Primeira Lista de Exercícios de SMA354 - Cálculo II - 2017

Exercício 1 *Em cada um dos itens abaixo, encontre uma primitiva e a integral indefinida da função f, onde:*

a) $f(x) = \left(x^2 - 9\right)^{\frac{2}{3}} x\,, \quad para \quad |x| \geq 3$ *b)* $f(x) = \dfrac{3 + e^{4x}}{e^{4x}}\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{x + \ln(x)}{x}\,, \quad para \quad x > 0$ *d)* $f(x) = x\,\left(4 - x^2\right)^{\frac{1}{3}}\,, \quad para \quad x \in \mathbb{R}$

Exercício 2 *Usando a técnica da substituição na integral indefinida, encontre as integrais indefinidas:*

a) $\displaystyle\int \frac{8\,x^2}{x^3 + 2}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\,\sqrt{x - 4}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int (2\,x + 3)^{11}\,dx$ *d)* $\displaystyle\int \frac{t^5 + 2\,t}{\sqrt{t^6 + 6\,t^2}}\,dt$

e) $\displaystyle\int \left(\frac{2\,z^2}{z^3 + 5} - \frac{3\,z}{z^2 - 10}\right) dz$ *f)* $\displaystyle\int \left[\sqrt{4\,t} + \cos(2\,t)\right]\,dt$ *g)* $\displaystyle\int \frac{\cos(t)}{-\operatorname{sen}^2(t)}\,dt$ *h)* $\displaystyle\int \left(2\,z^2 - 3\right)^5\,z\,dz$

Exercício 3 *Utilizando a técnica da integração por partes na integral indefinida, encontre as seguintes integrais indefinidas:*

a) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int x\,e^{3\,x} dx$ *c)* $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(3x)\,dx$ *d)* $\displaystyle\int e^x\,\cos(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int e^x\,\operatorname{sen}(x)\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2\,x)}{e^x}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x)\,dx$ *h)* $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx$

Exercício 4 *Encontre as seguintes integrais indefinidas:*

a) $\displaystyle\int x\,\operatorname{arcsen}\left(x^2\right)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int \sqrt{3 + x}\,(x + 1)^2\,dx$ *c)* $\displaystyle\int \left(t + \frac{1}{t}\right)\frac{t^2 - 1}{t^2}\,dt$ *d)* $\displaystyle\int \arccos(2\,x)\,dx$

e) $\displaystyle\int x^2\,\sqrt{1 + x}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{5 + \operatorname{sen}^2(x)}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + x^2}\,dx$ *h)* $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\,dx$

i) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(x)\,\sec(x)\,dx$ *j)* $\displaystyle\int \frac{1}{(1 + x)\,\sqrt{x}}\,dx$ *k)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16 - 9\,x^2}}\,dx$ *l)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)\,\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}}\,dx$

m) $\displaystyle\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\,dx$ *n)* $\displaystyle\int \frac{y + 3}{(3 - y)^{\frac{2}{3}}}\,dy$ *o)* $\displaystyle\int \frac{\cos^3(3\,x)}{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}(3\,x)}\,dx$ *p)* $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + e}\,dx$

Exercício 5 *Utilize as fórmulas*

$$\operatorname{sen}(a)\,\operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right],$$
$$\operatorname{sen}(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{sen}(a + b)\right],$$
$$\cos(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) + \cos(a + b)\right],$$

para calcular as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(5\,x)\,\cos(x)\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \cos(5\,x)\,\cos(6\,x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(m\,x)\,\operatorname{sen}(n\,x)\,dx\,,$ *para* $m, n \in \mathbb{N}$ **(d)** $\displaystyle\int \cos(m\,x)\,\operatorname{sen}(n\,x)\,dx\,,$ *para* $m, n \in \mathbb{N}\,.$

Exercício 6

a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Suponha que a equação geral da reta tangente à representação geométrica do gráfico da função f no ponto $(1\,,3)$, é dada por $y = x+2$. Se a função $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f''(x) = 6\,x$, para $x \in \mathbb{R}$, encontrar a expressão da função f.

b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$. Suponhamos que a função $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f''(x) = 2$, para $x \in \mathbb{R}$. Encontre a expressão da função f, sabendo-se que o ponto $(1\,,3)$ é um do gráfico da função e que nesse ponto o coeficiente angular da reta tangente é -2.

Exercício 7 *Considere uma partícula movendo-se sobre uma reta. Se a aceleração da partícula é uma função do tempo t, em segudos, dada pela função $a : [0\,,\infty) \to \mathbb{R}$, onde $a(t) = 2\,t-1$, para $t \geq 0$, e em $t = 1\,s$, sua velocidade é $3\,m/s$ e o espaço percorrido é $4\,m$, encontrar a expressão do espaço em função do tempo t.*

Exercício 8 *Uma equação do tipo*

$$f(y)\,\frac{dy}{dx}(x) = g(x)\,, \quad para \;\; x \in I\,,$$

onde as funções $f\,,g : I \to \mathbb{R}$ são dadas e a função $y : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em I, denominada solução da equação, será dita equação diferencial ordinária de variáveis separáveis. Sabendo-se que qualquer solução desta equação pode ser obtida integrando-se ambos os lados da igualdade em relação a x, encontre uma solução $y = y(x)$ da equação $y^2\,\dfrac{dy}{dx}(x) = \cos(x)$ para $x \in I \subseteq \mathbb{R}$.

