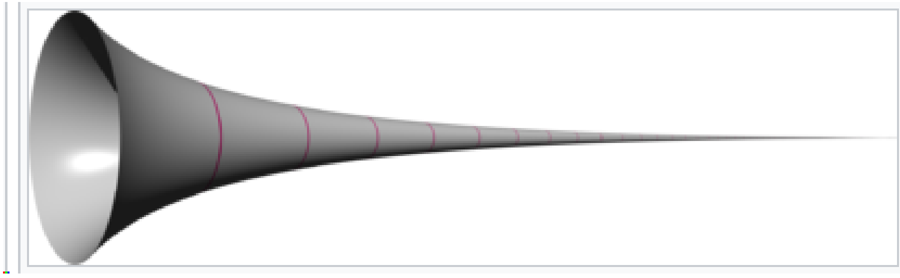


Figura 20: Wikipedia: Trombeta de Gabriel (Gabriel's horn) (leia sobre o "paradóxo do pintor")

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$

38. Determine se os conjuntos abaixo são abertos, fechados, limitados:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ Resp.: aberto, não fechado, não limitado

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ Resp.: não aberto, fechado, limitado

(c) $A = B_\delta(p)$, $A = \overline{B_\delta(p)}$, $A = S_\delta(p)$ (bolas aberta e fechada, esfera) Resp.: aberto/não fechado, não aberto/fechado, não aberto/fechado; todos limitados

(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x > 0\}$ Resp.: não aberto, não fechado, não limitado

(e) $A = \mathbb{R}^n$ Resp.: aberto, fechado, não limitado

(f) $A = \emptyset$ Resp.: aberto, fechado, limitado

20.6 Funções a valores vetoriais - Curvas

39. Determine o domínio de

(a) $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$. Resp.: $D = \mathbb{R}$

(b) $\mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$. Resp.: $D = \mathbb{R}$

(c) $\mathbf{h}(t) = \left(\frac{1}{t}, t^2, \sin(t)\right)$. Resp.: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

40. $\lim_{t \to 2}(t, t^2)$. Resp.: $(2, 4)$

41. $\lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{t}, t^2, \sin(t)\right)$. Resp.: não existe

42. Se $\mathbf{f}(t) = (t, t^2)$, $\mathbf{g}(t) = (t, t^2, 1)$ e $\mathbf{h}(t) = (\cos t^2, e^{t^2})$, $(t \in \mathbb{R})$, então $\mathbf{f}' =?$ e $\mathbf{g}' =?$. Resp.: $\mathbf{f}'(t) = (1, 2t)$, $\mathbf{g}'(t) = (1, 2t, 0)$ e $\mathbf{h}'(t) = (-2t \sin t, 2te^{t^2})$

43. Encontrar a equação vetorial ou paramétrica de uma curva cujo traço coincide com: (GraphSketch.com - GeoGebra 2D)

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(a.1) uma volta no sentido anti-horário Resp.: $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

(a.2) duas voltas no sentido horário Resp.: $\gamma(t) = (2\sin t, 2\cos t)$, $t \in [0, 4\pi]$ OU $\gamma(t) = (2\cos t, -2\sin t)$, $t \in [-4\pi, 0]$

(b) $x^3 = y^2$ Resp.: $\gamma(t) = (t^{2/3}, t)$, $t \in \mathbb{R}$

(c) segmento de reta de $(2, 5)$ a $(1, 0)$: *tarefa!* Resp.: $\gamma(t) = (-t, -5t - 5)$, $t \in [-2, -1]$

44. Considere a curva $\gamma : [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^\alpha, \cos(\pi t))$, onde $\alpha \in [0, 2]$ é um parâmetro.

   (a) estudar o traço de γ Geogebra

   (b) Para quais valores de α a curva é regular? Para quais valores de α a curva é simples? Resp.: γ é regular e simples para $\alpha \in (0, 2]$

   (c) Escolha um α entre os determinados no ponto (b) e determine a reta tangente ao traço da curva num ponto da forma $P = (x_0, -1)$; em seguida calcule γ'' para o mesmo ponto e represente tudo num desenho. Destaque uma propriedade que os vetores γ' e γ'' satisfazem. *tarefa!*
   Resp.: Por exemplo, para $\alpha = 1$: $x_0 = t_0$ e $\cos(\pi t_0) = -1$ para $t_0 = 1$, assim uma equação da reta tangente pedida é: $r(t) = \gamma(1) + t\gamma'(1) = (1, -1) + t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$; $\gamma''(1) = (0, \pi^2)$ e $\gamma'(1) \perp \gamma''(1)$

Você pode visualizar outros exemplos de funções a valores vetoriais e curvas em: Geogebra 1 - Prof. Massa ou Geogebra 2 - Prof. Massa.

