Este material é a junção do slides (baseados totalmente nos slides do Prof. Eugenio Massa) usados durante as aulas da Prof^a Peron no curso SMA356-Cálculo 4, no ICMC-USP, em 2023.

Conteúdo

A1 Lembretes/preliminares **A4**

A1.1 Indução . . . A4
A1.2 Definição de inf, sup . . . A6
A1.3 Definição de ponto de acumulação . . . A6

A2 Sequências numéricas **A7**

A2.1 Definições (análogas a funções) . . . A7
A2.2 Limites de sequências . . . A8
A2.2.1 Cálculo de limites . . . A9
A2.3 Propriedades novas . . . A11
A2.4 Sequências definidas por recorrência . . . A12
A2.5 Limite superior e inferior . . . A13
A2.6 Sequências de Cauchy . . . A14

A3 Séries numéricas **A16**

A3.1 Algumas propriedades simples . . . A17

A4 Séries a termos positivos **A18**

A4.1 Critérios da razão e da raiz . . . A19
A4.2 Critério do confronto integral . . . A21

A5 Séries a termos gerais **A22**

A5.1 Comutação dos termos de uma série . . . A24

A6 Algo sobre complexos **A25**

A7 Sequências de funções **A26**

A7.1 Convergência pontual e uniforme . . . A27
A7.2 Teoremas de passagem ao limite . . . A31

A8 Séries de funções **A34**

A9 Séries de potências **A37**

A9.1 Convergência uniforme - continuidade A39
A9.2 Integração e derivação de SDP A41
A9.3 Unicidade de SDP A42

A10 Séries de Taylor e Funções analíticas **A46**
A10.1 Extensão analítica A49
A10.2 Série binomial A50

A11 Séries de Fourier **A52**
A11.1 Teoria L^2 . . . . A57
A11.2 Convegência pontual e uniforme A63

A12 Escritura complexa **A66**

A13 Aplicações em EDP **A66**

A14 Equações do calor e da onda **A68**
A14.1 O método de separação das variáveis A69
A14.1.1 Resolvendo as EDP's A71
A14.2 Condição de extremo não isolado/preso (condição de Dirichlet) . A71
A14.2.1 Solução dos PVIF's A72
A14.3 Condição de extremo isolado/solto (condição de Neumann) . . . A75
A14.4 Soluções dos PVIF para as equações do calor e da onda em $(0, L)$ com as condições de Dirichlet e de Neumann homogêneas A77
A14.5 Solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet não homogênea A79

A15 Exercícios: **A84**

A16 Indução **A84**

A17 Sup, inf, ponto de acumulação **A85**

A18 Sequências numéricas **A86**

A19 Séries numéricas **A88**

A20 Sequências de funções **A94**

A21 Séries de funções **A96**

A22 Séries de Potências **A98**

A23 Aplicação: usando SDP para resolver PVI de EDO **A100**

A24 Séries de Taylor e funções analíticas **A101**

A25 Séries de Fourier **A102**

A26 Aplicação: usando séries de Fourier para resolver PVIF de EDP **A105**

A1 Lembretes/preliminares

A1.1 Indução

Princípio de Indução (fraca)
Seja $U \subseteq \mathbb{N}$ ([1]) com as propriedades:

- $1 \in U$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $k \in U$ então $k+1 \in U$".

Então $U = \mathbb{N}$.

Princípio de Indução (fraca) (para afirmações)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k+1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Etapas de uma prova por indução (fraca):

- Provar o **caso base** p(1).
- Provar o **passo de indução**:
  - assumir a **Hipótese de indução** $p(k)$ [ou $p(1)...p(k)$];
  - provar $p(k+1)$ usando apenas $p(k)$ [ou $p(1)...p(k)$];
- Concluir pelo princípio de indução.

Exemplos.

[1] Neste curso o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ é entendeido como $\{1, 2, 3, 4, ...\}$: para incluír o 0 escreveremos $\mathbb{N} \cup \{0\}$

Princípio de Indução (forte) (para afirmações)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(1)...p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Variantes (outro ponto inicial)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(n_0)$ é verdade,
- $\forall\, k \geq n_0$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k+1)$ é verdade".
  (ou "se $p(n_0)...p(k)$ são verdade então $p(k+1)$ é verdade".).

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \geq n_0$.

Exemplo A1.1. Afirmação:

$$p(n) \;=\; \text{"} \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 \text{"}$$

- caso base: vale pois $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = 1(1+1)/2$.
- passo de indução:
  - assumimos que para certo k vale $\sum_{i=1}^{k} i = k(k+1)/2$
  - calculemos

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = k+1+\sum_{i=1}^{k} i =!! = k+1+k(k+1)/2 = \tag{A1.1}$$

$$= (k+1)(k+1+1)/2 \tag{A1.2}$$

★

A1.2 Definição de inf, sup

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos

- **supremo de A**: $\boxed{S := \sup A}$ é o menor $S \in \mathbb{R}$ tal que $S \geq a$ para todo $a \in A$
  quando A não for limitado superiormente diremos $sup(A) = +\infty$
- **ínfimo de A**: $\boxed{I := \inf A}$ é o maior $I \in \mathbb{R}$ tal que $I \leq a$ para todo $a \in A$
  quando A não for limitado inferiormente diremos $inf(A) = -\infty$

Para indicar inf e sup de imagens, se usa escrever $\boxed{\inf_{x \in D} f(x)}$ (para indicar $\inf\{f(x) :\ x \in D\}$)

Exemplo A1.2.

$$\inf(0,1) = \inf[0,1] = 0; \qquad \inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathbb{N} = \infty;$$
$$\inf\{1/n :\ n \in \mathbb{N}\} = 0;$$
$$\inf_{x \in \mathbb{R}} x^2 - x = -1/4; \qquad \inf_{x \in \mathbb{Z}} x^2 - x = 0.$$

★ ★

A1.3 Definição de ponto de acumulação

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, dizemos que
x_0 é ponto de acumulação de A se

$$\forall\, \delta > \mathbf{0}\ \exists\, \mathbf{x} \in \mathbf{A} \text{ com } \mathbf{x} \neq \mathbf{x_0} \text{ tal que } |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| < \delta$$

Exemplo A1.3.

- 1 é p.d. acum de $(0,1)$ e também de $[0,1]$
- 0 é p.d. acum de $\{1/n :\ n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbb{N}$ não possui pontos de acumulação
- $(0,1/2)$ é ponto de acumulação do gráfico de $\sin(1/x)\,|_{x>0}$

★ ★

A2 Sequências numéricas

Sequências são funções de domínio $\mathbb{N}$ (ou subconjuntos de $\mathbb{N}$, ou de $\mathbb{N} \cup \{0\}$).

Usamos diferentes notações:

$$a : N \to A : n \mapsto a(n) = a_n; \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

onde $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exemplo A2.1.

- $a_n = n$;
- $a_n = \frac{1}{n}$;
- $a_n = (-1)^n$;
- $a_n = \log(n-2)$;
- $a_n = 2^n$;
- $a_n = \ln(1+n)$;
- $a_n = (\cos(n), \sin(n))$;

Graficos em Geogebra

★

A2.1 Definições (análogas a funções)

- **Imagem** é o conjunto $\{a \in A : \exists n \in N : a_n = a\}$.
- **Gráfico** é o conjunto $\{(n, a) \in N \times A : a = a_n\}$.
- é **limitada** se

  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\|a_n\| < L$ para todo $n \in N$.

Se o contradomínio é $\mathbb{R}$ dizemos que a seq. é

- **limitada superiormente** se

  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < L$ para todo $n \in N$.
- **limitada inferiormente** se

  existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > L$ para todo $n \in N$.
- **limitada** se valem ambas.

- **crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \leq a_k$.
- **estritamente crescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n < a_k$.
- **decrescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n \geq a_k$.
- **estritamente decrescente** se $n, k \in N$ e $n < k$ implica $a_n > a_k$.
- **monótona** se vale uma das anteriores.

A2.2 Limites de sequências

Para sequências, apenas faz sentido a noção de limite para $n \to \infty$, definido como para funções:

Se $a : N \to \mathbb{R}$ (com $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ não limitado)

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ significa[2]

$$\forall \varepsilon > \mathbf{0}\ \exists \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ implica } |\mathbf{a_n} - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ significa

$$\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{a_n} > \mathbf{M}$$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ significa

$$\forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}\ \exists \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ implica } \mathbf{a_n} < \mathbf{M}$$

Definições específicas para sequências:

- seq. **convergente**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existe e é finito
- seq. **divergente**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ é infinito ($= \infty$ ou $-\infty$)
- seq. **oscilante**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe nem é infinito
- seq. **não convergente**: se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ não existe ou é infinito

---

- dizemos que uma propriedade vale **definitivamente** em uma sequência se

$$\exists \mathbf{H} \in \mathbb{R} \text{ tal que se } \mathbf{n} \in \mathbf{N} \text{ e } \mathbf{n} > \mathbf{H} \text{ então } \textbf{a propriedade vale}$$

- dada uma sequência a de domínio $\mathbb{N}$, seja $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : k \mapsto n_k$ uma seq. estritamente crescente, então a seq. composta

  $a \circ n : k \mapsto a_{n_k}$ é dita subsequência de a

[2]Se a seq. é a valores em $\mathbb{R}^k$ então a definição fica análoga com $L \in \mathbb{R}^k$ e a norma no lugar do módulo.

A2.2.1 Cálculo de limites

Propriedades: valem todas as propriedades dos limites a infinito de funções de variável real (limite da soma, do produto, da razão, da composta, teoremas de unicidade do limite, de conservação do sinal, de comparação e confronto).

CUIDADO: a regra de l'Hôpital não faz sentido para sequências!!

> Um exemplo:
>
> **Teorema A2.2 [de confronto].**
> Considere sequências $f, g, h : N \to \mathbb{R}$. Se $f_n \leq g_n \leq h_n$ definitivamente e
>
> $$\exists \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} h_n = L\,,$$
>
> **então** $\exists\ \lim_{n\to\infty} g_n = L$ $\triangleleft$

Exemplo A2.3 (Sequência geométrica).

$$q^n : \begin{cases} \to 0 & se\ q = 0, \\ \to 1 & se\ q = 1, \\ oscila & se\ q = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \to \infty & se\ q > 1, \\ \to 0 & se\ q \in (-1,1), \\ oscila & se\ q \leq -1, \end{cases} \quad \bigstar$$

Relação com funções: [3]

Teorema A2.4. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}^k$ com $\mathbb{N} \subseteq D_f$ e $a_n := f(n) : \ n \in \mathbb{N}$.*
Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ **então** $\exists \ \lim_{n\to\infty} a_n = L$ $\triangleleft$

> NOTA: não vale a volta: considere $f(x) = \cos(2\pi x)$ e $a_n = f(n)$: assim $\exists \ \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ enquanto $\nexists \ \lim_{x\to\infty} f(x)$

Porém vale

Teorema A2.5. *Seja $f : D_f \to \mathbb{R}^k$, então:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

se e só se

para toda seq. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_f \setminus \{x_0\}$ *tal que* $x_n \to x_0$ *vale* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

$\triangleleft$

Em particular

Teorema A2.6. *A sequência a_n converge a L* *se e só se* *toda sua subsequência converge a L*

$\triangleleft$

[3]Todas as afirmações aqui valem também se o limite é $\pm\infty$ no lugar de L.

A2.3 Propriedades novas

- Sequências convergentes são limitadas;
- o limite independe dos "primeiros termos": se mudarmos um número finito de termos o limite não muda.
- Se a_n é uma sequência crescente então ela converge ou diverge a $+\infty$ (não pode oscilar); *
  além disso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.
- Se a_n é uma sequência decrescente então ela converge ou diverge a $-\infty$ (não pode oscilar); *
  além disso, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$.

  (* Vale também se for apenas definitivamente crescente / decrescente).
- Em particular, **sequências monótonas e limitadas são convergentes**.

O número e

Considere $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ e $\boxed{b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$:
Vale:

- $a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- a_n é crescente, b_n é decrescente (parte difícil!);
- logo ambas são limitadas e convergem;
- $b_n - a_n = a_n/n \to 0$, logo o limite é o mesmo.

O limite obtido é o $\boxed{\text{número de Nepero } e}$.

- **Critérios da razão e da raiz para sequências:**
  - Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  - Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$
  - Se $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
  - Se $\sqrt[n]{|a_n|} \ge Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

- **Critérios da razão e da raiz para sequências com limite:**
  - Se $a_n \neq 0$ (def.) e $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
  - Se $a_n \neq 0$ (def.) e $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = Q > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$
  - Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
  - Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = Q > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.
  - Se o limite da razão ou da raiz n-ésima for igual a 1, o critério é inconclusivo.

