USP/ICMC/SMA

6a Lista de Exercícios de SMA354 - Cálculo II - 08.11.2017

Exercício 1. (a) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.
(b) Verifique que f satisfaz a equação de Laplace

$$\Delta f = 0,$$

sendo $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. (Uma função que satisfaz a equação de Laplace é chamada harmônica.)

Exercício 2. Se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções de classe C^2 e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

mostre que u e v são funções harmônicas.

Exercício 3. Seja $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$, onde a é uma constante real e f e g são funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até segunda ordem. Mostre que $u(x,t)$ satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Exercício 4. Suponha que $u(x,t)$ satisfaça

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

(a) Verifique que $v(r,s) = u(x,t)$, onde $x = r+s$ e $t = r-s$, satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r} = 0.$$

(b) Determine funções $u(x,t)$ que satisfaçam (1).

Exercício 5. Seja $v(r,\theta) = u(x,y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Exercício 6. Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções cujas leis são dadas por:

(1) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
(2) $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
(3) $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$
(4) $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$

Exercício 7. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ mais próximo da origem.

Exercício 8. Encontre o ponto de máximo e o ponto de mínimo que $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$ assume no quadrado $[0,\pi/2] \times [0,\pi/2]$. Dê os valores de máximo e mínimo de f neste quadrado.

Exercício 9. Em um laboratório foram obtidas, experimentalmente, as seguintes medidas:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0, \quad v_1 = 2; \\ t_2 &= 1, \quad v_2 = 8; \\ t_3 &= 2, \quad v_3 = 11. \end{aligned}$$

Determine os coeficientes a e b da função $v(t) = at + b$ de modo a minimizar a soma dos erros quadráticos, isto é, $e_1^2 + e_2^2 + e_3^3$, onde $e_i = v(t_i) - v_i, \ i = 1,2,3$.

Exercício 10. Sobre a elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ determine todos os pontos onde $f(x, y) = xy$ assume seus valores extremos.

Exercício 11. Encontre as dimensões da lata cilíndrica reta fechada de menor área superficial cujo volume é $16\pi\text{cm}^3$.

Exercício 12. Encontre as dimensões da caixa retangular fechada com máximo volume que pode ser inscrita na esfera unitária.

Exercício 13. Encontre os valores extremos de $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ na interseção do plano $z = 1$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

Exercício 14. Uma placa metálica circular com um metro de raio está posicionada com seu centro na origem do plano xy e tem temperatura variável, incluindo os pontos de sua fronteira. A temperatura num ponto (x, y) da placa é mantida a $T(x, y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)^o\text{C}$, com x e y em metros. Encontre os valores de maior e de menor temperatura desta placa.