20.7 Funções de várias variáveis

45. Encontre e esboce o domínio da função f dada por[2]:(GeoGebra 2D)

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ Resp.: $D = \mathbb{R}^2$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ Resp.: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ (interior do círculo)

   (c) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ Resp.: $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (interior do cilindro)

46. Esboce o gráfico da função f dada por[1] (determine antes de tudo o domínio): (GeoGebra 3D)

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ Resp.: parabolóide circular

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ Resp.: cone

   (c) $f(x, y) = y^2 - x^2$ Resp.: sela

   (d) $f(x, y) = |x|$

   (e) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ Resp.: semi-esfera (ver aqui)

[2] os desenhos foram feitos em sala de aula

47. Esboce conjuntos de nível da função f dada por[1] (determine antes de tudo o domínio):

(a) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ Resp.: $k = 0$: ponto (0,0), $k > 0 : 4x^2 + 9y^2 = k$ elipses

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ Resp.: $k > 0 : x^2 + y^2 = 1/k$ circunferências

(c) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ Resp.: $k > 1 : x^2 + y^2 = 1/\ln k$ circunferências

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ *tarefa!* Resp.: $k = 0 : |x| = |y|$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : y^2 - x^2 = k^2$ hipérboles que interceptam eixo-x

(e) $f(x,y) = |x|$ Resp.: $k = 0$: eixo-y, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| = k$ duas retas verticais

(f) $f(x,y) = y^2 - x^2$ Resp.: $k = 0 : |x| = |y|$, $k > 0 : y^2 - x^2 = k$ hipérboles que interceptam eixo-y, $k < 0 : y^2 - x^2 = k$ hipérboles que interceptam eixo-x

(g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ Resp.: $k = 0$: eixo-z, $k > 0 : x^2 + y^2 = k$ cilindros

(h) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ Resp.: $0 \leq k < 2 : x^2 + y^2 = 4 - k^2$ circunferências, $k = 2$: ponto (0,0), (ver aqui)

Você pode visualizar outros exemplos de funções de várias variáveis e ver como gerar várias curvas e superfícies de nível, respectivamente em, Funções-Prof.Massa, Curva-Prof.Massa, Superfície-Prof.Massa,

20.8 Limites e continuidade

48. Verifique, usando a definição, que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$.

Resp.: basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Calcule ou determine que o limite não existe:

49. $\lim_{(x,y)\to(0,1)} (2x^2 + 5y)$. Resp.: 5

50. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$. Resp.: 0

Atenção: Não aplicaremos "Regra de L'Hôpital" para funções de várias variáveis: uma regra foi recentemente provada e cobre vários casos de indeterminação do tipo 0/0. Apesar de não ser tão complicada, também não é tão "simples" como aquela para o caso de funções de uma variável: deve-se tomar bastante **cuidado para ter todas as hipóteses satisfeitas** para então poder usar o resultado. A regra está provada no artigo de Gary R. Lawlor (2020): L'Hôpital's Rule for Multivariable Functions, The American Mathematical Monthly, 172:8, 717-725.

---

51. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}$. Resp.: 1

52. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \cos(xy-2)$. Resp.: 1

53. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y \sin\left(\dfrac{1}{y}\right)$. Resp.: 0

54. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$. Resp.: 0

55. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Resp.: 0

56. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$. Resp.: não existe

57. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Resp.: não existe

58. $\lim\limits_{||(x,y,z)||\to\infty} (x^2+y^2)$ Resp.: não existe

    Tarefa: Troque a função f em Geogebra 3D Classic para visualizar: o gráfico da função f envolvida no limite dos exercícios 51 a 57, alguns caminhos e a imagem desses caminhos por f. Faça um análogo do exercício 58 para função de duas variáveis: $\lim\limits_{||(x,y)||\to\infty} x^2$ (neste caso também é possível visualizar no Geogebra).

59. Determine se a função f é contínua no ponto $\mathbf{p}$ dado:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad \mathbf{p} = (0,0)$

Resp.: f não é contínua em $\mathbf{p}$; f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad \mathbf{p} = (0,0)$

Resp.: f é contínua em $\mathbf{p}$; f é contínua em $\mathbb{R}^2$

20.9 Derivadas parciais

60. Encontre as derivadas parciais e seus domínios:

(a) $f(x,y) = x^2 + \cos(x^5y^3)$

Resp.: $f_x(x,y) = 2x - 5x^4y^3\sin(x^5y^3)$; $f_y(x,y) = 3x^5y^2\sin(x^5y^3)$; $D_{f_x} = D_{f_y} = \mathbb{R}^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{xy}\,\sin(xy)$

Resp.: $f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin(xy)}{2\sqrt{xy}} + y\sqrt{xy}\cos(xy), & xy > 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$; $f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin(xy)}{2\sqrt{xy}} + x\sqrt{xy}\cos(xy), & xy > 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$;

$D_{f_x} = D_{f_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

61. Encontre as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x,y) = x^3y + e^{y^2}$.

Resp.: $f_{xx}(x,y) = 6xy$, $f_{xy}(x,y) = 3x^2$, $f_{yy}(x,y) = 4y^2e^{y^2}$, $f_{yx}(x,y) = 3x^2$

62. Discutir sobre a continuidade de f em $(0,0)$ e se as derivadas parciais de f existem em $(0,0)$.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (Ex. 59-(b))

Resp.: f é contínua em $(0,0)$ e $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Resp.: $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$ e f não é contínua em $(0,0)$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (Ex. 59-(a)) *tarefa!!!*

Resp.: f não é contínua em $(0,0)$ e $\nexists f_y(0,0)$ e $f_x(0,0) = 0$.