Exercício A2.7. Discuta a convergência das sequências $\frac{3^n}{n!}$ e $\frac{n^n}{n!}$. ★

A2.4 Sequências definidas por recorrência

Dizemos que um sequência é **definida por recorrência** quando são dados alguns termos iniciais e uma regra para gerar os seguintes.

Exemplo A2.8.
$a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} + 1$ para $n \geq 2$
$a_1 = 1, \qquad a_n = 2na_{n-1} + n^2$ para $n \geq 2$
$a_1 = 1,\ a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$ ★

Possíveis métodos de resolução

- **Método de iteração**: calcular alguns ternos $-- >$ chutar uma formula fechada $-- >$ verificar a fórmula por indução.

- Para as "lineares a coef. constantes":

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + ... + C_r a_{n-r} + g(n)$$

  existe uma teoria, (veja aqui, pp5-7; compare com a teoria das EDOs lineares a coef. constantes!).

- Recorrência do tipo $a_n = f(a_{n-1})$ podem ser estudadas através do gráfico de $f(x)$: veja Recorrências em Geogebra.

A2.5 Limite superior e inferior

Dada uma sequência limitada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definimos:

- $\boxed{\overline{a_n}} := \sup_{k \geq n} a_k$;
- $\boxed{\underline{a_n}} := \inf_{k \geq n} a_k$.

Então $\underline{a_n} \leq \overline{a_n}$, $\overline{a_n}$ é decrescente, $\underline{a_n}$ é crescente, em particular

$$\underline{a_1} \leq \underline{a_2} \leq \underline{a_3} \ldots \leq \ldots \overline{a_3} \leq \overline{a_2} \leq \overline{a_1} \,.$$

Definimos

- $\boxed{\limsup_{n\to\infty} a_n} := \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}$: **limite superior** (Ls) de a_n .
- $\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n} := \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}$: **limite inferior** (Li) de a_n .
- Se a sequência é limitada por cima podemos definir igualmente o lim sup (resp, o lim inf se é limitada por baixo);
  Se a sequência não é limitada por cima dizemos $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp, se a sequência não é limitada por baixo dizemos $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

- $\underline{a_n}$ é crescente $\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}$ (se $\underline{a_1} \in \mathbb{R}$) ou $\lim_{n\to\infty} \underline{a_n} = +\infty$, logo,
  - $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. sup. (diverge para } +\infty) \\ \text{ou} & \\ -\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. inf.} \\ \text{ou} & \\ L \in \mathbb{R}, & \text{nos demais casos} \end{cases}$
- $\overline{a_n}$ é decrescente $\Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}$ (se $\overline{a_1} \in \mathbb{R}$) ou $\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = -\infty$, logo,
  - $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. inf. (diverge a } -\infty) \\ \text{ou} & \\ +\infty, & \text{se } \{a_n\} \text{ não é lim. sup.} \\ \text{ou} & \\ L \in \mathbb{R}, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$

Valem as seguintes afirmações (se Li, Ls finitos):

- $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies a_n \leq Ls + \varepsilon$;
- $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies Li - \varepsilon \leq a_n$.

Teorema A2.9. *Dada uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, temos que*

- *Se a_{n_k} é uma subsequência de a_n então*

$$Li = \liminf a_n \leq \liminf a_{n_k} \leq \limsup a_{n_k} \leq \limsup a_n = Ls\,.$$

  Logo se uma subsequência é convergente, seu limite L satisfaz $L \in [Li, Ls]$.

- *Existe uma subsequência que converge a Ls e uma que converge a Li.*
- $\boxed{\textit{existe } \lim_{n\to\infty} a_n = L}$ *se e só se* $\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = L}$ ◁

APLICAÇÃO

Teorema A2.10 [Teorema de Bolzano-Weiestrass].

v1 Dada uma sequência limitada $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$, sempre existe uma subsequência convergente.

v2 Todo conjunto infinito e limitado em $\mathbb{R}^k$ possui um ponto de acumulação.

◁

A2.6 Sequências de Cauchy

Dada uma sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$, dizemos que é uma **sequência de Cauchy** se

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ existe } H > 0\text{: } p, m > H \implies |a_p - a_m| < \varepsilon$$

Teorema A2.11.

- *Toda seq. de Cauchy é limitada;*
- *uma sequência é convergente se e só se é de Cauchy.*

◁

Exercício A2.12. Considere a sequência $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

Mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, vale $\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$.

Conclua que a_n diverge. ★

A3 Séries numéricas

Dada uma sequência a_n, chamamos **série** associada à a_n a soma dos termos da sequência:

- $S_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ é dita **sequências das somas parciais** da série
- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} S_k$ é dita **Série** associada à a_n

Classificamos o **caráter** da série em:

- **convergente**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ existe e é finito
- **divergente**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ é infinito ($= \infty$ ou $-\infty$)
- **oscilante**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ não existe nem é infinito
- **não convergente**: se $\lim_{k\to+\infty} S_k$ não existe ou é infinito

---

Exemplo A3.1. • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ • $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

• $\sum_{n=0}^{\infty} n$ • $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ • $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ★

Exemplo A3.2 (Série geométrica).

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n : \begin{cases} \to 1^{\,4} & se\ q = 0, \\ div\ a + \infty & se\ q = 1, \\ oscila & se\ q = -1, \end{cases} \qquad \begin{cases} div\ a + \infty & se\ q > 1, \\ \to \frac{1}{1-q} & se\ q \in (-1,1), \\ oscila & se\ q \leq -1. \end{cases}$$ ★

Exercício A3.3 (Teorema da contração). Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua e satisfaz $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$ para um $\lambda \in (0,1)$ e todo $x, y \in \mathbb{R}$, então existe um ponto fixo $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) = z$.
Em particular, uma sequência definida por $a_{n+1} = f(a_n)$ com qualquer $a_0 \in \mathbb{R}$ converge a z. ★

[4] Por comodidade, faremos sempre a definição $0^0 := 1$. A motivação é que desta forma a função x^0 torna-se bem definida e contínua em $\mathbb{R}$.

A3.1 Algumas propriedades simples

Usando propriedade dos limites, quando não for uma indeterminação, vale

- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right)$
- $\displaystyle\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right) + \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n + b_n)$
- CUIDADO: não vale $\displaystyle\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n b_n)$

O caráter da série não muda

- multiplicando por $\lambda \neq 0$
- modificando um número FINITO de termos

Teorema A3.4 [Cond necessária para convergência].

- $\boxed{\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \textit{ converge}}$ *se e só se*

  $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \textit{ existe } H > 0\textit{: } p > q > H \implies \left| \displaystyle\sum_{n=q+1}^{p} a_n \right| < \varepsilon}$

- *em particular, se* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge então* $a_n \to 0$

  (se $a_n \not\to 0$ *então* $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *não converge)*

◁

A4 Séries a termos positivos

Nesta seção consideraremos sempre **séries a termos positivos**, ou seja $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ com $a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \geq 0$.

Observação A4.1. Se $a_n \geq 0$ então $S_k = \sum_{n=n_0}^{k} a_n$ é crescente, logo $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **converge ou diverge a** $+\infty$ (não pode oscilar). ★

Teorema A4.2 [Confronto]. *Se $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq n_0$, vale:*

- *se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge e*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

- *se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.* ◁

Corolário A4.3 [Confronto assintótico]. *Sejam $a_n, b_n \geq 0$. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ têm o mesmo caráter.*

Além disso:

– se $L = 0$ então $a_n \leq b_n$ definitivamente, podendo usar o Teorema A4.2;

– se $L = \infty$ então $a_n \geq b_n$ definitivamente, podendo usar o Teorema A4.2. ◁

Exercício A4.4. Prove que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, usando a convergência da série (telescópica) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. ★

Exemplo A4.5.

- Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge deduzimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge se $\alpha \leq 1$.
- Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge deduzimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha \geq 2$.
- ...por enquanto não podemos dizer nada para $\alpha \in (1, 2)$... ★

A4.1 Critérios da razão e da raiz

Observação A4.6.

- Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Se $a_n \neq 0$ e $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$
- Se $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Se $\sqrt[n]{|a_n|} \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. ★

Exercício A4.7. Discuta a convergência das sequências $\frac{3^n}{n!}$ e $\frac{n^n}{n!}$. ★

Teorema A4.8 [Critério da razão].

- *Se $a_n > 0$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ (definitivamente) então $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.*
- *Se $a_n > 0$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge.* ◁

Teorema A4.9 [Critério da raiz].

- *Se $a_n \geq 0$ e $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ (definitivamente) então $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge*
- *Se $a_n \geq 0$ e $\sqrt[n]{a_n} \geq Q > 1$ (definitivamente) então $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge* ◁

CUIDADO: no caso $q = 1$ não temos conclusão

Corolário A4.10. *Sejam $a_n \geq 0$.*
Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge
Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = Q > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = Q > 1$ então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge ◁

Exercício A4.11. Discuta a convergência das séries

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^p}$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p r^n$,

onde $r > 0$ e $p > 0$. ★

Exercício A4.12. Discuta a convergência das séries

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2e^n}{(2n)!}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+3\cos(n)}{15}\right)^{n}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10+3\cos(n)}{12}\right)^{n}$

★

A4.2 Critério do confronto integral

Observação A4.13 (confronto integral). Dada uma sequência a_n, seja $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto a_{[[x]]}$; [5] $\boxed{\text{então } \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx}$

Isso permite discutir o caráter de $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ usando os critérios para integrais impróprias. ★

Corolário A4.14. *Seja $f : [n_0, \infty] \to \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$, f é contínua e decrescente.*

Se $\boxed{a_n := f(n)}$, *então* $\boxed{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ tem o mesmo caráter de } \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx}$

Ainda, se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é convergente, então

$$\boxed{\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0} + \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx, \quad n_0 \geq 1}$$

ou

$$\boxed{\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x-1)\,dx, \quad n_0 \geq 2}$$

◁

Exercício A4.15. Sabendo que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ converge quando $\alpha \in (1, 2)$, deduzimos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge para $\alpha \in (1, 2)$.

O que podemos dizer da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ com $\alpha, \beta > 0$? ★

[5] Denotamos por $[[x]]$ a parte inteira de x.

A5 Séries a termos gerais

Nesta seção consideraremos séries mais gerais, sendo os elementos a_n em $\mathbb{R}$, ou até em $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^k$, ...

Definição A5.1. Dado um real x definimos

$$x^+ = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases} \qquad\qquad x^- = \begin{cases} 0 & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Assim x^+, $x^- \geq 0$ e vale

$$x = x^+ - x^- , \qquad\qquad |x| = x^+ + x^- . \qquad \bigstar$$

Teorema A5.2 [Conv. absoluta].
Se $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ converge então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ também converge, além disso vale

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| \qquad \triangleleft$$

Dizemos que a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ é

- $\boxed{\text{absolutamente convergente}}$ quando ela converge e $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ também converge (neste caso $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^-$ convergem)
- $\boxed{\text{condicionalmente convergente}}$ quando ela converge mas $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ diverge (neste caso $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^-$ divergem)

Exemplo A5.3. Analise, com o critério acima, as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n$$

nos cinco casos
- $s_n = (-1)^n$
- $s_n = \cos(2\pi n/30)$,
- $s_n = \cos(n)$,
- $s_n = (\cos(n), \sin(n)) \in \mathbb{R}^2$,
- s_n sequência limitada qualquer. $\bigstar$

Teorema A5.4 [Critério de Leibnitz]. *Seja* $a_n = (-1)^n b_n$ *onde*

- $b_n \geq 0$, • b_n *decrescente,* • $b_n \to 0$.

Então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge.*

Além disso, a sequencia das somas parciais S_k *e a série* S *satisfazem*

$$|S - S_k| \leq b_{k+1} \qquad S - S_k \begin{cases} \geq 0 & \text{se } k \text{ é ímpar} \\ \leq 0 & \text{se } k \text{ é par} \end{cases}$$

◁

Exemplo A5.5. Reveja as séries do exemplo A5.3.

Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge para todo $a > 0$ ★

Teorema A5.6 [Critério de Dirichlet]. *Seja* $a_n = s_n b_n$ *onde*

- $b_n \geq 0$, • b_n *decrescente,* • $b_n \to 0$,
- *Existe* $M > 0$: $\left| \sum_{n=n_0}^{k} s_n \right| \leq M$ *para todo* $k \geq n_0$.

Então $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *converge*.

Além disso, a sequencia das somas parciais T_k *e a série* T *satisfazem* $|T - T_k| \leq 2M\, b_{k+1}$ ◁

Exemplo A5.7. Reveja as séries do exemplo A5.3.

