USP/ICMC/SMA

5a. Lista de Exercícios de SMA354 - Cálculo II - 09.10.2017

Exercício 1. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:

$(a)\ f(x,y)=\dfrac{2x^4-xy+1}{xy}$ $\quad (b)\ f(x,y)=\arctan x/y$ $\quad (c)\ f(x,y)=sen(x^2-y^3)$

$(d)\ f(x,y)=\displaystyle\int_x^y g(t)dt$ $\quad (e)\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^3-z^4}$ $\quad (f)\ f(x,y,z,u,v)=xyzu^2v^4$

Exercício 2. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$ para $f(x,y)=x^{x^{x^y}}+\text{sen}(\pi x)[x^2+sen(x+y)+e^x cos^2 y]$.
Dica: Deve ser de fácil resolução.

Exercício 3. Seja $f(x,y)=2x+3y^2$.
(a) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva que está na intersecção do gráfico de f com o plano $x=2$, no ponto $(2,1,f(2,1))$.
(b) Idem para quando a curva que está na intersecção do gráfico com o plano $y=-1$, no ponto $(2,3,f(2,3))$.
(c) Mostre que f é diferenciável no ponto $(2,-1)$ e determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,-1,f(2,-1))$.

Exercício 4. Verifique em que região, do plano ou espaço, conforme o caso, as funções abaixo são diferenciáveis. Justifique sua resposta.

$(a)\ f(x,y)=3x^3+y^3$ $\quad (b)\ f(x,y)=cos(xy)$ $\quad (c)\ f(x,y)=\tan(x+y)$

$(d)\ f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ $\quad (e)\ f(x,y)=\sqrt{1-x^2+y^2}$ $\quad (f)\ f(x,y,z)=xyz/\sqrt{x^2-1}$.

Exercício 5. Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & se\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & se\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) f é contínua no $(0,0)$? Justifique.
(b) É contínua para $(x,y)\neq(0,0)$? Justifique.
(c) Existem $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$? Se sim, calcule-os.
(d) Calcule $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ para $(x,y)\neq(0,0)$.
(e) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.
(f) Verifique se f é diferenciável em $(x,y)\neq(0,0)$.

Exercício 6. Encontre o vetor gradiente de cada uma das funções:
(a) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (b) $f(x,y,z)=x\,\text{arctg}(y+z)$ (c) $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$.

Exercício 7. Considere a função f cuja lei é dada por $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
(a) Encontre a aproximação linear de $f(x,y,z)$ para (x,y,z) próximo de $(0,3,4)$.
(b) Obtenha o valor aproximado de $\sqrt{(0,01)^2+(3,02)^2+(3.97)^2}$. Faça a análise sem o uso da calculadora e depois use-a para comparar seu resultado.

Exercício 8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ função diferenciável em toda reta. Seja $u(x,y)=f(x-cy)$ onde c é constante dada. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de u e então mostre que u satisfaz a equação de transporte $u_y+cu_x=0$.

Exercício 9. Seja $z(t)=f(x(t),y(t))$ onde $f(x,y)$ é diferenciável no plano e $x(t),y(t)$ são deriváveis num intervalo $]a,b[$.
(a) Calcule $\frac{dz}{dt}$.
(b) Derive $z(t)$ para os casos:
(i) $z=\tan(x^2+y)$ onde $x=2t$, $y=t^2$.
(ii) $z=x/y$ onde $x=e^{-t}$ e $y=\ln t$.

Exercício 10. (a) Se $h(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$, onde $f(x,y),x(u,v)$ e $y(u,v)$ são diferenciáveis em todo plano, obtenha as expressões para $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial v}$. Aplique para cada caso abaixo:

(b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ onde $x(u,v) = u - v$ e $y(u,v) = u + v$
(c) $f(x,y) = 1 - 4x^2 + 9y^2$ onde $x(u,v) = 2ucosv$ e $y(u,v) = 3usenv$

Exercício 11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$
(a) Mostre que f é diferenciável em todo $(x,y) \neq (0,0)$.
(b) Seja $v = (\alpha, \beta)$ vetor unitário. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
(c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.
(d) Mostre que f não é contínua em $(0,0)$.
(e) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 12. Em cada item, calcule a derivada direcional de f na direção de v e no ponto P:
(a) $f(x,y) = xy - x + y$, $v = (1,1)$ $P = (1,1)$
(b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^4 + 4)$, $v = (1/\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, $P = (1,0)$
(c) $f(x,y,z) = \dfrac{x - e^y}{x^2 + y^4 + 1}$, $v = (2,2,0)$, $P = (1,1,1)$.

Exercício 13. Encontre a direção em que f decresce mais rapidamente, a partir de P nos três casos do exercício anterior.

Exercício 14. Determine as retas normal e tangente à curva $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ no ponto $(1,2)$.

Exercício 15. Verifique se existem pontos sobre a curva $x^2 - y^2 = 1$ nos quais a reta tangente seja paralela à reta dada por $y = 2x$. Caso existam, determine-os.

Exercício 16. (a) Encontre o plano tangente à superfície $x + y^2 + z = 4$ no ponto $P_0 = (1,1,2)$.
(b) Determine o plano tangente à superfície $x^3 + y^3 + z^3 = 10$ no ponto $P_0 = (1,1,2)$.

Exercício 17. Verifique se existe(m) ponto(s) na esfera $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tal que o plano tangente a S neste(s) ponto(s) seja paralelo ao plano $3x - y + z = 7$. Caso exista(m), determine-o(s).

Exercício 18. Mostre que a se as funções $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções com derivadas de segunda ordem contínuas em $\mathbb{R}$, então a função $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$u(t,x) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct), \text{ para } (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

satisfaz a equação da onda unidimensional, isto é, a equação diferencial

$$u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x), \text{ para } (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $c > 0$ é uma constante fixada.

Exercício 19. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções do Exercício 1.

Exercício 20. Mostre que $U(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-x}\operatorname{sen} y$ satisfaz a chamada **equação de Laplace** $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

Exercício 21. Mostre que $u(x,t) = e^{-25t}sen5x$ é solução da **equação do calor** $u_t = u_{xx}$.

Exercício 22. Para cada $(x,y) \neq (0,0)$ calcule $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$ onde $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.