20.10 Diferenciabilidade

63. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-y^2}, & |x| \neq |y| \\ 0, & |x| = |y| \end{cases}$ $\mathbf{p} = (1,1)$.

Resp.: f não é diferenciável em $\mathbf{p}$ (f não é contínua em $\mathbf{p}$ ou $\nexists f_x(\mathbf{p})$)

64. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\mathbf{p} = (0,0)$

Resp.: f é diferenciável em $\mathbf{p}$: $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E_{(0,0)}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

65. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\mathbf{p} = (0,0)$.

Resp.: f não é diferenciável em $\mathbf{p}$, é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}\}$

66. $f(x,y) = 3x - xy^2$ Resp.: f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$

67. Considere $f(x,y) = \sqrt{x+2y}$.

(a) encontre a diferencial de f em $\mathbf{p} = (a,b)$: $df_{\mathbf{p}}(h,k)$

Resp.: $df_{\mathbf{p}}(h,k) = \frac{h}{2\sqrt{a+2b}} + \frac{k}{\sqrt{a+2b}}$ para $\mathbf{p} \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y > 0\}$

(b) use a diferencial de f para encontrar um valor aproximado para $\sqrt{4.02}$

Resp.: Como f é diferenciável em D, use por exemplo, $p = (4,0) \in D$, $(h,k) = (0, 0.01)$ (ou $(h,k) = (0.02, 0)$) e o fato de $f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + df_p(h,k)$: $\sqrt{4.02} \approx 2.005$

20.11 Derivada direcional

68. Considere $f(x,y) = 3xy - 2e^{xy}$. Qual a derivada direcional de f no ponto $(1,0)$ na direção $\overrightarrow{v} = (-1,3)$?
Resp.: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}/||\overrightarrow{v}||$ e $D_{\overrightarrow{u}}f(1,0) = 3/\sqrt{10}$

69. A temperatura nos pontos de uma placa retangular no plano xy (medida em metros) é dada por $T(x,y) = x^2 - 2xy$ (^oC).

   (a) Encontre a taxa de variação da temperatura no ponto $(1,2)$ na direção e sentido do vetor $\overrightarrow{v} = (1,1)$. E se $\overrightarrow{v}_1 = (0,1)$?
   Resp.: a partir do ponto $(1,2)$: na direção e sentido de $\overrightarrow{v}$, a temperatura decresce a uma taxa de $2\sqrt{2}\ ^oC/m$; na direção e sentido de $\overrightarrow{v}_1$, a temperatura decresce a uma taxa de $2\ ^oC/m$;

   (b) Encontre a direção, sentido e valor de maior taxa de variação em $(1,2)$.
   Resp.: a partir do ponto $(1,2)$, a temperatura cresce mais rapidamente na direção e sentido de $\nabla T(1,2) = (-2,-2)$ e o valor máximo da taxa de variação é $\sqrt{8}\,^oC/m$. Observe que a taxa de variação é mínima na direção e sentido oposto de $\nabla T(1,2)$, ou seja, a mesma do vetor $\overrightarrow{v} = (1,1)$, e o valor mínimo da taxa de variação é $-2\sqrt{2}\,^oC/m$.

20.12 Plano tangente

70. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, gráfico - plano

   (a) gráfico de f possui plano tangente em $P = (0,0,f(0,0))$?

   (b) gráfico de f possui plano tangente em $P = (2,0,f(2,0))$? *Tarefa!*

Resp.: (a) $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$; o plano $z = \pi(x,y) = 0$ existe, mas não é o plano tangente tangente ao gráfico de f no ponto em P: $(graf(f) \cap (y = x))$ é a curva $\gamma(t) = (t,t,\frac{1}{2})$ cuja reta tangente tem equações paramétricas $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \frac{t}{2} \end{cases}$ a qual não está contida no plano $z = 0$. f não é diferenciável em $(0,0)$!! (veja o que ocorre com a função do Trabalho 6)
(b) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e o plano tangente é $z = \pi(x,y) = \frac{1}{2}y$

20.13 Regra da Cadeia

71. $f(x,y,z) = x^2y^3z^4$ é diferenciável? $f'(x,y,z) =?$
Resp.: $f'(x,y,z) = (2xy^3z^4, 3x^2y^2z^4, 4x^2y^3z^3)$

72. $f(x,y) = (x^2, y^3, xy)$ é diferenciável? $f'(x,y) =?$
Resp.: $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 3y^2 \\ y & x \end{pmatrix}$

73. Seja $F = f(x,y)$, onde $x = t^3$, $y = e^{2t}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada. Calcule $F' = \dfrac{dF}{dt}$. *Tarefa!*
Resp.: $F'(t) = 3t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(t^3, e^{2t}) + 2e^{2t} \frac{\partial f}{\partial y}(t^3, e^{2t})$