Note que como $\cos(2\pi n/30) = -\cos(2\pi(n + 15)/30)$, temos que $\sum_{n=1}^{30} \cos(2\pi n/30) = 0$ e logo $\left| \sum_{n=1}^{k} \cos(2\pi n/30) \right| \leq 30$

Note que $\cos(n) = Re(e^{in})$ e $\left| \sum_{n=0}^{k} e^{in} \right| = \left| \frac{1 - e^{i(k+1)}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$

★

A5.1 Comutação dos termos de uma série

Teorema A5.8. *Toda série* $\boxed{\textit{a termos positivos}}$ *ou* $\boxed{\textit{absolutamente convergente}}$ *mantém o caráter e a soma mesmo reordenando seus termos.*

Reordenando os termos de uma série $\boxed{\textit{condicionalmente convergente}}$ *podemos obter qualquer soma, e qualquer caráter*. ◁

Exemplo A5.9. Podemos definir a soma dos conjuntos de reais a seguir (sem que seja definida uma ordem para somar)?

- $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\pm\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- $\left\{\pm\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ★

A6 Algo sobre complexos

Um **número complexo** pode ser associado a uma dupla de reais, usaremos a seguinte notação:

$$z \in \mathbb{C}: \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Definimos:

$$\textbf{soma}: \qquad (x+iy) +_{\mathbb{C}} (X+iY) := (x+X) + i(y+Y)$$

$$\textbf{produto}: \qquad (x+iy) \cdot_{\mathbb{C}} (X+iY) := (xX - yY) + i(Xy + xY)$$

Desta forma o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um **corpo**.

Podemos identificar os complexos $x + i0$ com os reais.
Os complexos $\pm i$ são raízes do real -1.

Frequentemente é útil representar um complexo na forma polar:

$$z = x + iy = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\theta = arg(z) = (2k\pi +) \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Produto na forma polar:

$$[\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))] \cdot [\sigma(\cos(\phi) + i\sin(\phi))] = [\rho\sigma(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))]$$

Potência na forma polar

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Também podemos definir $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$: esta função exponencial possui as mesmas propriedades da sua versão real!

desta forma $z = \rho e^{i\theta}$ e $z^n = \rho^n e^{in\theta}$

A7 Sequências de funções

Chamamos **Sequência de funções** uma sequência cujos elementos são funções de um domínio D fixado:

$$\{f_n : \ D \to \mathbb{R}\}_{n\in N}$$

onde $N \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Exemplo A7.1. Com $D = \mathbb{R}$:

- $f_n(x) = x^n$;
- $f_n(x) = nx$
- $f_n(x) = x/n$
- $f_n(x) = \sin(nx)$;
- $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$;
- $f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}$
- $f_n(x) = arctan(x+n)$;
- $f_n(x) = \begin{cases} 1 - n|x| & |x| \le 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases}$;
- $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \le x \le 1/n \\ n(2-nx) & 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & x > 2/n \ ou \ x < 0 \end{cases}$

Com $D = (0, \infty)$ e $\alpha > 0$:

- $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & x \ge 1/n \\ n^\alpha & x < 1/n \end{cases}$;

(Veja em Graficos em Geogebra) ★

A7.1 Convergência pontual e uniforme

Dada uma sequência de funções

$$\{f_n : \ D \to \mathbb{R}\}_{n\in N}$$

e fixados $A \subseteq D$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

- dizemos que f_n **converge pontualmente a f em A** se para todo $x \in A$ vale $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$
- então dizemos que f **é o limite pontual de f_n em A**:
  $\boxed{f_n \to f \ \text{ pont. em } A}$ ou $\boxed{f_n \xrightarrow{p} f \text{ em } A}$.
- **o conjunto de convergência pontual de f_n** é o maior $A \subseteq D$ tal que a seq. numérica $f_n(x)$ converge para todo $x \in A$

Exemplo A7.2. Discuta a convergência pontual das sequências do exemplo A7.1 ★

Dada uma sequência de funções

$$\{f_n : \ D \to \mathbb{R}\}_{n\in N}$$

e fixados $A \subseteq D$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

- dizemos que f_n **converge uniformemente a f em A** se $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in A$
- então dizemos que f **é o limite uniforme de f_n em A**:
  $\boxed{f_n \to f \ \text{ unif. em } A}$ ou $\boxed{f_n \xrightarrow{u} f \text{ em } A}$.

- note que pode não existir um maior $A \subseteq D$ tal que a seq. f_n convirja uniformemente em A.

Observação A7.3 (Comparação das definições)**.**

- $f_n \to f$ pontualmente em A: $\boxed{\text{para todo } x \in A \text{ vale } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)}$:
  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}$, $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  H depende de ε e de x também
- $f_n \to f$ uniformemente em A:
  $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies [\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}$
  H depende de ε apenas e deve servir para todo x.

  Uma formulação equivalente é
  $\forall \varepsilon > 0$ existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $n > H \implies \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
  ou seja, $\boxed{\lim_{n\to\infty} [\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|\,] = 0}$

★

Proposição A7.4.

- *se $B \subseteq A$ e $f_n \to f$ em A $\implies$ $f_n \to f$ em B (unif/pont)*
- *$f_n \to f$ unif. em A $\implies$ $f_n \to f$ pont. em A*

◁

Procedimento para estudar convergência uniforme:

1. calcular limite pontual f e encontrar o conj. de converg. pontual A
2. procurar $B \subseteq A$ tal que $f_n \to f$ unif. em B.

Exemplo A7.5. $x^n \to f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ pontualmente em $[0,1]$, mas não uniformemente.

$x^n \to 0$ pontualmente em $[0,1)$, mas não uniformemente.
$x^n \to 0$ uniformemente em $[0,p]$ para todo $p \in (0,1)$.
(Veja em Grafico em Geogebra) ★

A7.2 Teoremas de passagem ao limite

Uma sequência de funções f_n é dita **uniformemente de Cauchy em A** se

$\forall \varepsilon > 0$ existe $H > 0$: $p, m > H \implies |f_p(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A$

Teorema A7.6.

- *se f_n é uniformemente de Cauchy em A e $f_n \to f$ pont. em A,*
  então $f_n \to f$ unif. em A
- $\boxed{f_n \text{ é unif. de Cauchy em } A \iff f_n \text{ converge unif. a alguma } f \text{ em } A}$

◁

Teorema A7.7. *Suponha que a sequência de funções f_n convirja uniformemente a f em A;*

0) se cada f_n é limitada em A então $\boxed{f \text{ é limitada em } A}$

1) se x_0 é p.d.a de A e, para todo n, $\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ então

$\boxed{\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} L_n \in \mathbb{R}}$

2) se cada f_n é cont. em A então $\boxed{f \text{ é cont. em } A}$

3) se cada f_n é integrável em $[a, b] \subseteq A$ então $\boxed{f \text{ integrável em } [a, b]}$ *e*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)}$$

◁

CUIDADO: não vale que se as f_n são deriv. então f é derivável!!!

Teorema A7.8. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções deriváveis. Se*

- $\{f_n(x_0)\}$ *convergir para algum $x_0 \in [a, b]$*
- $\{f_n'\}$ *convirja uniformemente em $[a, b]$ a uma função d,*

então f_n conv. unif. em $[a, b]$ a uma função f, onde f é derivável e $f' =$

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)}$$

◁

Observação A7.9. As afirmações dos teoremas acima poderiam ser falsas assumindo apenas convergência pontual!! ★

Observação A7.10.

- x^n não converge uniformemente em $[0, 1]$: o limite não é contínuo.
- $\arctan(x + n)$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: $\lim_{x\to-\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \pi/2 \neq -\pi/2 = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to-\infty} f_n(x)$
- $f_n(x) = \frac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ mas f_n' não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: o limite não é derivável.
- $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x \leq 1/n \\ n(2 - nx) & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & x > 2/n \text{ ou } x < 0 \end{cases}$; não converge uniformemente em $\mathbb{R}$: a integral do limite não é o limite da integral
- $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^\alpha} & x \geq 1/n \\ n^\alpha & x < 1/n \end{cases}$ não converge uniformemente em $(0, \infty)$: o limite não é limitado.

★

A8 Séries de funções

Chamamos **Série de funções** a soma dos termos de uma sequência de funções:

dada uma sequência de funções f_n, chamamos

- $S_k(x) = \sum_{n=n_0}^{k} f_n(x)$ **sequência (de funções) das somas parciais**
- definimos a **Série** associada à f_n sendo

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n := \lim_{k\to\infty} S_k \qquad \text{(limite pontual)}$$

Exemplo A8.1.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge pontualmente a $S(x) = \dfrac{x}{1-x}$ em $(-1,1)$.
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$.

★

Dizemos que a série converge uniformemente em A se S_k converge uniformemente em A, em particular

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A à função $S(x)$, se

$$\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{x\in A}\left|S(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right|\right] = 0$$

Teorema A8.2 [Teste M de Weiestrass].
Se $\sup_{x\in A} |f_n(x)| \leq a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é uma série convergente, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente em* A. $\triangleleft$

Observação A8.3. A condição é apenas suficiente: mesmo não valendo a série poderia convergir uniformemente. ★

Teorema A8.4. *Suponha que a série* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *convirja uniformemente em* A.

0) se cada f_n *é limitada em* A *então* $\boxed{S \text{ é limitada em } A}$

1) se x_0 *é p.d.a de* A *e* $\exists \lim_{x\to x_0} f_n(x) = L_n$ *então*

$$\exists \lim_{x\to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right) \in \mathbb{R}$$

2) se cada f_n *é cont. em* A *então* $\boxed{S \text{ é cont. em } A}$

3) se cada f_n *é integrável em* $[a,b] \subseteq A$ *então* $\boxed{S \text{ integrável em } [a,b]}$ *e*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx \right)$$

$\lhd$

CUIDADO: não vale que se as f_n *são deriv. então* S *derivável!!!*

Teorema A8.5. *Considere a série* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *com* f_n *deriváveis. Se*

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *convergir para algum* $x_0 \in [a,b]$
- $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *convergir uniformemente em* $[a,b]$,

$\boxed{\text{então } S \text{ converge unif. em } [a,b], \text{ é derivável e } S' = D, \text{ isto é,}}$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

$\lhd$

Exercício A8.6. Discuta a convergência pontual e uniforme das series a seguir, e a continuidade e derivabilidade de suas somas.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$

★

A9 Séries de potências

Chamamos **Série de potências (SDP) de centro x_0** uma série da forma

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{A9.1}$$

onde a_n é uma sequencia de reais ou complexos.

OBS Por convenção (deixa as fórmulas mais simples) consideramos $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$; também definimos $0! = 1$

Observação A9.1. A série (A9.1)

- sempre converge em x_0, ao valor a_0
- se converge em $\overline{x} \neq x_0$ então converge (absolutamente) para todo x t.q. $|x - x_0| < |\overline{x} - x_0|$
- se não converge em $\overline{x} \neq x_0$ então não converge para todo x t.q. $|x - x_0| > |\overline{x} - x_0|$

★

Teorema A9.2. *Para a série de potências (A9.1) vale uma das três possibilidades:*

(1) a série converge apenas em x_0

(2) a série converge (absolutamente) em todo $\mathbb{R}$ *(ou em todo* $\mathbb{C}$*)*

(3) $\exists\, R > 0$ *tal que a série*

- *converge (absolutamente) se* $|x - x_0| < R$
- *não converge se* $|x - x_0| > R$
- *pode ou não convergir se* $|x - x_0| = R$ $\triangleleft$

- R é dito **raio de convergência** da série de potências, (pondo $R = 0$ no caso (1) e $R = \infty$ no caso (2))
- Para séries a valores em $\mathbb{R}$, o conjunto de convergência é sempre um intervalo (**intervalo de convergência, IC**), que pode ser
  – (1) um ponto,
  – (2) todo $\mathbb{R}$,
  – (3) um intervalo centrado em x_0 de raio R, que pode incluir ou não os extremos
- Para séries a valores em $\mathbb{C}$, o conjunto de convergência é sempre um circulo (**círculo de convergência, CC**), que pode ser
  – (1) um ponto,
  – (2) todo $\mathbb{C}$,
  – (3) um círculo centrado em x_0 de raio R, que pode incluir ou não os pontos na fronteira

Exemplo A9.3.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$, $R = \infty$, $IC = \mathbb{R}$ (*ou* $\mathbb{C}$).
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, $R = 0$, $IC = \{0\}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1)$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1]$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$.

★

Cálculo do raio de convergência

Teorema A9.4 [Critério da raiz].

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ou

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \textit{(se existir)}$$

◁

Teorema A9.5 [Critério da razão].

