Quarta lista de exercícios da disciplina

SMA0353- Cálculo I

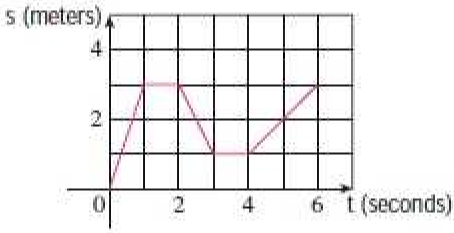
Exercícios da Seção 2.7

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
   (a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
   (b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$.
   (b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
   (c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que a parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

3. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ no ponto $(3, 2)$.

4. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?
   (b) Trace um gráfico da função velocidade.



5. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

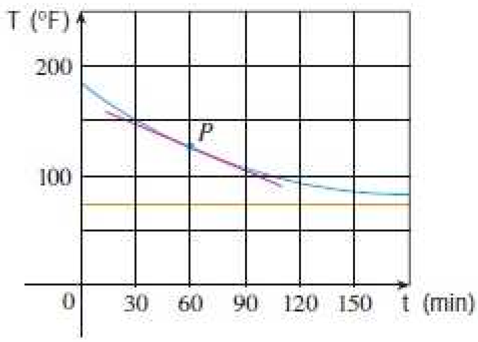
6. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar equações das retas tangentes à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos $(2, 8)$ e $(3, 9)$.

   (b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes no mesmo gráfico.

7. Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga quem são f e a em

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}.$$

8. Um peru assado é tirado do forno quando sua temperatura atinge $85^0 C$ e colocado sobre uma mesa na sala, na qual a temperatura é de $24^0 C$. O gráfico mostra como decresce a temperatura do peru até aproximar da temperatura da sala. (Na Seção 3.8 poderemos usar a Lei do Resfriamento de Newton para encontrar uma equação para T como uma função do tempo.) Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



9. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$.

   (a) Encontre a taxa média de variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando

   (i) de $x = 100$ a $x = 105$; (ii) de $x = 100$ a $x = 101$.

   (b) Encontre a taxa instantânea de variação de C em relação a x quando $x = 100$.

10. O número de bactérias depois de t horas em um laboratório experimental controlado é $n = f(x)$.

(a) Qual o significado da derivada de $f'(5)$? Quais são suas unidades?

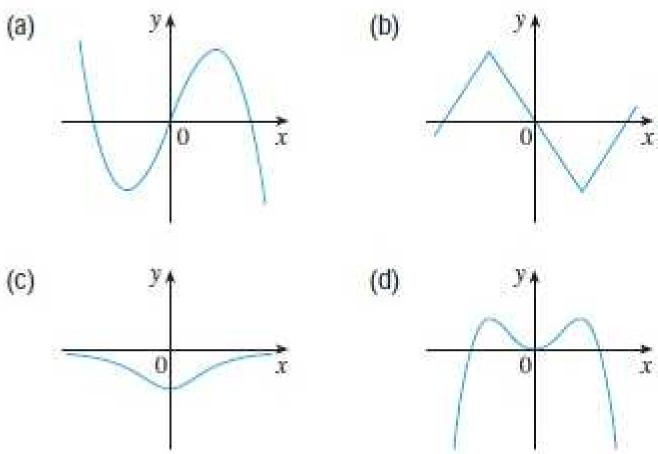
(b) Suponha que haja uma quantidade ilimitada de espaço e nutrientes para a bactéria. Qual será maior: $f'(5)$ ou $f'(10)$? Se a oferta de nutrientes for limitada, isso afetaria sua conclusão? Explique.

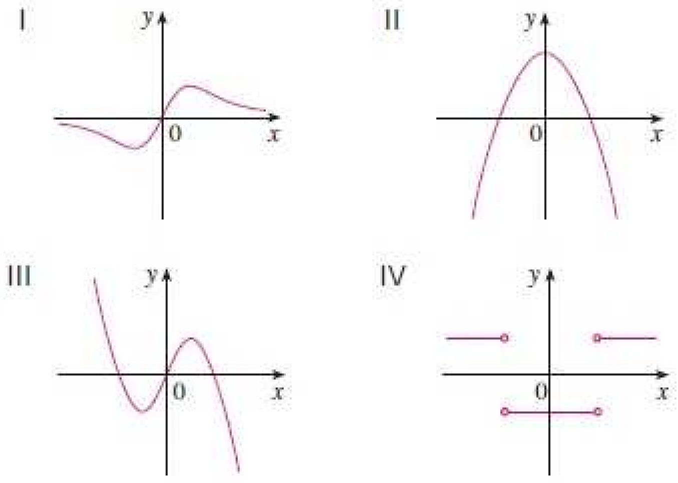
11. Determine se existe ou não $f'(0)$ para

$$f(x) = \begin{cases} x\,sen\,\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