74. Seja $F(u,v) = f(ue^{2uv}, 2v - u)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada. Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial u}$. *Tarefa!*
Resp.: $\dfrac{\partial F}{\partial u} = e^{2uv}(1 + 2uv)\frac{\partial f}{\partial x}(ue^{2uv}, 2v - u) - \frac{\partial f}{\partial y}(ue^{2uv}, 2v - u)$

75. Seja $F(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável dada. Verifique que

$$f_y(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) + \sin\theta \frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$

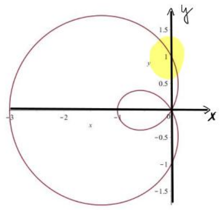
Resp.: Calcule F':
$(F_r\ F_\theta) = (F'(r,\theta))_{1\times 2} = (f'(r\cos\theta, r\sin\theta))_{1\times 2} \cdot \left(\frac{\partial(r\cos\theta, r\sin\theta)}{\partial(r,\theta)}\right)_{2\times 2} = (f_x\ f_y) \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

20.14 Derivação implícita

76. Determine se a equação

$$(x^2 + y^2 + 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

define implicitamente y como uma função diferenciável de x em torno do ponto $(0,1)$. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $x = 0$.
Resp.: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2(x^2+y^2+2x)(2x+2)}{4y(x^2+y^2+2x) - 2y}$, $\frac{dy}{dx}(0) = -2$ (na vizinhança de $(0,1)$, quando $x = 0$, $y = 1$)



77. Determine algum ponto (a,b,c) em torno do qual a equação $y^3 + 2xyz^5 + x^2 + z = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $z = g(x,y)$ (respectivamente, $x = f(y,z)$). Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (respectivamente, $\frac{\partial x}{\partial y}$) em função de x, y e z e calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ no ponto (a,b) (respectivamente, no ponto (b,c)). *Tarefa!*

Resp.: Por exemplo: $f(1,0,3) = 0,\ f_z(1,0,3) \neq 0$ e $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xyz^5+2x}{10xyz^4+1},\ \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = 2$;
$f(2,0,0) = 0,\ f_x(2,0,0) \neq 0$ e $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{3y^2+2xz^5}{2xyz^5+2x},\ \frac{\partial x}{\partial y}(2,0) = 0$

20.15 Polinômio de Taylor

78. Seja $f(x,y) = e^{x+5y}$.

(a) Encontre $T^1_{f,(0,0)}$ e $T^2_{f,(0,0)}$

(b) Verifique que

$$|e^{x+5y} - T^1_{f,(0,0)}(x,y)| < \frac{3}{2}(x+5y)^2 \text{ em } R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+5y < 1\}.$$

(c) Estime o erro cometido na aproximação $e^{x+5y} \cong T^1_{f,(0,0)}(x,y)$ quando $x = 0,001$ e $y = 0,001$.

(d) É verdade que *Tarefa!*

$$|e^{x+5y} - T^2_{f,(0,0)}(x,y)| < \frac{1}{2}|x+5y|^3, \quad \forall (x,y); x+5y < 1?$$

(e) Estime o erro cometido na aproximação $e^{x+5y} \cong T^2_{f,(0,0)}(x,y)$ quando $x = 0,01$ e $y = 0,01$. *Tarefa!*

Resp.: (a) $T^1_{f,(0,0)} = 1 + 5y + x$, $T^2_{f,(0,0)} = 1 + x + 5y + \frac{(x+5y)^2}{2}$; (c) $< 10^{-4}$; (e) $< 10^{-6}$

(Veja: Polinômios de Taylor de e^{x+5y} em $(0,0)$ e de $\sqrt{xy}$ em $(1,1)$)

20.16 Máximos e mínimos

Encontre os pontos de máximos/mínimos locais/absolutos (caso existam) de f.

79. $f(x, y) = x^2 + y^2$

    Resp.: $(0, 0)$ é pma, não possui PML nem PMA em $\mathbb{R}^2$

80. $f(x, y) = y^2 - x^2$

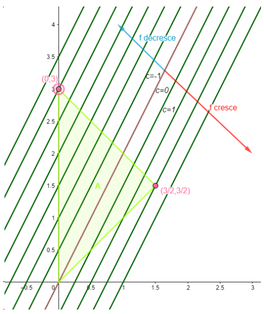
    Resp.: $(0, 0)$ é p. sela, não possui PML/PMA nem pml/pma em $\mathbb{R}^2$

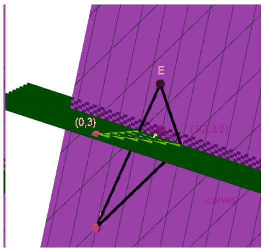
81. $f(x, y) = 2x - y$ em $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3, y \geq x\}$

    (a) use curvas de nível

    (b) justifique analiticamente

    Resp.: PMA=$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$; VMA=$\frac{3}{2}$; pma=$(0, 3)$; vma=$-3$