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \qquad \textit{(se existir)}$$

◁

A9.1 Convergência uniforme - continuidade

Teorema A9.6. *A série de potências* (A9.1) *converge uniformememte em todo conjunto fechado e limitado contido em* $\{x : \; |x - x_0| <$

$R\}$. ◁

Teorema A9.7 [de Abel]. *Se a série de potências (A9.1) converge em $\overline{z}$ com $|\overline{z} - x_0| = R$ então converge uniformemente em todo o segmento $\{x_0 + \tau(\overline{z} - x_0) : \ \tau \in [0, 1]\}$.* ◁

Corolário A9.8. *Uma Série de potências é sempre contínua onde conv* ◁

A9.2 Integração e derivação de SDP

Teorema A9.9. *A série de potências* (A9.1) *é integrável em todo* $[a,b] \subseteq IC$ *e valem*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\left((b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}\right),$$

$$\int_{x_0}^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{para todo } x \in [a,b]\,,$$

esta última é uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC maior!)

◁

Teorema A9.10. *A série de potências* (A9.1) *é derivável em todo* $\{x : \ |x-x_0| < R\}$ *e vale*

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\,(x-x_0)^{n-1}$$

a qual resulta ser uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC menor!)

◁

Corolário A9.11. *A série de potências* (A9.1) *é infinitas vezes derivável em todo* $\{x : \ |x-x_0| < R\}$ *e vale*

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n\,(x-x_0)^{n-k}$$

a qual resulta ser uma SDP com o mesmo raio de convergência (mas pode ter IC menor!) ◁

Observação A9.12. Valem resultados análogos em $\mathbb{C}$, mas precisaria definir derivada e integral em $\mathbb{C}$.... ★

A9.3 Unicidade de SDP

Teorema A9.13. *Se a série de potências* (A9.1) *tem* $R > 0$ *e vale* $S \equiv 0$ *em uma vizinhança de* x_0*, então* $a_n = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Se duas séries de potências têm $R > 0$ *e vale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n \tag{A9.2}$$

em uma vizinhança de x_0*, então* $a_n = b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\triangleleft$

Exemplo A9.14. Manipulando a partir de séries conhecidas, podemos escrever várias funções conhecidas como SDP:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{A9.3}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{A9.4}$$

$$Sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{A9.5}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{A9.6}$$

$$Ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad em\ \mathbb{R} \tag{A9.7}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad em\ (-1,1) \tag{A9.8}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad em\ (-1,1] \tag{A9.9}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad em\ (-1,1) \tag{A9.10}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad em\ [-1,1] \tag{A9.11}$$

★

Graficos em Geogebra
outros:
$\sin(x)$ com T^1, T^3, T^5, T^7, T^{13}

$\ln(x)$ com $T^1,\ T^4,\ T^7,\ T^{10}$
zoom $\ln(x)$ com $T^1,\ T^4,\ T^7,\ T^{10},\ T^{13}$

Exemplo A9.15. As séries acima podem ser usadas para aproximar valores transcendentes:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{6}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left[\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}}\right]$$

★

A10 Séries de Taylor e Funções analíticas

Notação: para um $\delta > 0$, denotamos por $V_\delta(x_0)$ a vizinhança de raio δ do ponto x_0.
Note: em $\mathbb{R}$ isto seria o intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; em $\mathbb{C}$ seria o circulo aberto centrado em x_0 de raio δ.

Teorema A10.1 [P.d.T. com resto de Lagrange].
Se, para um $\delta > 0$, $f \in \mathcal{C}^{k+1}(V_\delta(x_0))$, **então dado $x \in V_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ existe $c_x \in (x_0, x)$ se $x > x_0$ (resp. $c_x \in (x, x_0)$ se $x < x_0$) tal que**

$$f(x) - T^k_{f,x_0}(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1},$$

onde

$$T^k_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é o **Polinômio de Taylor de ordem k, da função f, no ponto x_0.**

Veja a teoria sobre polinômios de Taylor Aqui: p7... $\triangleleft$

Se $f \in \mathcal{C}^\infty(V_\delta(x_0))$ posso escrever a **Série de Taylor** de f em volta de x_0

$$\boxed{T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

Se $x_0 = 0$, a série acima é chamada de **Série de Maclaurin**.

Teorema A10.2. *Se a série de potências $S(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x - x_0)^n$ converge em $(x_0 - R, x_0 + R)$, então $a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$*
Ou seja, **se uma f pode ser escrita como SDP centrada em x_0 com raio de convergência positivo, então esta SDP**

é a T_{f,x_0}. ◁

Observação A10.3. Nem sempre f coincide com sua série de Taylor:

- vimos que $e^x \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ em $\mathbb{R}$.
- $\frac{1}{1+x} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ em $(-1,1)$,
  mas $\frac{1}{1+x}$ faz sentido em toda a semirreta $(-1,\infty)$.
- $\arctan(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ em $(-1,1)$,
  mas $\arctan(x)$ tem domínio $\mathbb{R}$.
- $U(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
  mas $U = T_{U,0} = 0$ apenas em 0!

★

Definição A10.4. $f \in \mathcal{C}^\infty(V_\delta(x_0))$ é dita

- $\boxed{\text{analítica em } x_0}$ se $\exists\, r$ tal que $f \equiv T_{f,x_0}$ em $V_r(x_0)$.
- $\boxed{\text{analítica}}$, se for analítica em todo ponto do seu domínio.

★

Exemplo A10.5. e^x, $\sin(x)$, $\ln(x)$ ecc.. são analíticas
$U(x)$ não é analítica em 0.

★

Teorema A10.6 [Cond.suf. para analiticidade]. *Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(V_\delta(x_0))$: se existem $M, r > 0$ tais que*

$$\sup_{x \in (x_0 - r, x_0 + r)} |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{r^n}$$

então f é analítica em x_0

◁

Corolário A10.7. *Se* $\exists\, M, \alpha > 0$ *tais que a estimativa* $|f^{(n)}(x)| \leq M\alpha^n$

- *vale em vizinhança de* x_0, *então* f *é analítica em* x_0
- *vale em* $\mathbb{R}$ *então* f *é analítica em* $\mathbb{R}$ *e suas* T_{f,x_0} *convergem em todo* $\mathbb{R}$

$\triangleleft$

A10.1 Extensão analítica

Dada uma função analítica f de domínio $D \subseteq \mathbb{R}$, suas séries de Taylor T_{f,x_0} ($x_0 \in D$) definem funções de variável complexa no círculos complexos de raio R_{x_0}.

Juntando estas definições podemos estender f a uma vizinhança em $\mathbb{C}$ de D.

Exemplo A10.8. Exponencial complexa:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad em\ \mathbb{C}$$

logaritmo complexo:

$$\ln(1+z) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \quad em\ V_1(0)$$

note

$$e^{iy} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(y) + i\sin(y)$$

logo

$$e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

★

A10.2 Série binomial

A solução do P. de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\alpha}{1+x} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

é $y(x) = (1+x)^\alpha$.

Resolvendo por séries obtemos $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ onde $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}$.

Se $\alpha \in \mathbb{N}$ então

$$a_n = \begin{cases} \binom{\alpha}{n} & n \leq \alpha, \\ 0 & n > \alpha, \end{cases}$$

logo a série converge em todo $\mathbb{R}$ pois é apenas um polinômio de ordem α: o conhecido **Binômio de Newton**:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n$$

No caso geral definimos os **coeficientes binomiais generalizados** como

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1\,,$$

logo podemos escrever

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \;\; em \;\; (-1,1),$$

de fato $\left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| \to 1 = R.d.C.$

Exemplo A10.9.

- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n \;\; em \;\; (-1,1),$ onde podemos calcular os primeiros coeficientes: $\binom{1/2}{n} = 1, 1/2, -1/8, 1/16, -5/64, ...$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n \;\; em \;\; (-1,1),$ onde podemos calcular os primeiros coeficientes : $\binom{-1/2}{n} = 1, -1/2, -3/8, -5/16, ...$
- note que $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.
- Obtemos também

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n \;\; em \;\; (-1,1)$$

e logo

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \;\; em \;\; (-1,1)\,.$$

★

A11 Séries de Fourier

Valem as seguintes identidades:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1 = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) = 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx) = 0 & \forall n, k \in \mathbb{N} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx) = 0 & \forall n \neq k \in \mathbb{N} \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \pi & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{A11.1}$$

Observação A11.1. Possível interpretação:

As funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \qquad n \in \mathbb{N}$$

formam uma **família ortonormal** com respeito ao produto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)$$

★

Chamamos **Polinômio trigonométrico de ordem k**

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Chamamos **Série trigonométrica (ou de Fourier)**

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Suponhamos que S convirja uniformemente em $\mathbb{R}$, então posso integrar por séries obtendo (**Fórmulas de Euler - Fourier**)

$$\boxed{\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x) = a_0\pi \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos(nx) = a_n\pi \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin(nx) = b_n\pi \end{cases}} \tag{A11.2}$$

Definição:
Dada $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente integrável,
chamamos **Série de Fourier de f** a Série trigonométrica S_f cujos coeficientes são calculados pelas (A11.2) com f no lugar de S.

Pergunta? qual é a relação entre f e S_f?

- f par $\Longrightarrow b_n = 0 \; \forall\, n$ (S_f é uma série de cossenos, logo é par)

- f ímpar $\Longrightarrow a_n = 0 \; \forall \, n$ (S_f é uma série de senos, logo é ímpar)
- se f tem descontinuitá e S_f conv. uniformemente, certamente não coincidem!

Porém, se f é regular, as coisas ficam melhores!

Exemplo A11.2. • $\boxed{f = sgn(x) \text{ em } [-\pi, \pi]:}$

$a_n = 0$, $b_n = \dfrac{2}{n\pi}[1 - \cos(n\pi)]$, isto é, $\frac{4}{n\pi}$ só para n ímpar.

$$\boxed{S_f = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}}$$

- $\boxed{f = |x| \text{ em } [-\pi, \pi]:}$

  $b_n = 0$, $a_0 = \pi$, $a_n = \dfrac{2}{n^2\pi}[\cos(n\pi) - 1]$, isto é, $-\frac{4}{n^2\pi}$ só para n ímpar.

$$\boxed{S_f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}}$$

- $\boxed{f = x \text{ em } [-\pi, \pi]:}$

  $a_n = 0$, $b_n = -\dfrac{2}{n}\cos(n\pi)$, isto é, $-(-1)^n\frac{2}{n}$.

$$\boxed{S_f = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}}$$

★

Observação A11.3 (Série de cossenos/senos)**.** Seja f abs. int. em $[0, \pi]$.

- Podemos prolongar f para $[-\pi, 0]$ de forma par, obtendo uma função par g abs. int. em $[-\pi, \pi]$. A série de (Fourier) de cossenos ($S_{f,c}$) de f é a série de Fourier de g, i.e., $S_{f,c} = S_g$

- Podemos prolongar f para $[-\pi, 0]$ de forma ímpar, obtendo uma função ímpar g abs. int. em $[-\pi, \pi]$. A série de (Fourier) de senos ($S_{f,s}$) de f é a série de Fourier de g, i.e., $S_{f,s} = S_g$

★

Em geral, se f é absolutamente integrável num intervalo $[-L, L]$, as Fórmulas de Euler - Fourier tornam-se

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) = a_0 \\ \\ \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\dfrac{\pi}{L}nx\right) = a_n \\ \\ \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\dfrac{\pi}{L}nx\right) = b_n \end{cases}} \tag{A11.3}$$

e a série de Fourier de f se escreve

$$\boxed{S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)}$$

A11.1 Teoria L^2

Teorema A11.4 [Convergência em L^2, Bessel, Parseval]. *Sejam f^2 é integrável em $[-\pi, \pi]$, S_f sua série de Fourier, S_k a truncada k-ésima de S_f e T_k um qualquer polin.trig. de ordem k. Então*

1. $$\int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2\right)$$

2. $$\int_{-\pi}^{\pi} (f - S_k)^2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2\right) - \left(\int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - T_k)^2$$

   Em particular, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2$.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ *converge, e logo* $a_n, b_n \to 0$,

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (f - S_k)^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ *difícil!*

5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2 \xrightarrow{k\to\infty} \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right)$, *ou seja,*
   vale a Desigualdade de Bessel:

$$\boxed{\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2}.$$

De fato, vale a Identidade de Parseval:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right)}$$

$\triangleleft$

Dito de outra forma: consideramos o espaço vetorial

$$X = \left\{ f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2 < \infty \right\}$$

dotado do produto escalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$ e da norma $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2$. Então,

1. $\|S_k\|^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2 \right)$
2. $\|f - S_k\|^2 = \|f\|^2 - \|S_k\|^2 \le \|f - T_k\|^2$ ou seja, S_k é o polinômio trigonométrico de ordem k mais perto de f

   Em particular, $\|f\|^2 \ge \|S_k\|^2$.
3. $\sum a_n^2 + b_n^2$ converge, e logo $a_n, b_n \to 0$,
4. $\|f - S_k\|^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ou seja, $S_k \to f$ (convergência "integral")
5. $\|f\|^2 \ge \|S_k\|^2 \xrightarrow{k\to\infty} \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right)$, ou seja,

   vale a Desigualdade de Bessel:

$$\boxed{\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right) \le \|f\|^2}.$$

De fato, vale a Identidade de Parseval:

$$\boxed{\|f\|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right)}$$

Mais uma interpretação:

O sistema

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \qquad n \in \mathbb{N}$$

forma uma "**base Hilbertiana**" no espaço X (é ortonormal e permite aproximar qualquer elemento do espaço).