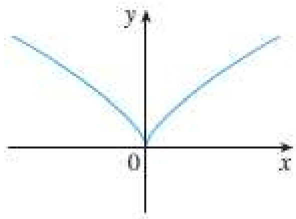
Exercícios da Seção 2.8

12. Associe o gráfico de cada função em (a)-(d) com o gráfico de sua derivada em I-IV. Dê razões para suas escolhas.





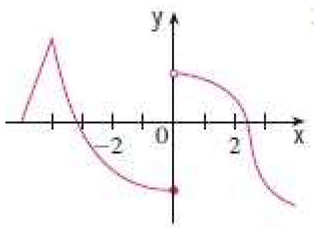
13. Trace ou copie o gráfico da função f dada. (Suponha eixos com a mesma escala.) Use então o método do Exemplo 1, da Seção 2.8 do livro do Stewart, para esboçar o gráfico de f'.



14. Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada:

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

15. O gráfico de f é dado. Diga, explicando quais, os números em que f não é diferenciável.



16. A derivada **à esquerda** e **à direita** de f em a são definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.

(a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0; \\ 5 - x, & \text{se } 0 < x < 4; \\ \dfrac{1}{5-x}, & \text{se } x \geq 4. \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.

Exercícios da Seção 3.1

17. Derive as funções a seguir:

(a) $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$; (b) $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$.

18. Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva $y = x^4 + 2e^x$ no ponto $(0, 2)$.

19. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

20. Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

21. Ache as equações de ambas as retas que passam pelo ponto $(2, -3)$ e que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.

22. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

23. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 2; \\ mx + b, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornem f derivável em toda a parte.

24. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

Exercícios da Seção 3.2

25. Encontre a derivada de $y = (x^2+1)(x^3+1)$ de duas maneiras: usando a Regra do Produto e fazendo primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

26. Derive:

(a) $y = (r^2 - 2r)e^r$; (b) $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{c}{x}}$.

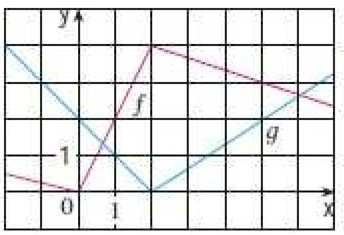
27. Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{e^x}{x}$ no ponto $(1, e)$.

28. Suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os valores de

(a) $(fg)'(5)$; (b) $(f/g)'(5)$; (c) $(g/f)'(5)$.

29. Se f e g forem funções cujos gráficos estão ilustrados, seja $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$.

(a) Encontre $u'(1)$. (b) Encontre $v'(5)$.



30. Quantas retas tangentes à curva $y = x/(x + 1)$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

Exercícios da Seção 3.3

31. Derive:

    (a) $g(t) = t^3 cos\, t$; (b) $y = e^u(cos\, u + ku)$, onde $k = constante$;

    (c) $y = \dfrac{1 + sen\, x}{x + cos\, x}$.

32. Prove que $\dfrac{d}{dx}(cotg\, x) = -cossec^2\, x$.

33. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = \dfrac{1}{sen\, x + cos\, x}$ no ponto $(0, 1)$.

34. Para quais valores de x o gráfico de $f(x) = x + 2\, sen\, x$ possui uma tangente horizontal?

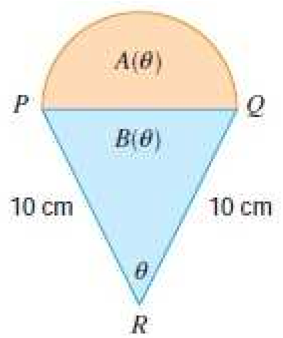
35. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede, e x a distância da base da escada até a parede. Se a base da escada escorregar para longe da parede, com que rapidez x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

36. Encontre o limite.

    (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, 3x}{x}$; (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, 4x}{sen\, 6x}$ (c) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{sen\, \theta}{\theta + tg\, \theta}$.

37. O semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ for a área do semicírculo e $B(\theta)$ a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$$



38. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}.$$