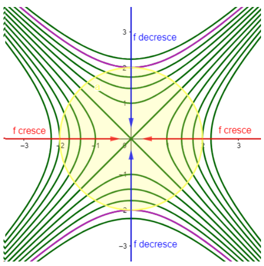


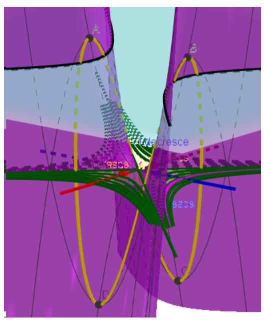
82. $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

    Resp.: $(-1, 1), (1, -1)$ p. sela; $(1, 1)$ pml; $(-1, -1)$ PML, f não possui máximo/mínimo absolutos em $\mathbb{R}^2$

83. $f(x, y) = y^2 - x^2$ em $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ geogebra

    Resp.: $(0, 0)$ p. sela; $(2, 0), (-2, 0)$ pma; vma=4; $(0, 2), (0, -2)$ PMA; VMA=4





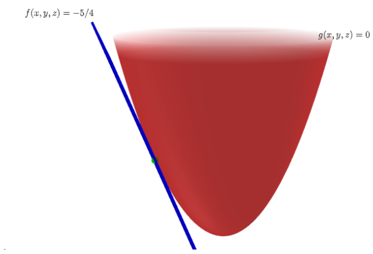
20.17 Multiplicadores de Lagrange

84. Rever o exercício 83 usando Lagrange.

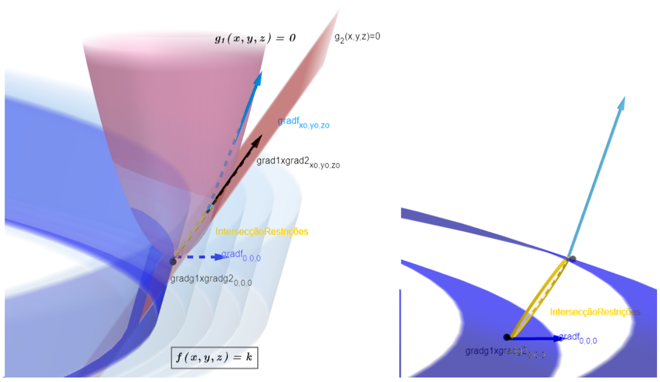
85. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$.
Resp.: $(2, 4)$ é o ponto da parábola mais próximo de $(14, 1)$.

86. $f(x, y) = y + x^3$ sujeita à condição $g(x, y) = y - x^3 = 0$.
Resp.: $(0, 0)$ é solução do sistema do Método de Lagrange, porém não é nem de mínimo nem de máximo: f não possui extremos restrita a tal condição

87. $f(x, y, z) = z+2x-y$ sujeita à condição $g(x, y, z) = (x-2)^2+(y-4)^2-z = 0$ geogebra
Resp.: $(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{4})$ é solução do sistema do Método de Lagrange, $f(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{4}) = -\frac{5}{4}$ é o vm de f restrita à condição dada.



88. $f(x, y, z) = z^2 + x + y$ sujeita às condições $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ e $g_2(x, y, z) = x + y - z = 0$ geogebra
Resp.: $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 2)$ são soluções do sistema do Método de Lagrange, $f(0, 0, 0) = 0$ é o vm e $f(1, 1, 2) = 6$ é o VM de f restrita às condições dadas.



Ver os seguintes exemplos no Wikipedia: *Tarefa!*

89. $f(x, y) = x + y$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$

90. $f(x, y) = (x + y)^2$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$

91. $f(x, y) = xy^2$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 3$

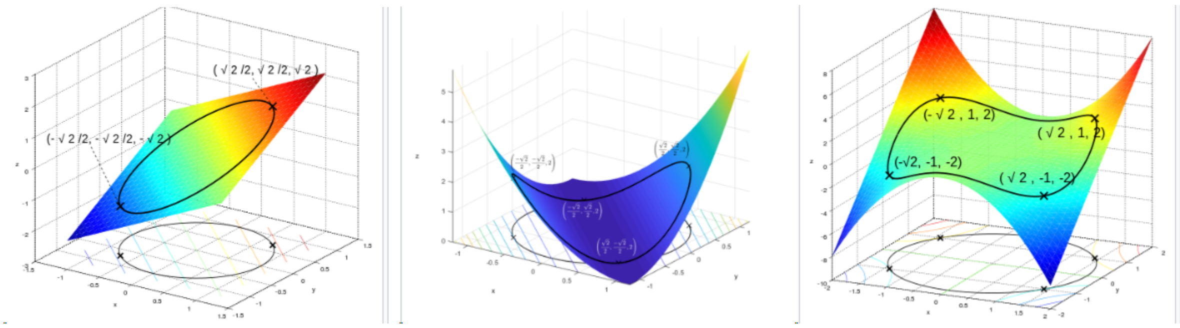


Figura 21: A curva desenhada no gráfico é a imagem da condição dada. Os pontos destacados $(a, b, f(a, b))$, são aqueles onde f possui extremo em (a, b)

20.18 Revisão

Atenção: teoria que não aparece nos exercícios abaixo é tão importante quanto as que aparecem!