Reescrevendo as fórmulas com a normalização acima temos

$$\widehat{S}(x) = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n(x) + b_n s_n(x)$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) c_0(x) = \langle \widehat{S}, c_0 \rangle = a_0 \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) c_n(x) = \langle \widehat{S}, c_n \rangle = a_n \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) s_n(x) = \langle \widehat{S}, s_n \rangle = b_n \end{cases} \tag{A11.4}$$

Análogas às fórmulas conhecidas de GA-AL:

dado o sistema $\{e_i\}$ ortonormal em X,

- se $f = \sum \alpha_i e_i$ então $\langle f, e_i \rangle = \alpha_i$
- $S_k := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ é a projeção de f no subespaço gerado por $e_1, .., e_k$

No nosso caso, também temos que S_k converge a f quando $k \to \infty$.

Poderíamos fazer a mesma construção usando uma qualquer outra base ortonormal!

Conclusão: temos um resultado de convergência $S_f \to f$ quando f^2 é integrável, mas é uma convergência ”integral”, diferente da pontual e da uniforme.

A11.2 Convegência pontual e uniforme

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica e absolutamente integrável em $[-\pi, \pi]$, contínua
(exceto em um número finito de pontos em $[-\pi, \pi]$).

Teorema A11.5 [Convergência pontual]. *S_f converge em x_0 a:*

- *$f(x_0)$ se f é contínua e existem (são finitas) as derivadas laterais em x_0*
- *$\dfrac{L^+ + L^-}{2}$ se existem (finitos)*

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = L^\pm \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - L^\pm}{x - x_0} = D^\pm \in \mathbb{R}\,. \quad \triangleleft$$

Poderia não convergir ou convergir a outros valores se alguns dos limites acima não existem.

Exemplo A11.6.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2\pi}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n} = \frac{\pi}{2} - 1$

★

Teorema A11.7 [Convergência uniforme]. *Se f é contínua e derivável exceto em um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$), nos quais existem (são finitos) $L^\pm$ e $D^\pm$, então*

- *S_f converge a f uniformemente em todo $[a, b]$ no qual f é contínua,*
- *em particular, S_f converge a f uniformemente em $\mathbb{R}$ se f for contínua.*

$\triangleleft$

Teorema A11.8. *Seja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, 2π periódica. Então os coeficientes satisfazem*

$$|a_n|,\ |b_n| \leq \frac{C_f}{n^2}$$

e logo $S_f \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$.

Isso vale também se tiver um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$) onde f é apenas contínua com derivadas laterais finitas.

$\triangleleft$

Exemplo A11.9.

- $f(x) = \frac{1}{x}\Big|_{[-\pi,\pi]}$,
  não tem como calcular S_f por não ser abs. integrável.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\Bigg|_{[-\pi,\pi]}$,
  podemos calcular S_f, mas em 0 não sabemos se nem onde converge.

- $f(x) = \sqrt{|x|}\Big|_{[-\pi,\pi]}$,
  podemos calcular S_f, mas em 0 não sabemos se nem onde converge.

- $f(x) = |x|\big|_{[-\pi,\pi]}$
  podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$

- $f(x) = x|_{[-\pi,\pi]}$
  podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f
  em $[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$.

- $f(x) = sgn(x)|_{[-\pi,\pi]}$
  podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f
  em $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ e em $[-\pi + \varepsilon, -\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $k\pi$.

★

A12 Escritura complexa

Pondo

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_0}{2} & n = 0 \\[2ex] \dfrac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\[2ex] \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases} \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)e^{-inx}$$

obtemos

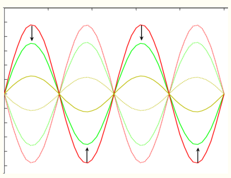
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

A13 Aplicações em EDP

Veja na apostila de EDP - Prof. Massa explicação de como as "**equações da onda e do calor**" aparecem em modelos físicos:

p. 51 a 54:

- Vibração de varinha: modelando um corpo elástico em dimensão um
- Corda vibrante: modelando uma corda que vibra transversalmente

(Figura da internet)  (Um video sobre corda vibrante)

- Membrana vibrante: modelando uma membrana (bidimensional) que vibra transversalmente

- Campos eletro-magnético no vácuo
- Calor/difusão: modelando a difusão de um poluente num meio

p. 82 - 83:

- Entendendo a vibração de uma corda de guitarra usando a solução da equação da onda

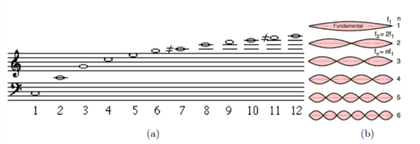


Figura 5.1: Harmônicas de Do_2.

A14 Equações do calor e da onda

Problema de valores iniciais e de fronteira para a **equação do calor**

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0\,; \end{cases} \tag{A14.1}$$

Possível interpretação:

- u indica temperatura de uma varinha na posição x no instante t,
- extremos da varinha em 0 e π com temperatura fixada a 0 (A14.1-3),
- temperatura inicial nos demais pontos da varinha é ϕ (A14.1-2),
- α indica condutividade/calor.específico da varinha.

Trocando a condição **de Dirichlet** (A14.1-3) por $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ (condição **de Neumann**), o extremo é isolado (não tem passagem de calor[6]).

Problema de valores iniciais e de fronteira para a **equação da onda**

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0,\pi)\,, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0\,; \end{cases} \tag{A14.2}$$

Possível interpretação:

- u indica o deslocamento de uma corda de guitarra,

[6] o fluxo de calor é proporcional á derivada da temperatura

- extremos da corda **fixados** em 0 e em π (A14.2-4),
- posição inicial nos demais pontos da corda é ϕ (A14.2-2),
- velocidade inicial nos demais pontos da corda é ψ (A14.2-3),
- c^2 indica tensão/peso da corda.

Trocando a condição (A14.2-4) por $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ o extremo é solto (movimento transversal livre)

A14.1 O método de separação das variáveis

1) chute: solução $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ (a variáveis separadas);

2) substituímos na equação;

3) manipulamos a equação até chegar numa igualdade do tipo

$$F(D^i X(x)|_{i\leq k}) = G(D^i T(t)|_{i\leq k}) :$$

isso implica que os dois lados da igualdade devem ser constantes, obtemos então duas EDOs.

- Se a equação for linear e homogênea, poderemos sobrepor diferentes soluções a variáveis separadas, isto é:

equação linear: o grau da variável é 1, ou seja, as derivadas não possuem potência > 1

equação homogênea: as EDO's (em X ou T) são iguais a zero e não a alguma função

no caso do chute $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

- conhecendo-se as soluções das EDO's (digamos X_n e T_n), então:

- os produtos $X_n T_n$ serão soluções da equação calor/onda

e pela linearidade:

a sobreposição das soluções ($\sum X_n T_n$) será solução da equação calor/onda

equação do calor é a EDP: $u_t - \alpha u_{xx} = 0$

$\boxed{\text{equação da onda é a EDP: } u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0}$[7]

[7] α e c^2 são constantes positivas e o quadrado na constante c é por conveniência para quando escrever a solução da equação.

A14.1.1 Resolvendo as EDP's

Substituindo o chute $u(x,t) = X(x)\,T(t)$:

- na equação do calor:

$$X(x)T'(t) - \alpha X''(x)T(t) = 0\,.$$

obtemos

$$\frac{1}{\alpha}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda \tag{A14.3}$$

- na equação da onda:

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0\,.$$

Supondo $X \neq 0$ e $T \neq 0$ obtemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda \tag{A14.4}$$

A14.2 Condição de extremo não isolado/preso (condição de Dirichlet)

Em ambos casos (calor ou onda) e considerando as condições iniciais $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, precisamos estudar o PVI:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & em \ \ (0,\pi), \\ X(0) = 0 = X(\pi)\,, \end{cases} \tag{A14.5}$$

onde λ é um parâmetro real.

As únicas soluções são do tipo $C\sin(\sqrt{\lambda}x)$, com $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Resolvendo $T' = -\alpha n^2 T$ obtemos soluções da forma $Ae^{-\alpha n^2 t}$, para o calor,
- resolvendo $T'' = -c^2 n^2 T$ obtendo soluções da forma $A\cos(c\,n\,t) + B\sin(c\,n\,t)$ parta a onda.

A14.2.1 Solução dos PVIF's

Obtivemos então
● soluções da equação do calor da forma

$$Ae^{-\alpha n^2 t}\sin(nx)\,,$$

que correspondem a $\phi(x) = A\sin(nx)$

e
● soluções da equação da onda da forma

$$[A\cos(c\,n\,t) + B\sin(c\,n\,t)]\sin(nx)\,,$$

que correspondem a $\phi(x) = A\sin(nx)$ e $\psi(x) = cnB\sin(nx)$.

Como os problemas são lineares, também combinações lineares de soluções são soluções. Chegamos então nos seguintes resultados.

Se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx)\,, \tag{A14.6}$$

então a (única) solução será (?)

$$u(x,t) = \sum_{n\in N} a_n e^{-\alpha n^2 t}\sin(nx)\,. \tag{A14.7}$$

Observação A14.1 (Soma finita ou infinita)**.** Se N tem cardinalidade finita, então a igualdade em (A14.7) é sempre válida. Se $N = \mathbb{N}$, a igualdade em (A14.7) é garantida nas condições do teorema abaixo. ★

Teorema A14.2 [Solução PVIF para equação do calor]. *Se em* (A14.6) $\sum_{n\in N} |a_n|$ *converge, então a série em* (A14.7) *converge uniformemente a uma função contínua em* $[0,\pi]\times[0,\infty)$ *e infinitas vezes derivável em* $[0,\pi]\times(0,\infty)$*, e é solução de* (A14.1)*.* ◁

No caso da onda, com condições

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n\in N} b_n \sin(nx) \tag{A14.8}$$

teremos a (única) solução (?)

$$u(x,t) = \sum_{n\in N} \left[a_n \cos(c\,n\,t) + \frac{b_n}{cn} \sin(c\,n\,t) \right] \sin(nx)\,. \tag{A14.9}$$

Teorema A14.3 [Solução PVIF para equação da onda]. *Se em* (A14.8) $\sum_{n\in N} n^2|a_n|$ *e* $\sum_{n\in N} n|b_n|$ *convergem então a série em* (A14.9) *converge uniformemente a uma função contínua e com derivadas de primeira e segunda ordens contínuas em* $[0,\pi]\times[0,\infty)$ *e é solução de* (A14.2)*.* ◁

Observação A14.4. As hipóteses do Teorema A14.3 implicam que $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, de fato estas são condições conhecidas para obter soluções do problema da onda.

As hipóteses do Teorema A14.2 são bem mais fracas, de fato para o calor é suficiente uma condição inicial contínua para ter soluções, as quais são sempre infinitas vezes deriváveis. ★

Observação A14.5. Se for dada ϕ (ou ψ) em $[0, \pi]$ podemos sempre escrevê-la como em (A14.6) (ou (A14.8)), prolongando-a até $[-\pi, 0]$ de forma ímpar e calculando a série de Fourier da função resultante, que será uma série só de senos. ★

Observação A14.6 (Solução Generalizada)**.** Mesmo quando as hipóteses dos Teoremas A14.2 e A14.3 não valem, podemos escrever as séries em (A14.7) e (A14.9) e usá-las como definição de "solução generalizada" dos PVIF (A14.1) e (A14.2).

De fato, a solução generalizada pode representar uma aproximação da solução do problema físico considerado, mesmo não satisfazendo exatamente os problemas nas formas (A14.1) ou (A14.2).

★

A14.3 Condição de extremo isolado/solto (condição de Neumann)

Se trocamos a condição nos extremos de $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,$$

precisamos estudar o PVI:

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & em \;\; (0,\pi), \\ X'(0) = 0 = X'(\pi)\,, \end{cases} \tag{A14.10}$$

onde λ é um parâmetro real.

