Lista 7 - Índice, Teorema de Cauchy, Teorema da aplicação aberta, Singularidades

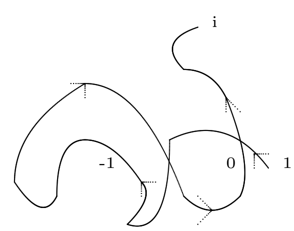
SMA5729 - Funções de uma variável complexa

27/01/2010

1. Sejam γ um caminho fechado, suave por partes em $\mathbb{C}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $f(a) = n(\gamma, a)$. Mostre que f é contínua.

2. Sejam $\alpha(t) = e^{it}$, $\beta(t) = (5/3) + e^{it}$ e $\gamma(t) = -1 + 2e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$.
   Determine se σ é homólogo a zero no domínio D:
   a) $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma), D = \mathbb{C} \setminus \{2i, -2i\}$;
   b) $\sigma = (\alpha, \alpha, -\beta, -\gamma), D = \{z : 1/5 < |z| < 5\}$;
   c) $\sigma = (\alpha, -\beta, \gamma), D = \mathbb{C} \setminus \{i\sqrt{2}\}$;
   d) $\sigma = (\alpha, -\beta), D = \mathbb{C} \setminus \{3/4, 2\}$.
   Determine se os ciclos σ e ρ são homólogos em D:
   a) $\sigma = (\alpha, \beta), \rho = (\alpha, \gamma), D = \mathbb{C} \setminus [-5/2, -2]$;
   b) $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma), \rho = (\gamma, \gamma, \beta), D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. Calcule $\displaystyle\int_\gamma (z^2 + z + 1)(z^3 + z^2)^{-1} dz$, onde γ é o caminho da figura abaixo.



4. Sejam $\alpha(t) = e^{-it}$ e $\beta(t) = 3\cos t + i\,\mathrm{sen}\, t$ para $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. Se $\gamma = \alpha + \beta$, calcule:
$$\int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z(z-2)^2(z-4)}\, dz.$$
   Resposta: $-\pi i/4$.

5. Seja $\gamma = [i, -1 - i] + [-1 - i, 1/2] + \beta + [-1/21 - i] + [1 - i, i]$, onde $\beta(t) = e^{it}/2$, $t \in [0, \pi]$. Calcule:
$$\int_\gamma \frac{\operatorname{Arcsen} z}{z^4 + 2z^2}\, dz.$$
   Resposta: $2\pi i$.

6. Seja f uma função contínua num domínio $D \setminus \mathbb{C}$. Se $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo caminho fechado suave por partes γ em D, então f tem uma primitiva em D. (Sugestão: fixe $w_0 \in D$ e defina $F(z) = \displaystyle\int_\alpha f(w)\, dw$, onde α é um caminho em D com ponto inicial w_0 e ponto final z).

7. Calcule:

   a) $\displaystyle\int_{\partial R} \frac{1}{z-a} dz$, onde R é um retângulo fechado com centro em a.

   b) $\displaystyle\int_{\partial R} \frac{1}{z-w} dz$, onde R é um retângulo fechado e w não pertence a ∂R.

   (No item a) a idéia é que vocês comprovem que de fato o valor da integral é $2\pi i$ sem usar o conceito de índice de curva, caso contrário o exercício pode tornar-se imediato! :-) Por exemplo, tente usar Teorema de Cauchy)

8. Seja $f(z) = c(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_r)^{m_r}$, onde $c, z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ são tais que $c \neq 0$, $z_j \neq z_k$ para $j \neq k$ e $m_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Prove que existe um ramo de $\operatorname{Log} f$ em um domínio $D \subset \mathbb{C}$ se, e somente se,

   $$\sum_{j=1}^{r} m_j n(\gamma, z_j) = 0,$$

   para todo caminho fechado e suave por partes γ em D.

9. Seja f uma função analítica num domínio D. Se existe um ponto $w \in D$ tal que $f^{(n)}(w) = 0$ para todo inteiro positivo n, então f é constante. (Sugestão: considere $U = \{z \in D : f^{(n)}(z) = 0, n \geq 1\}$ e $V = D \setminus U$ e use a conexidade de D.

10. Encontre a série de Laurent das funções $f(z) = 1/z$ e $g(z) = 1/z^2$ no anel $D = \{z : 1 < |z - i| < \infty\}$.