USP/ICMC/SMA

3a Lista de Exercícios de SMA354 - Cálculo II - 18.09.2017

1 *Faça um esboço do traço da curva parametrizada plana $f(t) = (x(t), y(t))$, onde as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são dadas a seguir, determinando primeiro uma relação entre x e y por eliminação da variável t. Por exemplo, Para $x(t) = t^2, y(t) = t - 3$ tem-se $x = (y+3)^2$. Inclua a orientação do traço em seu esboço.*
(a) $x(t) = t - 2$, $y(t) = 2t + 3$
(b) $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 - 1$
(c) $x(t) = 4t^2 - 5$, $y(t) = 2t + 3$
(d) $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{-2t}$
(e) $x(t) = t^2$, $y(t) = 2\ln t$
(f) $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \mathrm{sen} 2t$

2 *Faça o esboço do traço de cada curva parametrizada abaixo indicando a sua orientação:*
(a) $t \mapsto (sent, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(b) $t \mapsto (sen2t, \cos 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(c) $t \mapsto (5\cos t, 2sent)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(d) $t \mapsto (t, t^3)$, $t \in [-3, 3]$.
(e) $t \mapsto (t^4, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.
(f) $t \mapsto (\cos t, sent, 1)$, $t \in [0, \pi/2]$.
(g) $t \mapsto (\cos t, sent, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(h) $t \mapsto (\cos t, sent, \cos t)$, $t \in [0, 4\pi]$.
(i) $t \mapsto (2 - t, 3 + t, t)$, $t \in [0, 1]$.
(j) $t \mapsto (\cos 2t \cos t, \cos 2t sent)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(k) $t \mapsto ((2 + 2sent)\cos t, (2 + 2sent)sent)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(l) $t \mapsto ((2 + 2\cos t)\cos t, (2 + 2\cos t)sent)$, $t \in [0, 2\pi]$.
(m) $t \mapsto ((2 + 4\cos t)\cos t, (2 + 4\cos t)sent)$, $t \in [0, 2\pi]$.

3 *Para cada item abaixo, encontre pelo menos duas funções a valores vetoriais $r(t) = (x(t), y(t))$ e $s(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ distintas satisfazendo a equação dada. (Conclui-se, assim, que uma parametrização de uma curva nunca é única.)*
(a) $y = x^2 - 5$
(b) $y = \sqrt{x}$
(c) $x^2 + y^2/4 = 1$
(d) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$

4 *Em cada item abaixo tem-se curvas contidas em quádricas. Determine uma parametrização para estas curvas:*

(a) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1 \\ z = y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 1 \\ 9y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$

5 *Verifique se existe $\lim\limits_{t \to t_0} F(t)$ para:*

(a) $F(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \dfrac{t - 1}{t}\right)$, $t_0 = 1$.

(b) $F(t) = \left(\dfrac{tg\ 3t}{t}, \dfrac{e^{2t} - 1}{t}, t^3\right)$, $t_0 = 0$.

(c) $F(t) = \left(\dfrac{t^3 - 8}{t^2 - 4}, \dfrac{\cos(\pi/t)}{t - 2}, 2t\right)$, $t_0 = 2$.

6 *Verifique se a curva parametrizada $r(t)$ é regular no ponto $r(t_0)$. Se for, determine a equação da reta tangente a tal curva no ponto $r(t_0)$. Faça também um esboço:*

(*a*) $r(t) = (\cos 2t, sen2t)$, $t_0 = 0$.

(*b*) $r(t) = (1 - sent, 1 - \cos t)$, $t_0 = \pi$.

(*c*) $r(t) = (t^2, t^2, t^4)$, $t_0 = 0$.

(*d*) $r(t) = ((2 + 2\cos t)\cos t, (2 + 2\cos t)\text{sen}t)$, $t_0 = \pi$.

7 *Determine se as curvas parametrizadas dadas têm reta normal no ponto $r(t_0)$ para t_0 dado abaixo. Se sim, determine-as.*

(*a*) $r(t) = (\cos 2t, sen2t)$, $t_0 = 0$.