92. Considere $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - y}}$.

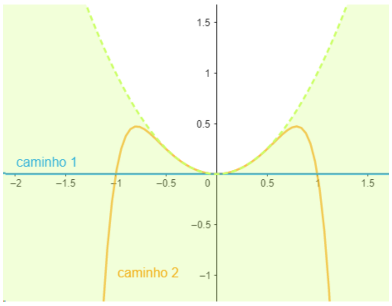
(a) encontre e esboce o domínio de f

(b) f é contínua?

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} f(x,y) = ?$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Resp.: (a) $D = \{(x,y) : y < x^2\}$; (b) f é contínua em D; (c) $+\infty$, (d) não existe: considere por exemplo os caminhos: $\gamma_1 : x = 0$, e $\gamma_2 : y = x^2 - x^8$ (note $x^2 - x^8 - y = (x^2 - y) - x^8 < x^2 - y$ sempre que $x \neq 0$ e $x = 0$ em γ_2 implica $y = 0$, portanto $\gamma_2 \subseteq D \cup \{(0,0)\}$)



93. Determine D_f, as derivadas parciais de primeira ordem e seus domínios e se f é diferenciável em D_f.

(a) $f(x,y,z) = x^2 + \cos(xy) - z$

(b) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^4+y^2}}$

Resp.:

(a) $D_f = D_{f_x} = D_{f_y} = D_{f_z} = \mathbb{R}^3$, $f_x(x,y,z) = 2x + y\sin(xy)$, $f_y(x,y,z) = x\sin(xy)$, $f_z(x,y,z) = -1$, f é diferenciável em D_f.

(b) $D_f = \mathbb{R}^2$; $f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 e^{\sqrt{x^4+y^2}}}{\sqrt{x^4+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $D_{f_x} = \mathbb{R}^2$;

$f_y(x,y) = \dfrac{y e^{\sqrt{x^4+y^2}}}{\sqrt{x^4+y^2}}$, $D_{f_y} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

94. Faça esboço de conjuntos de nível de:

(a) $f(x,y) = y - \sqrt{1-x^2}$

(b) $f(x,y,z) = z - \dfrac{1}{x}$

Resp.: (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ (b) $D_f = \mathbb{R}^3 -$ plano yz

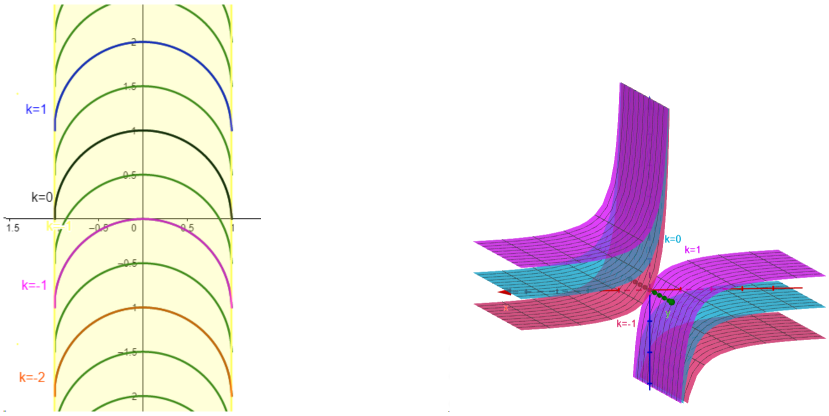


Figura 22: (a) semi-circunferências (geogebra)

95. Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Se $F(u,v) = f(x,y)$ onde $x = 2uv^2$ e $y = u^3 + v$, expresse F_{uv} em função das derivadas parciais de f.

Resp.: $F_{uv}(u,v) = 4vf_x(2uv^2, u^3+v) + 8uv^3 f_{xx}(2uv^2, u^3+v) + [2v^2 + 12u^3v]f_{xy}(2uv^2, u^3+v) + 3u^2 f_{yy}(2uv^2, u^3+v)$

96. Determine a equação de uma reta que seja tangente à curva $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

Resp.: $2x + y = 3$ ou $2x + y = -3$

97. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que $f(x,y) = (\cos(x), xy^2, e^{y^2-1})$, encontre f'.

Resp.: $f'(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin(x) & 0 \\ y^2 & 2xy \\ 0 & 2ye^{y^2-1} \end{bmatrix}$

98. Considere $f(x,y) = x^2y^2 - c(x^2 - y)$. Para quais valores de c a equação $f(x,y) = 0$ define x como função de y em torno de $(0,0)$? e y como função de x? Encontre, quando for o caso, $\frac{dx}{dy}$ e $\frac{dy}{dx}$. (geogebra)

Resp.: pelo teorema da função implícita, para todo $c \neq 0$ podemos concluir que y é função de x numa vizinhança de $(0,0)$: $y = g_c(x)$, $x \in I \ni 0$; e $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 - 2xc}{2x^2y + c}$

(Observação: podemos concluir que existem caminhos $\gamma_c : y = g_c(x)$ que passam por $(0,0)$ tais que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \gamma_c}} \dfrac{x^2y^2}{x^2 - y} = c$ para diferentes valores de c (geogebra))

99. Sejam $f(x,y) = y^2 - x$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (geogebra).

(a) Determine se f admite extremos locais/absolutos em $\mathbb{R}^2$

(b) Determine os extremos absolutos de f em D, analisando os 3 métodos:

i. use curvas de nível

ii. encontre os pc e encontre os extremos na fronteira restringindo a função à fronteira de D

iii. encontre os pc e encontre os extremos na fronteira usando o método de Lagrange

Resp.: (a) Não possui extremos locais/absolutos em $\mathbb{R}^2$.