Análogo ao caso anterior, as únicas soluções são do tipo

$$C\cos(\sqrt{\lambda}\pi), \qquad \text{com } \lambda = n^2,\; n \in \mathbb{N} \cap \{0\},\; C \in \mathbb{R}$$

(note que para $n = 0$ a solução é constante!)

Obtemos então

- soluções da equação do calor da forma

$$B\,,\; n = 0, \quad \text{e} \quad Ae^{-\alpha n^2 t}\cos(nx)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

que correspondem a $\phi(x) = A\cos(nx)$

e

- soluções da equação da onda da forma

$$D + Ct\,,\; n = 0, \quad \text{e} \quad [A\cos(c\,n\,t) + B\sin(c\,n\,t)]\cos(nx)\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

que correspondem a $\phi(x) = A\cos(nx)$ e $\psi(x) = cnB\cos(nx)$

Podemos obter resultados análogos aos vistos na Seção A14.2, em particular:

se for dada ϕ (ou ψ) em $[0, \pi]$, podemos prolongar até $[-\pi, 0]$ de forma par e obter agora uma série só de cossenos.

A saber:

Se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x, 0) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in N} a_n \cos(nx) \,, \tag{A14.11}$$

então a (única) solução será (?)

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in N} a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx) \,. \tag{A14.12}$$

A mesma hipótese do Teorema A14.2 garante a convergência uniforme da série acima para a solução do PVIF para a equação do calor com condição de Neumann.

No caso da onda, com condições

$$u(x, 0) = \phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in N} a_n \cos(nx), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n \in N} b_n \cos(nx \tag{A14.13}$$

teremos a (única) solução (?)

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2} t + \sum_{n \in N} \left[a_n \cos(c\, n\, t) + \frac{b_n}{cn} \sin(c\, n\, t) \right] \cos(nx) \,. \tag{A14.14}$$

As mesmas hipóteses do Teorema A14.3 garante a convergência uniforme da série acima para a solução do PVIF para a equação da onda com condição de Neumann.

A14.4 Soluções dos PVIF para as equações do calor e da onda em $(0, L)$ com as condições de Dirichlet e de Neumann homogêneas

A mesma hipótese do Teorema A14.2 garante a convergência uniforme das séries abaixo para a solução dos seguintes PVIF:

A solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \end{cases}$$

é (?)

$$u(x,t) = \sum_{n \in N} a_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de senos de ϕ tem coeficientes a_n.

A solução do PVIF para a equação do calor com condição de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \end{cases}$$

é (?)

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in N} a_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de cossenos de ϕ tem coeficientes a_n ($n \in N \cup \{0\}$).

As mesmas hipóteses do Teorema A14.2 garante a convergência uniforme das séries abaixo para a solução u:

A solução do PVIF para a equação da onda com condição de Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{para } x \in (0, L). \end{cases}$$

é (?)

$$u(x, t) = \sum_{n \in N} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + \frac{L}{cn\pi} b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de senos de ϕ tem coeficientes a_n e a série de Fourier de senos de ψ tem coeficientes b_n.

A solução do PVIF para a equação da onda com condição de Neumann

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{para } x \in (0, L). \end{cases}$$

é (?)

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2} t + \sum_{n \in N} \left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) + \frac{L}{cn\pi} b_n \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de cossenos de ϕ tem coeficientes a_n e a série de Fourier de cossenos de ψ tem coeficientes b_n $(n \in N \cup \{0\})$.

A14.5 Solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet não homogênea

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, L), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0, L), \\ u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2, & t \geq 0; \end{cases} \tag{A14.15}$$

- A solução estacionária do PVI:

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, L), \\ u(0,t) = T_1, u(L,t) = T_2 & t \geq 0; \end{cases}$$

isto é, a solução que não varia com o tempo é da forma

$$u(x,t) = v(x),$$

onde v é então a solução do PVI

$$\begin{cases} v''(x) = 0, & t > 0, x \in (0, L)\,, \\ v(0) = T_1, v(L) = T_2 & t \geq 0\,; \end{cases}$$

que é dada por

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

- A solução de (A14.15) será então da forma

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

onde w é solução do PVIF para eq. do calor com condição de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} w_t - \alpha w_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, L)\,, \\ w(x,0) = \phi(x) - v(x), & x \in (0, L)\,, \\ w(0,t) = 0 = w(L,t), & t \geq 0\,; \end{cases}$$

- Portanto

A solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet não homogênea

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, L),\, t > 0 \\ u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{para } x \in (0, L) \end{cases}$$

é

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

onde

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

é a correspondente **solução estacionária** e w é a solução do PVIF para a equação do calor com condição de Dirichlet homogênea (**solução transiente**):

$$\begin{cases} w_t - \alpha w_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0,L),\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = w(L,t) & \text{para } t \geq 0 \\ w(x,0) = \phi(x) - v(x) & \text{para } x \in (0,L), \end{cases}$$

ou seja,

$$w(x,t) \overset{(?)}{=} \sum_{n \in N} a_n e^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a série de Fourier de senos de $\phi - v$ tem coeficientes a_n.

A mesma hipótese do Teorema A14.2 garante a convergência uniforme da série acima para a solução w.

Observação A14.7 (Interpretação física da solução do PVIF para a equação do calor)**.**

Considerando a solução generalizada:

1. No caso da equação do calor com condição de Dirichlet homogênea (varinha com extremos fixados a 0^o, não isolados): quando $t \to \infty$ a temperatura da varinha (solução) tende à zero,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$$

"passando pelo seno"(veja solução do problema quando $\phi(x) = 3$ em $[0, \pi]$, $\alpha = 1$, no Geogebra).

2. No caso da equação do calor com condição de Neumann homogênea (varinha com extremos isolados): quando $t \to \infty$ a temperatura da varinha (solução) tende à média,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2},$$

"passando pelo cosseno"(veja solução do problema quando $\phi(x) = x$ em $[0, \pi]$, $\alpha = 1$, no Geogebra).

3. No caso da equação do calor com condição de Dirichlet não homogênea (varinha com extremos fixados a temperaturas diferentes, não isolados): quando $t \to \infty$ a temperatura da varinha (solução) tende à temperatura estacionária (ou de equilíbrio),

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x),$$

ou seja, a temperatura da varinha tende a minimizar as oscilações já que na prática $w(x,t)$ "desaparece" com o passar do tempo (e daí o nome "solução transiente"). Também vale:

$$\lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = v'(x)$$

(veja solução do problema quando $\phi(x) = 3$ em $[0, \pi]$, $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = \pi$ $(v(x) = x)$, $\alpha = 1$, no Geogebra).

★

A15 Exercícios:

Este arquivo contém alguns dos exercícios que foram resolvidos ou discutidos durante as aulas. Seus enunciados podem não estar completos e pode ser que durante as aulas importantes comentários sobre as resoluções tenham sido feitos.[8]

A16 Indução

1. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale:

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *(tarefa!)*

2. Sejam $a_1 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Prove que $a_n = 2^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Se $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ e $a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1}$, então a_n é impar, para todo $n \in \mathbb{N}$. *(tarefa: completar resolução!)*

4. Sejam $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ e $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. Prove que $a_n = 5 - 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. *(tarefa!)*

5. Todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pode ser fatorado como produto de números primos.

6. Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$, então existem $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tais que $n = 3i + 5j$.

7. Exemplos errados! Encontre o erro na prova:

   (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 < n$.

   dado $k \in \mathbb{N}$,

[8] Caso você encontre algum erro neste arquivo, por favor, reportá-lo para apperon@icmc.usp.br

HI: $p(k): k+1<k$

Tese: $p(k+1): k+2<k+1$

Claro que $k+2=(k+1)+1 \overset{HI}{<} k+1$.

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$ vale "$p(k) \Rightarrow p(k+1)$"e portanto $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Dado $C \subseteq \mathbb{N}$ finito, se existe $p \in C$ par, então todo $p \in C$ é par.

$p(n)$: para todo $C \subset \mathbb{N}$ com $\#C = n$ vale $\star$: (se existe $p \in C$ par, então todo $p \in C$ é par)

Caso base: $p(1)$ é verdadeiro porque para qualquer conjunto C de 1 elemento, se existe um par em C, todo elemento de C é par dado $k \in \mathbb{N}$,

HI: $p(k)$: para todo $C \subset \mathbb{N}$ com $\#C = k$ vale $\star$

Tese: $p(k+1)$: para todo $W \subset \mathbb{N}$ com $\#W = k+1$ vale $\star$

Seja $W \subset \mathbb{N}$ com $\#W = k+1$ tal que existe $p \in W$ par.

Tome $V_1 \subset W$ com k elementos e tal que $p \in V_1$. Pela HI, todos elementos de V_1 são pares.

Tome $V_2 \subset W$ com k elementos de forma que p e o elemento de $W \setminus V_1$ estejam em V_2. Pela HI, todos elementos de V_2 são pares.

Logo, todos elementos de W são pares.

Portanto, o passo de indução é verdadeiro e $p(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

A17 Sup, inf, ponto de acumulação

8. Determine o sup e o inf dos conjuntos:

(a) $\inf(0,1) = \inf[0,1] = 0$

(b) $\inf \mathbb{N} = 1, \quad \sup \mathbb{N} = \infty$

(c) $\inf\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\} = 0$

(d) $\inf_{x \in \mathbb{R}} x^2 - x = -1/4$

(e) $\inf_{x \in \mathbb{Z}} x^2 - x = 0$

9. Ponto de acumulação: denote por A' o conj. dos p.a. de A

(a) $A' = [0,1]$ se $A = (0,1)$ e também se $A = [0,1]$

(b) $A' = \{0\}$ se $A = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\mathbb{N}$ não possui pontos de acumulação

(d) $A' = \{(0, y); y \in [-1, 1]\} \cup A$ se A é o gráfico de $\sin(1/x)\,|_{x>0}$

A18 Sequências numéricas

10. Indique o domínio, ilustre o gráfico e/ou imagem da sequência $\{a_n\}$, onde:

(a) $a_n = n$;

(b) $a_n = \dfrac{1}{n}$;

(c) $a_n = (-1)^n$;

(d) $a_n = \log(n - 2)$;

(e) $a_n = 2^n$; *(tarefa!)*

(f) $a_n = \ln(1 + n)$; *(tarefa!)*

(g) $a_n = (\cos(n), \sin(n))$;

Graficos em Geogebra

11. Determine se a sequência $\{a_n\}$ é monótona, limitada, onde:

(a) $a_n = n$; *(tarefa!)* est. crescente, limitada inferiormente

(b) $a_n = \dfrac{1}{n}$; est. decrescente, limitada

(c) $a_n = (-1)^n$; não monótona, limitada

(d) $a_n = \log(n - 2)$; *(tarefa!)* est. crescente, limitada inferiormente

(e) $a_n = \dfrac{1}{n!}, n \geq 0$; decrescente, limitada

(f) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}, n \geq 1$; est. crescente, limitada inferiormente

12. (definitivamente)

(a) $a_n = -8 + n$; def. positiva

(b) $a_n = n^2 - 8n$; def. est. crescente

(c) $\{1, 8, 10, -15, 2, 1, 2, 2, 2, 2, \ldots\}$ def. constante

13. Determine se $\{b_k\}$ é uma subsequência da sequencia $\{a_n\}$:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$;
$\{b_k\} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ sim

$\{b_k\} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots\}$ não

(b) $a_n = (-1)^n$;
$\{b_k\} = \{a_{2k}\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ sim

$\{b_k\} = \{a_{2k+1}\} = \{-1, -1, \ldots\}$ sim

14. Calcule:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+3}{n+1} = +\infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

(c) * $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{a^n} = +\infty \quad (a > 1)$

15. Calcule:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$ *(tarefa)*

(b) * $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

16. Determine se a sequência $\{a_n\}$ é convergente, onde:

(a) $a_n = (-1)^n$ não conv., oscila

(b) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ não convergente *(tarefa)*

17. Determine se existe: $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe

18. Resolva a recorrência usando: método de iteração ou lineares a coeficientes constantes e quando $a_n = f(a_{n-1})$ estude a recorrência através do gráfico de f:

(a) $a_0 = h,\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta$ (veja Ex.2) Resp.: $a_n = \alpha^n h + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i$

(b) $a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1}^2$ Resp.: $a_n = 2^{2^{n-1}}$

(c) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3,$ *(seq. Fibonacci)*

Resp.: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

(d) $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_1 = 4 \end{cases}$

Resp.: $a_n = 2^{1-2^{-n}}$

(e) $a_n = \sin(a_{n-1}) + a_{n-1}$ *veja o Geogebra, "caos"dependendo de a_1...*

Wolfram - recorrencia   Recorrências em Geogebra

19. (limsup, liminf)

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$

(b) $a_n = (-1)^n$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

(c) $a_n = n$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(d) $a_n = \sin(n)$ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

(e) $a_n = \sin(n\pi/4)$ *(tarefa!)* $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

20. Verifique que a sequência $\{\frac{1}{n}\}$ é de Cauchy. *(tarefa!)*

21. Verifique que a sequência $\{a_n\}$ cujo termo geral é dado por

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}$$

não é de Cauchy. Conclua que $\{a_n\}$ diverge.

