Lista 6 - Integração, Zeros, Teorema do Módulo Máximo

SMA5729 - Funções de uma variável complexa

14/01/2010

1. Prove que se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ é retificável e $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ é uma função contínua não decrescente e sobrejetora, então $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{C}$ é um caminho com o mesmo traço de γ.

2. Prove que $f(z) = |z|^2$ não tem primitiva de duas formas:
a) Usando as equações de Cauchy-Riemann;
b) Usando as integrais $\int_\gamma f$ e $\int_\sigma f$, onde γ e σ são dois polígonos $[1, i]$ e $[1, 1+i, i]$.

3. Seja f uma função analítica em $B(a,r)$ tal que $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$, para todo $z \in B(a,r) \setminus \{a\}$. Prove que f é injetora.

4. a) Se $\gamma(t) = e^{1+it}$ para $t \in [0, \pi]$, mostre que
$$\left| \int_\gamma (\text{Log}\, z)^{-1} dz \right| \leq e \text{ Log}\,(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}).$$
b) Seja $r > 0$. Se $\gamma(t) = re^{it}$ para $t \in [0, \pi/4]$, mostre que
$$\left| \int_\gamma e^{iz^2} dz \right| \leq \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}.$$
(Se precisar: $\text{sen}\, a \geq 2a/\pi$.)

5. Seja $n \geq 1$. Prove que a função $f(z) = a + nz + z^n$, $|z| < 1$, é injetora.

6. Sejam D um domínio e f uma função n-vezes diferenciável em D. Se $f^{(n)}(z) = 0$, $z \in D$, então f é uma função polinomial em D de grau no máximo $n-1$. (Sugestão: prove por indução.)

7. Seja f uma função continuamente inteira tal que $g(z) = \sqrt{f(z)}$ (raiz principal) também seja uma função inteira. Mostre que f dever ser constante. (Sugestão: considere a função $\varphi(z) = g(z) + 1$.)

8. Se f é uma função continuamente inteira não constante, prove que a imagem $f(\mathbb{C})$ de f deve quase "completar"o plano complexo no seguinte sentido: para todo $w_0 \in \mathbb{C}$ e todo $r > 0$, a imagem de f tem intersecção não vazia com $B(w_0, r)$.

9. Seja $f = u + iv$ uma função continuamente inteira tal que $u(z) \leq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Prove que f é constante.

10. Seja f uma função continuamente inteira tal que $|f'(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z) = az^2/2 + c$, com $|a| \leq 1$ e $c \in \mathbb{C}$.

11. Se f é uma função continuamente inteira satisfazendo $|\mathcal{I}\text{m}\, z||f(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$, então f é constante. (Sugestão: mostre que $|(z^2 - R^2)f(z)| \leq 2\sqrt{2}R$ quando $|z| = R$.)

12. Seja $f(z) = z^2 - 2z$. Calcule o valor máximo de $|f(z)|$ no quadrado $Q = \{z : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

13. Sejam D um domínio limitado e $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ uma função contínua não constante continuamente analítica em D. Mostre que se $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$ então $f(z_0) = 0$ para algum $z_0 \in D$.

14. Generalize o exercício anterior como segue: Sejam D um domínio limitado e $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ uma função contínua não constante continuamente analítica em D. Mostre que se $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$ então $f(D) = B(0,1)$. (Sugestão: mostre que um ponto arbitrário $c \in B(0,1)$ pertence à $f(D)$ considerando a função $g(z) = (f(z) - c)/(1 - \overline{c}f(z))$.)