Lista 8 - Índice, Singularidades, Teorema do Resíduo, Teorema de Rouché

SMA5729 - Funções de uma variável complexa

01/02/2010

1. Seja f uma função analítica e que não se anula em algum domínio Ω. Prove que existe um ramo de $\log f(z)$ em Ω se e somente se para todo caminho γ fechado, suave por partes em Ω, o caminho $\beta = f \circ \gamma$ "não dá volta na origem", isto é, $n(\beta, 0) = 0$. (Note que $n(\beta, 0) = 0$ é equivalente à $\int_\gamma f'(z)/f(z)dz = 0$.)

2. Dizemos que uma função tem *singularidade isolada em* ∞ se, para algum $R > 0$, f é analítica em $\Omega = \{z : |z| > R\}$. Dizemos que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tem uma *singularidade removível, um pólo ou uma singularidade essencial em* ∞ se $f(1/z)$ tem, respectivamente, uma singularidade removível, um pólo ou uma singularidade essencial em 0. Se f tem pólo em ∞, então a ordem do pólo é a ordem do pólo de $f(1/z)$ em 0. Definimos $\text{Res}\,(f, \infty) := -a_{-1}$. Prove que:
(a) Uma função inteira tem singularidade removível em ∞ se e somente se ela é constante.
(b) Uma função inteira tem pólo de ordem m em ∞ se e somente se ela é um polinômio de grau m. (c) Se f tem uma singularidade isolada em ∞, então $\text{Res}\,(f(z), \infty) = -\text{Res}\,(f(1/z)/z^2, 0)$.

3. Se f é uma função inteira, então f é um polinômio ou tem uma singularidade essencial em ∞.

4. Se f é uma função inteira tal que $|f(z)| \to \infty$ quando $|z| \to \infty$, então $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

5. Enuncie uma versão para o Teorema de Casorati-Weierstrass quando f tem singularidade essencial em ∞.

6. Verifique que:
a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$ *b)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\log x)^3}{x^2+1}\, dx = 0$

7. Use o Teorema de Rouché para demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra: Se p é um polinômio de grau n então p tem exatamente n raízes, contando a multiplicidade.

8. Seja $\lambda > 1$. Mostre que a equação $\lambda - z - e^{-z} = 0$ tem exatamente uma solução em $\{z : \mathcal{R}\text{e}\,(z) > 0\}$.

9. Seja $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$. Mostre que f tem três de suas raízes em $B(0, 1)$ e todas suas raízes em $B(0, 5/2)$.

10. Seja $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ um polinômio de grau $N \geq 2$ tal que $\sum_{n=2}^N n|a_n| \leq |a_1|$. Prove que f é injetora em $B = B(0, 1)$. (Sugestão: Note que $a_1 \neq 0$ e então fixado $w \in B$ compare o número de zeros das funções $g(z) = a_1(z - w)$ e $h(z) = f(z) - f(w)$ em B.)