A19 Séries numéricas

22. Encontre a soma (se convergente) de

(a) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *harmônica* diverge para $+\infty$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1$ diverge para $+\infty$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 0$ converge para 0

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ oscila, não convergente

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge para $+\infty$

(f) * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *telescópica* conv. p/ 1

(g) * $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *geométrica* $\begin{cases} \text{converge para } 1 & \text{se } q = 0 \text{ (considerando } 0^0 = 1) \\ \text{diverge para } +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{oscila} & \text{se } q \leq -1 \\ \text{converge para } \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \end{cases}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ converge para $-\frac{1}{3}$

23. Usando séries, represente em fração a dizima periódica $0.234\overline{56}$.
Resp.: $\frac{23456 - 234}{99.000}$

Qual fração representaria $0.\overline{xxx}$? e $0.yy\overline{xxx}$? *(tarefa!)* Resp.: $\frac{xxx}{999}$; $\frac{yyxxx - yy}{99.900}$

24. Discuta a convergência da série (use o Teorema A3.4 [Cond necessária para convergência]):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge para $+\infty$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ *(tarefa!)* diverge para $+\infty$

25. Estude a convergência da série (use o Teorema A4.2 [Confronto]):

(a) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \geq 2$

(c) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha 1$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ *(tarefa!)*

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10+\cos(n)}{15}\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10+\cos(n)}{5}\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10+\cos(n)}{10}\right)^n$

* *série α-harmônica*

Resp.: (a) converge para $s \in (1, 2)$; (b) converge para $s \in (1, 2)$; (c) diverge para $+\infty$; (d) diverge para $+\infty$; (e) converge (Dica: use o limite $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ para verificar que $\ln(n) \leq n$ definit.); (f) converge; (g) diverge; (h) diverge: $\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{10+\cos(n)}{10}\right)^n = +\infty$.

26. Discuta a convergência da série (use os Teoremas A4.8-A4.9 [Razão/raiz]):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}$ $\begin{cases} \text{converge} & \text{se } |x| < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ converge

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 e^n}{(2n)!n^3}$ converge

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!n^3}$ diverge

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10+\cos(n)}{n}\right)^n$ converge

Quando $r > 0$ e $p > 0$, *(tarefa!)*

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!}$ converge (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n^p}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n n^p$

Resp. (h): $\begin{cases} \text{converge, se } 0 < r < 1,\ \forall p > 0 \\ \text{diverge, se } 0 < r < 1,\ \forall p > 0 \\ \text{série } p\text{-harmônica, se } r = 1 \end{cases}$ (i): $\begin{cases} \text{converge, se } 0 < r < 1,\ \forall p > 0 \\ \text{diverge, se } r > 1,\ \forall p > 0 \\ \text{diverge, se } r = 1,\ \forall p > 0 \end{cases}$

27. Discuta a convergência da série

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ diverge (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ *(tarefa!)* con- verge

28. Encontre quantos termos da sequência $\{a_n\}$ é preciso somar para obter uma aproximação da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com erro $< 10^{-3}$.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ (1001 termos) (b) $a_n = \dfrac{1}{n!}$ (10 termos)

29. Discuta a convergência da série (use Teorema A4.14 [Confronto Integral][9]):

(a) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ quando $\alpha \in (1, 2)$ converge para $s \in [\frac{1}{\alpha-1}, \frac{\alpha}{\alpha-1}] \subset (1, +\infty)$

(b) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ com $\beta > 0$ converge se $\beta > 1$ e diverge se $\beta \leq 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge

[9] Relembrar integrais impróprias!! (Integrais Imprópias - Cálculo 2)

(d) * $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln(n))^{\beta}}$ $(\alpha, \beta > 0)$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha < 1$ ($\alpha = 1$ item b)

30. Discuta a convergência das séries (Teorema A5.2 [Conv. absoluta]):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2} \text{ (converge)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \text{ (inconclusivo)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n \text{ ((a,b,c) não converge)}$$

nos quatro casos:

(a) $s_n = (-1)^n$

(b) $s_n = \cos(2\pi n/30)$,

(c) $s_n = \cos(n)$,

(d) s_n sequência limitada qualquer

31. Discuta a convergência da série (Teorema A5.4 [Critério de Leibnitz]):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ converge

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ converge *(tarefa!)*

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$ diverge

32. Encontre quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ é preciso somar para obter uma aproximação da sua soma com erro $< 10^{-3}$. (1001 termos)

33. Discuta a convergência da série (Teorema A5.6 [Critério de Dirichlet]):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n}$, onde: $s_n = \begin{cases} 2, & n = 3k \\ -1, & n \neq 3k \end{cases}$ converge *(tarefa!)*

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n/30)}{n}$ (ver Geogebra) converge

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n}$ converge

34. Encontre quantos termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n/30)}{n}$ é preciso somar para obter uma aproximação da sua soma com erro $< 10^{-3}$. *(tarefa!)*

    (60mil termos)

35. Podemos somar os elementos dos conjuntos de reais a seguir sem que seja definida uma ordem para somar?

(a) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

(b) $\left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

(c) $\left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ não

(d) $\left\{\frac{(-1)^n}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

(e) $\left\{\pm\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ não

(f) $\left\{\pm\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sim

A20 Sequências de funções

36. Esboce os gráficos (veja em Geogebra) :

   (a) $f_n(x) = x^n$;
   (b) $f_n(x) = nx$;
   (c) $f_n(x) = x/n$;
   (d) $f_n(x) = \sin(nx)$;
   (e) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$;
   (f) $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{1+n^2x^2}}{n}$;
   (g) $f_n(x) = \arctan(x+n)$;
   (h) $f_n(x) = \begin{cases} 1-n|x| & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases}$;
   (i) $f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x \leq 1/n \\ n(2-nx) & 1/n \leq x \leq 2/ \\ 0 & x > 2/n \text{ ou } x \end{cases}$
   (j) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & x > 1/n \\ n^\alpha & 0 \leq x \leq 1/n \end{cases}$.

37. Discuta a convergência pontual das sequências do Exercício 36.

   (a) $f_n \xrightarrow{p} f$ em $(-1,1]$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$
   (b) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\{0\}$; $\lim_{n\to\infty} nx = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$
   (c) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\mathbb{R}$
   (d) oscila se $x \neq 0$ e $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
   (e) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\mathbb{R}$
   (f) $f_n \xrightarrow{p} |x|$ em $\mathbb{R}$
   (g) $f_n \xrightarrow{p} \frac{\pi}{2}$ em $\mathbb{R}$
   (h) $f_n \xrightarrow{p} f$ em $\mathbb{R}$ onde $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
   (i) $f_n \xrightarrow{p} 0$ em $\mathbb{R}$
   (j) $f_n \xrightarrow{p} \frac{1}{x^\alpha}$ em $(0,\infty)$

38. Discuta a convergência uniforme das sequências (a,c,e,f) do Exercício 36.

   (a) $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[-M,M]$, $\forall M \in (0,1)$
   (c) $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $[-M,M]$, $\forall M > 0$
   (e) $f_n \xrightarrow{u} 0$ em $\mathbb{R}$

39. Usando o Teorema A7.7, estude a convergência uniforme das sequências (g, i, j) do Exercício 36.

(f) $f_n \xrightarrow{u} |x|$ em $\mathbb{R}$

(g) $f_n \overset{u}{\not\to} \frac{\pi}{2}$ em $\mathbb{R}$

(i) $f_n \overset{u}{\not\to} 0$ em qualquer subintervalo de $\mathbb{R}$

(j) $f_n \overset{u}{\not\to} \frac{1}{x^\alpha}$ em $(0, \infty)$

40. Considere a sequência do Exercício 36f. Verifique que $f_n' \xrightarrow{p} f$ em $\mathbb{R}$ mas $f_n' \overset{u}{\nrightarrow} f$ em $\mathbb{R}$, onde $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ *(tarefa!)*

A21 Séries de funções

41. Discuta a convergência pontual das séries

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ conv. pont. a $\frac{x}{1-x}$ em $(-1,1)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ conv. pont. em $[-1,1)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ conv. pont. em $[-1,1]$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ conv. pont. em $\mathbb{R}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ conv. pont. em $\mathbb{R}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ conv. pont. em $\mathbb{R}$

42. Discuta a convergência uniforme das séries do Exercício 41.

(a) conv. unif. em $[-r,r]$, $\forall r \in (0,1)$

(b) conv. unif. em $[-r,r]$, $\forall r \in (0,1)$

(c) conv. unif. em $[-1,1]$

(d) conv. unif. em $[-r,r]$, $\forall r > 0$

(e) conv. unif. em $\mathbb{R}$

(f) conv. unif. em $\mathbb{R}$

43. Discuta a continuidade e a derivabilidade das séries do Exercício 41.

(a) contínua e derivável em $(-1,1)$,

(b) contínua e derivável em $(-1,1)$,

(c) contínua em $[-1,1]$ e derivável em $(-1,1)$

(d) contínua e derivável em $\mathbb{R}$

(e) contínua em $\mathbb{R}$ e não é derivável em $\mathbb{R}$

(a série das derivadas não converge em $x = 0$)

(f) contínua e derivável em $\mathbb{R}$

A22 Séries de Potências

44. Encontre os raio e intervalo de convergências

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1)$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$, $R = 1$, $IC = [-1, 1]$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $R = \infty$, $IC = \mathbb{R}$ (*ou* $\mathbb{C}$).

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$, $R = 0$, $IC = \{0\}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$, $R = 1$, $IC = (-1, 1)$.

45. Encontre o raio de convergência ou o IC:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2 + \sin(n))^n x^n$, $R = \frac{1}{3}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{3^n}$, $R = \sqrt{3}$, $IC = [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(x-1) - 2)^n}{n^2 + 1}$, $IC = [1 + e, 1 + e^3]$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^n}{n}$ *(tarefa!)*, $IC = [-2, 0]$.

46. Encontre o raio de convergência e o intervalo de convergência uniforme: *(tarefa!)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{3+x}{2+x} \right)^n$$

Resp.: $IC = (-\infty, -\frac{5}{2}]$ e uniformemente em $[M, -\frac{5}{2}], \forall M < -\frac{5}{2}$.

47. Encontre os IC da série S e de sua integral $\int_0^x S$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Resp.: $(-1, 1)$ e $[-1, 1)$ resp.

48. Encontre os IC da série S e de sua derivada S'

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Resp.: $[-1, 1)$ e $(-1, 1)$ resp.

49. Escrever as funções abaixo como SDP:

$$e^x, \quad \sin(x), \quad \sinh(x), \quad \cos(x), \quad \cosh(x),$$

$$\frac{1}{1+x}, \quad \ln(x+1), \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \arctan(x).$$

Resp. Ver Slide 4

50. Calcular

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x e^{\sqrt{1+x^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}-1}{n!(2n+1)}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin(x^2) dx \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x \sin(x+1)}{(x+1)^2} dx$ *(tarefa!)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{2^{2n+1}-1}{2n+1} - \frac{2^{2n}-1}{2n} \right] + 1 - \ln 2$$

Encontre quantos termos da série devemos somar para que o valor da integral 50c tenha erro $\varepsilon < 10^{-3}$. Resp.: 2 termos: $I = \frac{13}{42} + \varepsilon$

51. Use SDP para calcular os limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0,$ *(tarefa!)*

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\Big|_{x=0} = 0$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) - 0}{x} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\Big|_{x=0} = -\frac{1}{12}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x(e^x - 1 - x)}{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}} \right)^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^6$

A23 Aplicação: usando SDP para resolver PVI de EDO

52. Use SDP para resolver as EDO's

(a) $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *(tarefa!)* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ converge em $\mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} -y'' = y \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases}$ $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b}{(2n+1)!} x^{2n+1} = a\cos x + b\sin x$ em $\mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} y'' - xy' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2.4.6.\ldots.(2n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!!}$ converge em $\mathbb{R}$

(d) $\begin{cases} y' = \frac{\alpha}{1+x} y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ converge em $(-1,1)$ quando $\alpha \notin \mathbb{N}$ (Série Binomial) e $y(x) = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$ converge em $\mathbb{R}$ quando $\alpha \in \mathbb{N}$ (Binômio de Newton)

53. Prove que $\binom{-1}{n} = (-1)^n$.

54. Usando o Exercício 52d, encontre a SDP para

(a) $f(x) = \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$ em $(-1,1)$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$ em $(-1,1)$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$ em $(-1,1)$

(d) $f(x) = \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1}$ em $(-1,1)$

A24 Séries de Taylor e funções analíticas

55. Verifique que as funções e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\ln(x)$ são funções analíticas.

56. Encontre a SdT em torno de 0 de

$$f(x) = (1 + x^2)\cos(x)$$

e calcule $f^{(3)}(0)$ e $f^{(10)}(0)$.

