USP/ICMC/SMA

Lista 4 de Exercícios de SMA354 - Cáculo II - 28.09.2017

Exercício 1. Descreva o domínio e a imagem de f:

$(a)\ f(x,y) = 2x - y^2$ $\quad (b)\ f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 + y^2}$ $\quad (c)\ f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y} - 1}{x+y-1}$

$(d)\ f(x,y,z) = \dfrac{x-z}{x^2+y^2}$ $\quad (e)\ f(x,y,z) = \ln(x+y+z+1)$.

Exercício 2. Esboce os gráficos das funções abaixo (reconheça todos os gráficos, exceto um, como superfícies dadas por ou contidas em quádricas, identificando-as):

$(a)\ f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$ $\quad (b)\ f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 3$ $\quad (c)\ f(x,y) = 3$

$(d)\ f(x,y) = -x - 3y + 3$ $\quad (e)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad (f)\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + 1$

$(g)\ f(x,y) = x + 2$ $\quad (h)\ f(x,y) = e^x + 2$

Exercício 3. Em cada item, esboce no mesmo plano coordenado as curvas de nível $f(x,y) = c$ para $c \in \{-1, 0, 4\}$:

$(a)\ f(x,y) = xy$ $\quad (b)\ f(x,y) = \ln(xy)$ $\quad (c)\ f(x,y) = 4 - (x-1)^2 - (y+3)^2$

$(d)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2/2}$ $\quad (f)\ \ f(x,y) = e^x/(2y)$.

Exercício 4. Descreva a superfície de nível $f(x,y,z) = c$ para $c \in \{-1, 0, 4\}$:

(a) $f(x,y,z) = e^x/(2y)$ $\quad$ (b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Exercício 5. Ache a equação do conjunto de nível de f que passe pelo ponto P dado:

(a) $f(x,y) = y \arctan x,\ P = (1,4)$ $\quad$ (b) $f(x,y,z) = z^2 y + x,\ P = (1,4,-2)$

(c) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1+t^2},\ P = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Exercício 6. (a) Encontre alguma função (especificando seu domínio, contradomínio e sua lei), que tenha a reta de equação $y = 3x - 4$ como uma curva de nível.

(b) O mesmo para a curva dada pela equação $y = 3/x^2$.

Exercício 7. Se $T(x,y)$ d a temperatura num ponto (x,y) sobre uma placa delgada de metal no plano-x,y, então as curvas de nível de T são chamadas de curvas isotérmicas (todos os pontos sobre cada uma dessas curvas possuem a mesma temperatura). Suponha que uma placa ocupe o primeiro quadrante e $T(x,y) = xy$.

(a) Esboce as curvas isotérmicas de temperaturas $T = 1$, $T = 2$ e $T = 3$.

(b) Uma formiga, inicialmente no ponto $(1,4)$, se move sobre a placa de modo que a temperatura ao longo de sua trajetória permanece constante. Qual é essa trajetória, e qual é a temperatura correspondente?

Exercício 8. Os pontos de uma chapa plana de metal estão marcados no plano-x,y de modo que a temperatura T no ponto (x,y) é inversamente proporcional à distância do ponto a origem.

(a) Qual é a lei $T(x,y)$ que descreve a temperatura da chapa acima?

(b) Descreva as isotérmicas, isto é, as curvas de nível da função temperatura.

(c) Se a temperatura no ponto $P = (4,3)$ é de $40^o C$, ache a equação da isotérmica para uma temperatura de $20^o C$.

Exercício 9. Duas curvas de nível podem se interceptar? Justifique sua resposta.

Exercício 10. Use a definição de limite para mostrar que:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{x+y+5}{2} = \dfrac{x_0+y_0+5}{2}$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 2x - 3y + 4 = -3$

(c) Se $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} kf(x,y) = kL$, onde k é uma constante qualquer real.

Exercício 11. Use as propriedades de limite para calcular:

$(a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ $\quad(b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2}{3+xy}$ $\quad(c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

$(d)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x-y-z}$ $\quad(e)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,2)} xz - xy - 2xzy$ $\quad\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,4)} \left|\dfrac{x-y}{x+xy+y^2z}\right|$.

Exercício 12. Verifique se os resultados abaixo são verdadeiros, justificando sua resposta.

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y} = 0$ $\quad$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^2}{x^2+y} = 0$ $\quad$ (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-1}{x+y-1} = 2$

Exercício 13. Verificar se os limites abaixo existem. Justifique sua resposta.

$(a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad(b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|xy|}$ $\quad(c)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x+5y}{x-y^2+z}$

$(d)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{y-1}{\sqrt{x^2-2x+y^2-2y+2}}$ $\quad(e)\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{x^2-4x+4}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad(f)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^4}}$

Sugestão: Em (b) esboce o gráfico da função. É fácil!

Exercício 14. Para as funções f cujas leis são dadas abaixo, verifique se são limitadas em seu domínio de definição. Caso f não seja limitada, verifique por qual sequência de pontos ela cresce (ou decresce) arbitrariamente:

$(a)\ f(x,y) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}$ $\quad(b)\ f(x,y) = x/(\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad(c)\ f(x,y) = \ln(x+y)$

$(d)\ f(x,y,z) = \dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad(e)\ f(x,y,z) = \cos(\dfrac{xyz^9}{\sqrt{x-y}})$ $\quad(f)\ f(x,y,z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^4}$

$(g)\ f(x,y) = \dfrac{x^8}{x^8+y^8}$ $\quad(h)\ f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{x^8+y^8}$ $\quad(i)\ f(x,y) = \dfrac{x^5y^3}{x^8+y^8}$

$(j)\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^4}$ $\quad(k)\ f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^4}$ $\quad(l)\ f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^4}$

$(m)\ f(x,y) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $\quad(n)\ f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

Exercício 15. Veja se é possível utilizar o Teorema do Confronto (ou Sanduíche) para o cálculo dos limites abaixo (O exercício anterior será útil). Para os casos em que não é possível utilizar o teorema, verifique se o limite não existe.

$(a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad(b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad(c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$(d)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad(e)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad(f)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

$(g)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2})$ $\quad(h)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,2)} \dfrac{x}{x-y}$ $\quad(i)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4\operatorname{sen}(x^2+y^3)}{x^4+y^4}$

$(j)\ \lim\limits_{(x,y,x)\to(1,0,0)} \dfrac{x-1}{(x-1)^2+|y|+|z|}$ $\quad(k)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $\quad(l)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

Exercício 16. Descreva os pontos onde f é contínua. Faça também o esboço do domínio $D(f)$:

$(a)\ f(x,y)=\ln(x+y-1)$ $\quad(b)\ f(x,y)=\sqrt{x}e^{xy}$ $\quad(c)\ f(x,y)=\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2+y^2}$

$(d)\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ $\quad(e)\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{x+y+z}$ $\quad(f)\ f(x,y,z)=\tan(xyz)$

Exercício 17. Verifique se cada uma das leis abaixo define uma função contínua em todo o $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ (d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}, & se\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & se\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

(f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2\operatorname{sen}^2(y)}{x^2+2y^2-2x+1}, & se\ \ (x,y)\neq(1,0) \\ 0, & se\ \ (x,y)=(1,0)\end{cases}$