(*b*) $r(t) = (1 - sent, 1 - \cos t)$, $t_0 = \pi$.

(*c*) $r(t) = (t^2, t^4)$, $t_0 = 0$.

8 *Considere a curva parametrizada $r(t) = (t^2, 2t^2 + 1, t^3)$, $t \in \mathbf{R}$. Verifique se tal curva admite reta tangente paralela ao vetor $v = (1, 2, 3)$. Se sim, em qual(quais) ponto(s) da curva isso ocorre?*

9 *Considere a curva parametrizada por $x(t) = asen\alpha\ sent$, $y(t) = b\cos\alpha\ sent$, $z(t) = c\cos t$ para $t \geq 0$, onde a, b, c, α são constantes fixadas não nulas.*
(*a*) *Mostre que a curva C está contida no elipsóide* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
(*b*) *Mostre que C também está contido num plano que contém o eixo-z.*
(*c*) *Faça um esboço da curva. Sugestão: pense primeiramente no caso em que $a = b = c$.*

10 *Sejam $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $x\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $y\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $z\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{x}\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{y}\colon]a,b[\to \mathbb{R}$, $\tilde{z}\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Defina*

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad e \quad \tilde{r}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)), \quad t \in]a,b[.$$

(*a*) *Escreva as expressões de*
(*a*1) $f(t)r(t)$, $t \in]a,b[$.
(*a*2) $r(t) \cdot \tilde{r}(t)$, $t \in]a,b[$, *onde $\cdot$ simboliza produto escalar de vetores.*
(*a*3) $r(t) \times \tilde{r}(t)$, $t \in]a,b[$, *onde $\times$ simboliza produto vetorial de vetores.*
(*b*) *Mostre que* $\dfrac{d}{dt}[f(t)r(t)] = f'(t)r(t) + f(t)r'(t)$.
(*c*) *Mostre que* $\dfrac{d}{dt}[r(t) \cdot \tilde{r}(t)] = r'(t) \cdot \tilde{r}(t) + r(t) \cdot \tilde{r}'(t)$.
(*d*) *Mostre que* $\dfrac{d}{dt}[r(t) \times \tilde{r}(t)] = r'(t) \times \tilde{r}(t) + r(t) \times \tilde{r}'(t)$.

11 *Verifique que se uma curva plana representa o deslocamento de uma partícula e se esta partícula tem vetor velocidade perpendicular ao seu vetor posição, então ela se move sobre uma circunferência centrada na origem.*

12 *Seja $r(t) = (f(t), g(t))$ função vetorial duas vezes diferenciável. Se ela fornece a posição de uma partícula no instante t e se para todo t o módulo da velocidade da partícula é constante, conclua que o vetor aceleração da curva é ortogonal ao vetor velocidade para todo t. Lembrando que $r'(t)$ é o vetor velocidade e $r''(t)$ o vetor aceleração.*

13 *Suponha que o vetor aceleração de uma partícula seja dado por* $a(t) = (e^t, (t-1)^4)$*. Se no instante* $t = 0$ *a partícula encontrava-se no ponto* $(1,1)$ *com velocidade* $v = (1,2)$ *onde ela estará em* $t = 20$*?*

14 *Determine o comprimento da curva parametrizada dada em cada um dos itens abaixo:*

$(a) \begin{cases} x(t) = 5t \\ y(t) = 4t^2 \\ z(t) = 3t^2, 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$ $(b) \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = tsent \\ z(t) = t\cos t, 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ $(c) \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4sen3t \\ z(t) = 4\cos 3t, 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

$(d) \begin{cases} x(t) = 1 - t^2 \\ y(t) = 4t \\ z(t) = 3 + 2t^2, 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$

(e) $\gamma(t) = (e^t, e^t sent, e^t \cos t)$, $0 \leq t \leq 1$

(f) $\gamma(t) = (3t^2, t^3, 6t)$, $0 \leq t \leq 1$.