Resp.: $f(x) = T_{f,0}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n-2)!}\right] x^{2n}$; $f^{(3)}(0) = 0$ e $f^{(10)}(0) = 89$

57. Calcule o limite *(tarefa!)*

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^\alpha}.$$

Resp.: $L = \begin{cases} 0, & \alpha < 4 \\ \frac{1}{4!}, & \alpha = 4 \\ +\infty, & \alpha > 4 \end{cases}$

58. Encontre $T_{f,3}$, o IC e calcule $f^{(10)}(3)$, onde

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{4x+3}\right).$$

Resp.: $f(x) = T_{f,3}(x) = \ln(\frac{7}{15}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[(\frac{2}{7})^n - (\frac{4}{15})^n\right] x^n$; $IC = (-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}]$ e $f^{(10)}(3) = 9! \left[(\frac{2}{7})^{10} - (\frac{4}{15})^{10}\right]$

59. Encontre $T_{f,0}$, o IC e calcule $f^{(13)}(0)$ e $f^{(14)}(0)$, onde *(tarefa!)*

$$f(x) = (x^3 + x)e^{-x^2}.$$

Resp.: $f(x) = T_{f,0}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right] x^{2n+1}$; $IC = \mathbb{R}$; $f^{(13)}(3) = 13! \left[\frac{1}{6!} - \frac{1}{5!}\right]$; $f^{(14)}(3) = 0$

Compare uma função f com o polinômio de Taylor T^k_{f,x_0} no Desmos ou Geogebra

A25 Séries de Fourier

60. Escreva as séries de Fourier das funções:

(a) $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0\,, \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad x \in [-\pi, \pi]$ $\quad S_f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$

(b) $f(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi]$ $\quad S_f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$

(c) $f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi]$ $\quad S_f(x) = -2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \le \pi \end{cases}$, sendo uma função par em $[-\pi, \pi]$

$$S_f(x) = \frac{\pi - 1}{2\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n\pi} \cos(nx)$$

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le L \\ L, & -L < x < 0 \end{cases}$ *(tarefa!)*

$$S_f(x) = \frac{3L}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2L}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) + \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

61. Analise a convergência das séries de Fourier (caso existam) das seguintes funções 2π-periódicas: (ver Geogebra)

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in (-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

não tem como calcular S_f pois f não é abs. integrável.

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, 2k\pi + 2\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ mas em 0 não sabemos se nem onde converge.

(c) $f(x) = \sqrt{|x|}\Big|_{[-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, 2\pi + 2k\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ mas em 0 não sabemos se nem onde converge.

(d) (60b) $f(x) = |x|\big|_{[-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $\mathbb{R}$

(e) (60c) $f(x) = x\big|_{(-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[-\pi+2k\pi+\varepsilon, \pi+2k\pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$.

(f) (60a) $f(x) = sgn(x)\big|_{(-\pi,\pi]}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, \pi + 2k\pi - \varepsilon]$ e em $[-\pi + 2k\pi + \varepsilon, 2k\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $k\pi$.

(g) $f(x) = \sqrt[3]{x}\big|_{[-\pi,\pi)}$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi-\pi+\varepsilon, 2k\pi+\pi+\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$ (teo. conv. pontual) e também para 0 em $2k\pi$ (por ser ímpar).

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, \pi) \setminus \{0\} \\ 0, & x = k\pi \end{cases}$ e ímpar em $[-\pi, \pi]$

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi + \varepsilon, \pi + 2k\pi - \varepsilon]$ e em $[-\pi + 2k\pi + \varepsilon, 2k\pi - \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$ (teo. conv. pontual) e também para 0 em $2k\pi$ (por ser ímpar).

(i) Exercício 60d

podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f em $[2k\pi - 1 + \varepsilon, 2k\pi + 1 - \varepsilon]$ e em $[2k\pi + 1 + \varepsilon, 2k\pi - 1 + 2\pi + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$), e converge para 0 em $0 + 2k\pi$ e também em $\pi + 2k\pi$ e para $\frac{1}{4}$ em $\pm 1 + 2k\pi$.

62. Usando os Exercícios 60d, 60b e 61, calcule o valor das séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ $= \frac{\pi - 1}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$ $= \frac{\pi}{2} - 1$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $= \frac{\pi^2}{8}$

63. Usando o Exercício 60c e a identidade de Parseval calcule o valor da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad = \frac{\pi^2}{6}$$

64. Considere *(tarefa!)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, \pi]. \end{cases}$$

(a) Calcule a série de senos $S_{f,s}$ de f (estenda de forma conveniente f a $[-\pi, \pi]$)

(b) Para onde convergem $S_{f,s}(1)$, $S_{f,s}(-2)$, $S_{f,s}(2\pi)$? Justifique.

Resp.: $S_{f,s}(1) = \frac{1}{2}$, $S_{f,s}(-2) = -1$, $S_{f,s}(2\pi) = 1$

(c) Descreva o limite pontual e determine onde o limite é uniforme da série calculada.

(d) Desenhe os gráficos da função usada em (a) estendida 2π-periodicamente e da função $S_{f,s}$ (limite pontual da série calculada).

65. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e ímpar, que em $[0, \pi)$ é dada pelas funções a seguir: *(tarefa!)*

(a) $f(x) = 25$,

(b) $f(x) = \sin(x)$,

(c) $f(x) = x$,

(d) $f(x) = \cos(x)$,

(e) $f(x) = x^2$.

Resp.: (b) $S_f(x) = \sin(x)$, (d) $S_f(x) = 0$,

66. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e par, que em $[0, \pi]$ é dada pelas funções do Exercício 65. Compare os resultados.

(tarefa!)

Resp.: (b) $S_f(x) = 0$, (d) $S_f(x) = \cos(x)$,

A26 Aplicação: usando séries de Fourier para resolver PVIF de EDP

67. Determine a solução por séries de Fourier do PVIF abaixo

(a)

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0, \pi),\ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi, t) & \text{para } t \geq 0 \\ u(x, 0) = x & \text{para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = ??, \quad \lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = ??$$

É um PVIF para equação do calor/extremos isolados/Neumann e a **solução** é:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-2(2n+1)^2 t} \cos((2n+1)x)$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = 0$$

(b)

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & \text{para } x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = -2, u(\pi,t) = 2 & \text{para } t \geq 0 \\ u(x,0) = -2 & \text{para } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = ??, \qquad \lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = ??$$

É um PVIF para equação do calor/extermos não isolados/Dirichlet não homogênea e a **solução generalizada** (note que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ não é convergente) é:

$$u(x,t) = \frac{4x}{\pi} - 2 + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-4n^2 t} \sin(nx)$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) = \frac{4x}{\pi} - 2, \quad \lim_{t\to\infty} u_x(x,t) = \frac{4}{\pi}$$

68. Resolva a equação do calor *(tarefa!)*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{em } (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) & \text{para } t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{para } x \in (0,\pi) \end{cases}$$

sendo $f(x)$ cada uma das funções do Exercício 65 (use os resultados do Exercício 65).

69. Resolva a equação do calor nos casos do exercício anterior, substituindo a condição de extremos a temperatura costante $u(0,t) = 0 = u(\pi,t)$, pela condição de extremos isolados $u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t)$ (use os resultados do Exercício 66) *(tarefa!)*

70. Para os problemas nos Exercícios 68 e 69, para onde converge a solução quando $t \to \infty$? Compare os resultados.
discuta a convergência uniforme de $u(x,0)$, $u(x,1)$ e $u_x(x,1)$. *(tarefa!)*

Resp.: Nos casos do Ex. 68 a solução generalizada tende a zero e nos casos do Ex. 69 a solução generalizada tende a media

Fim do curso! *Bons estudos!*

Conteúdo

Lista dos teoremas

A1.1 Exemplo (Indução) A5
A1.2 Exemplo (Inf e Sup) A6
A1.3 Exemplo (P.to de acumulação) . A6
A2.1 Exemplo A7
A2.2 Teorema (**de confronto**) A9
A2.3 Exemplo (Sequência geométrica) A9
A2.4 Teorema A10
A2.5 Teorema (Limite f por sequências) A10
A2.6 Teorema A10
A2.7 Exercício A12
A2.8 Exemplo A12
A2.9 Teorema (Limsup e liminf) A14
A2.10 Teorema (Teorema de Bolzano-Weiestrass) A14
A2.11 Teorema (Seq. de Cauchy) A14
A2.12 Exercício A15
A3.1 Exemplo A16
A3.2 Exemplo (Série geométrica) A16

A3.3 Exercício (Teorema da contração) A16
A3.4 Teorema (Cond necessária para convergência) A17
A4.1 Observação A18
A4.2 Teorema (Confronto) A18
A4.3 Corolário (Confronto assintótico) A18
A4.4 Exercício A18
A4.5 Exemplo A18
A4.6 Observação A19
A4.7 Exercício A19
A4.8 Teorema (Critério da razão) . . . A19
A4.9 Teorema (Critério da raiz) . . . A19
A4.10 Corolário A19
A4.11 Exercício A19
A4.12 Exercício A20
A4.13 Observação (confronto integral) . A21
A4.14 Corolário A21
A4.15 Exercício A21
A5.1 Definição A22
A5.2 Teorema (Conv. absoluta) A22
A5.3 Exemplo A22
A5.4 Teorema (Critério de Leibnitz) . A23

A5.5 Exemplo A23
A5.6 Teorema (Critério de Dirichlet) . A23
A5.7 Exemplo A23
A5.8 Teorema (Comutação) A24
A5.9 Exemplo A24
A7.1 Exemplo A26
A7.2 Exemplo A27
A7.3 Observação (def. conv. unif. vs pont.) A29
A7.4 Proposição A29
A7.5 Exemplo A29
A7.6 Teorema (seq. unif. de Cauchy) . A31
A7.7 Teorema (Troca limites e integral) A31
A7.8 Teorema (Troca limite com derivada) A32
A7.9 Observação A32
A7.10 Observação A32
A8.1 Exemplo A34
A8.2 Teorema (Teste M de Weiestrass) A35
A8.3 Observação A35
A8.4 Teorema (Troca limite e integral com série) A36

A8.5 Teorema (Troca série com derivada) A36
A8.6 Exercício A37
A9.1 Observação A37
A9.2 Teorema (Raio de conv,) A38
A9.3 Exemplo A38
A9.4 Teorema (Critério da raiz) A39
A9.5 Teorema (Critério da razão) . . . A39
A9.6 Teorema (Conv unif.) A39
A9.7 Teorema (de Abel) A40
A9.8 Corolário (Continuidade SDP) . A40
A9.9 Teorema (Integral SDP) A41
A9.10 Teorema (Derivada SDP) A41
A9.11 Corolário (Derivadas SDP) A41
A9.12 Observação A41
A9.13 Teorema (Unicidade SDP) A42
A9.14 Exemplo (Várias SDP) A43
A9.15 Exemplo A45
A10.1 Teorema (**P.d.T. com resto de Lagrange**) A46
A10.2 Teorema (Série de Taylor) A46
A10.3 Observação A47

A10.4 Definição (Funç. analítica.) A47
A10.5 Exemplo A47
A10.6 Teorema (Cond.suf. para analiticidade) A47
A10.7 Corolário A48
A10.8 Exemplo (Exponencial complexa) A49
A10.9 Exemplo (Séries binomiais) A51
A11.1 Observação A52
A11.2 Exemplo A55
A11.3 Observação (Série de cossenos/senos) A55
A11.4 Teorema (Convergência em L^2, Bessel, Parseval) A57
A11.5 Teorema (Convergência pontual) A63
A11.6 Exemplo A63
A11.7 Teorema (Convergência uniforme) A63
A11.8 Teorema A64
A11.9 Exemplo A65
A14.1 Observação (Soma finita ou infinita) A73
A14.2 Teorema (Solução PVIF para equação do calor) A73

A14.3 Teorema (Solução PVIF para equação da onda) A73
A14.4 Observação A73
A14.5 Observação A74
A14.6 Observação (Solução Generalizada) A74
A14.7 Observação (Interpretação física da solução do PVIF para a equação do calor) A82