(b) em D: $J = (1,0)$ é pm, -1 é o vm; $L = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $M = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ são PM, $\frac{5}{4}$ é o VM.

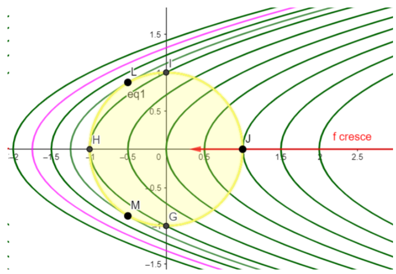


Figura 23: (geogebra)

100. Fazer os exercícios que foram deixados como tarefa: 43c, 47d, 62c, 70, 73, 74, 77, 78d-78e, 89, 90, 91.

Fim do curso! *Bons estudos!*

Boas Férias!

21 Apêndice: Funções hiperbólicas

Definição:

$$\mathbf{Sh}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}} - \mathbf{e}^{-\mathbf{x}}}{\mathbf{2}}, \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{Sh}} = \mathbb{R}, \qquad \mathbf{Im}_{\mathbf{Sh}} = \mathbb{R}$$

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}} + \mathbf{e}^{-\mathbf{x}}}{\mathbf{2}}, \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{Ch}} = \mathbb{R}, \qquad \mathbf{Im}_{\mathbf{Ch}} = [\mathbf{1}, \infty)$$

$$\mathbf{Th}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{Sh}(\mathbf{x})}{\mathbf{Ch}(\mathbf{x})}, \qquad \mathbf{D}_{\mathbf{Th}} = \mathbb{R}, \qquad \mathbf{Im}_{\mathbf{Th}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

Relações:

$$\mathbf{Ch}^2(\mathbf{x}) - \mathbf{Sh}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{1},$$

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{2x}) = \mathbf{Ch}^2(\mathbf{x}) + \mathbf{Sh}^2(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{Sh}(\mathbf{2x}) = \mathbf{2Sh}(\mathbf{x})\mathbf{Ch}(\mathbf{x})$$

$$(\mathbf{Sh})'(\mathbf{x}) = \mathbf{Ch}(\mathbf{x}) \qquad \text{em } \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{Ch})'(\mathbf{x}) = \mathbf{Sh}(\mathbf{x}) \qquad \text{em } \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{Th})'(\mathbf{x}) = \mathbf{Sch}^2(\mathbf{x}) \qquad \text{em } \mathbb{R}$$

Inversas:

$$SettSh = Sh^{-1}$$

$$SettCh = (Ch^*)^{-1} \qquad \text{onde } Ch^* : [0, \infty) \to [1, \infty) : x \mapsto Ch(x)$$

$$SettTh = (Th^*)^{-1} \qquad \text{onde } Th^* : \mathbb{R} \to (-1, 1) : x \mapsto Th(x)$$

Fórmula explícita para as inversas:

$$SettSh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$SettCh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \in [1, \infty)$$

$$SettTh(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right), \qquad x \in (-1, 1)$$

$$SettCoTh(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{x - 1} \right), \qquad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Derivadas das inversas:

$$(SettSh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \qquad \text{em } \mathbb{R}$$

$$(SettCh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \text{em } (1, \infty)$$

$$(SettTh)'(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \qquad \text{em } (-1, 1)$$

$$(SettCoTh)'(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \qquad \text{em } (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

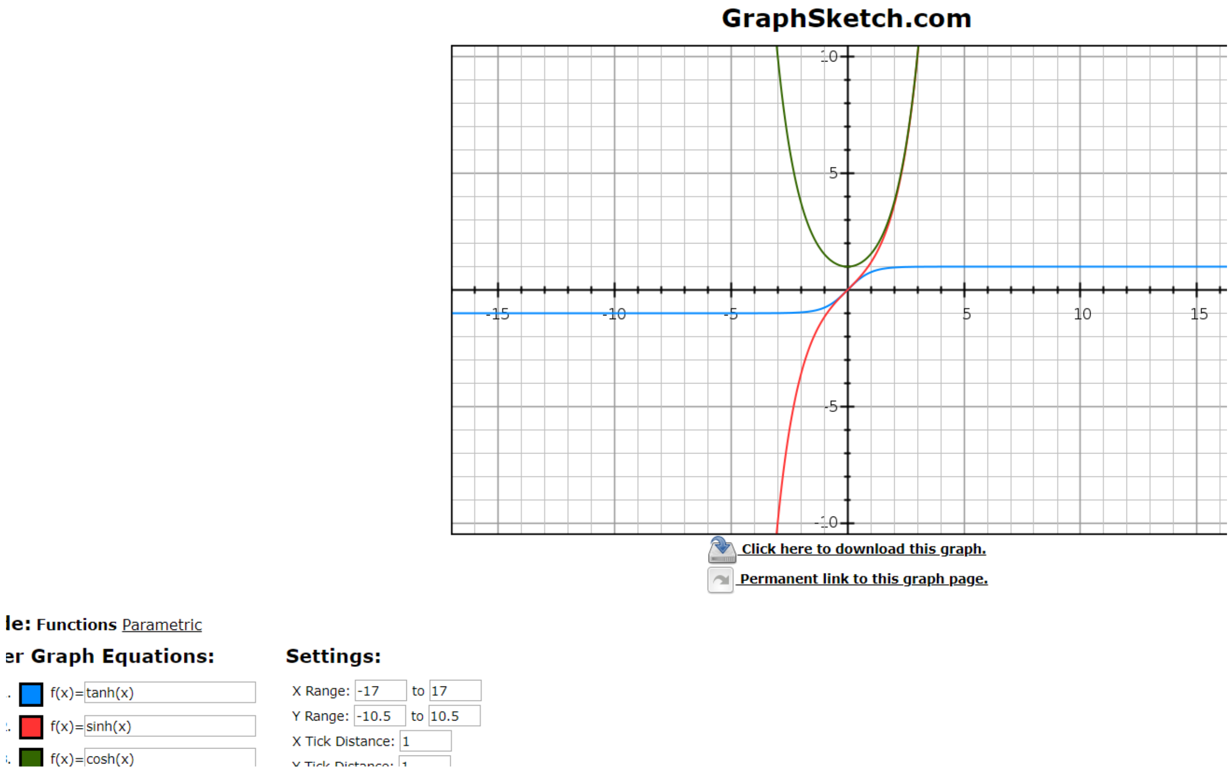


Figura 24: Gráficos das funções hiperbólicas: Sh(vermelho), Ch(verde) e Th(azul).

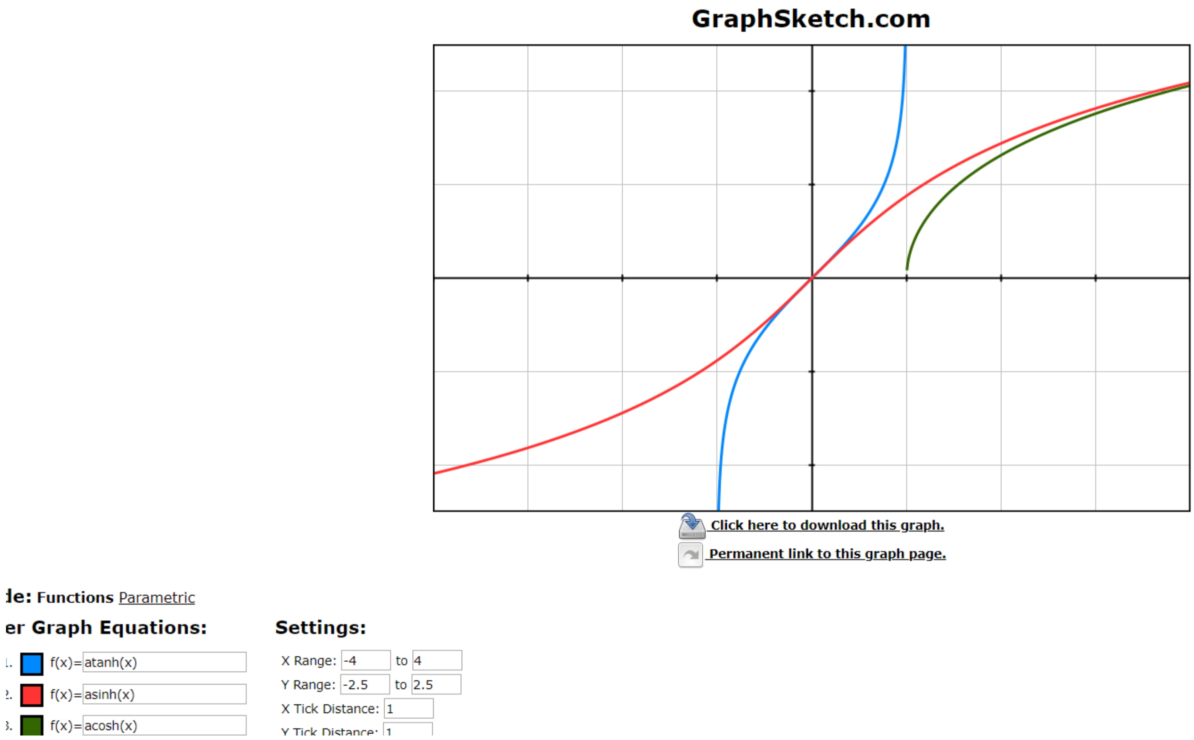


Figura 25: Gráficos das funções hiperbólicas inversas: $SettSh$(vermelho), $SettCh$(verde) e $SettTh$(azul).