Exercício 9 *Calcule as integrais indefinidas abaixo:*

$$\text{(a)} \int \frac{x^2}{9+x^2}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{\sqrt{4-9\,x^2}}{x}\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\text{(d)} \int \frac{dx}{\left(1-9\,x^2\right)^{3/2}} \qquad \text{(e)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx \qquad \text{(f)} \int \frac{dx}{x^2\,\sqrt{x^2-9}}$$

Exercício 10 *Use integração por partes para obter a seguinte fórmula de redução*

$$\int x^n\,\operatorname{sen}(x)\,dx = -x^n\,\cos(x) + n\int x^{n-1}\,\cos(x)\,dx\,,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 11 *Verifique que*

$$\int [\ln(x)]^n\,dx = x\,[ln(x)]^n - n\int [\ln(x)]^{n-1}\,dx$$

e calcule $\displaystyle\int [\ln(x)]^5\,dx$, para $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 12 *Encontrar o valor das integrais definidas:*

$$a)\int_{-3}^{2} |x+1|\,dx \qquad b)\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad c)\int_7^{12} dx \qquad d)\int_1^0 t^2\left(t^{\frac{1}{3}}-\sqrt{t}\right)\,dt$$

$$e)\int_3^2 \frac{x^2-1}{x-1}\,dx \qquad f)\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad g)\int_0^1 \frac{1}{\left(1-v^2\right)^2}\,dv \qquad h)\int_0^1 x^2\,e^x\,dx$$

$$i)\int_1^2 \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \qquad j)\int_0^1 \operatorname{sen}(x)\,e^{[\cos(x)+1]}\,dx \qquad k)\int_1^2 x\,2^x\,dx \qquad l)\int_0^1 x\,(2\,x+3)^{99}\,dx$$

Exercício 13 *Em cada um dos itens abaixo, encontrar a expressão da função $f':A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, onde $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por:*

$$a)\ f(x)=\int_0^x \left(t^2+1\right)^{10}\,dt \qquad b)\ f(x)=\int_x^0 \sqrt{u^2+4\,u}\,du \qquad c)\ f(x)=\int_{-1}^x t\,\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$d)\ f(x)=\int_0^{x^3} \cos^{\frac{1}{3}}(t)\,dt \qquad e)\ f(x)=\int_{\operatorname{sen}(x)}^{\cos(x)} \sqrt{t^2+1}\,dt \qquad f)\ f(x)=\int_0^{4\,x} \operatorname{sen}^{10}(t)\,dt$$

Exercício 14 *Seja $f:[-a\,,a]\to\mathbb{R}$ é integrável.*

1. *Mostre que se f é uma função par, então*

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

2. *Mostre que se f é uma função ímpar, então*

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Exercício 15 *Estude a paridade das funções que aparcem no integrando das integrais definidas abaixo e depois calcule-as:*

$$(a)\ \int_{-1}^1 \left(x^2+4\right)\,dx \qquad (b)\ \int_{-17\pi/4}^{17\pi/4} \left[\operatorname{sen}\left(x^3\right)-x^7\,\cos(x)\right]\,dx \qquad (c)\ \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$$

$$(d)\ \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^4+1}\,dx \qquad (e)\ \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh\left(x^3-x\right)}dx$$

Exercício 16 *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função w-periódica e integrável em qualquer intervalo limitado da reta, mostre que*

$$\int_0^w f(x)\,dx = \int_a^{a+w} f(x)\,dx$$

para cada $a\in\mathbb{R}$ e para um real w fixados.

Exercício 17 *Verifique que para todo natural $n>1$, temos* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(t)\,\mathrm{dt} = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(t)\,\mathrm{dt}.$

Exercício 18 *Suponha que a função $f:[-2\,,0]\to\mathbb{R}$ é contínua em $[-2\,,0]$ e que* $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,dx=3.$ *Calcule* $\displaystyle\int_0^2 f(x-2)\,dx.$

Exercício 19 *Em cada um dos itens abaixo, calcule o valor médio das funções f e determine $c\in\mathbb{R}$, tal que $f(c)=$ valor médio da função f no intervalo $[a,b]$:*

a) $f(x)=3\,x$ *e* $[a\,,b]=[1\,,2]$.
b) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *e* $[a\,,b]=[-\pi\,,\pi]$.
c) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *e* $[a\,,b]=[0\,,\pi]$.
d) $f(x)=x^2-2\,x$ *e* $[a\,,b]=[0\,,2]$.

Exercício 20 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das seguintes funções e retas abaixo:*

$$
\begin{aligned}
&a)\ f(x)=x^2\,,\ \textit{para } x\in\mathbb{R}\,, x=2\,, x=4\ \textit{ e } y=0\\
&b)\ f(x)=x\,\sqrt{4-x^2}\,,\ \textit{para } x\in[-2\,,2]\,, x=0\,, x=2\ \textit{ e } y=0\\
&c)\ f(x)=|\operatorname{sen}(x)|\,,\ x=-2\pi,\ x=2\pi\ \textit{ e } y=0\\
&d)\ f(x)=\operatorname{sen}(x)\,,\ \textit{para } x\in\mathbb{R}\,, x=-2\,\pi\,, x=2\,\pi\ \textit{ e } y=0\\
&e)\ f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{10-x^2}}\,,\ \textit{para } x\in[-\sqrt{10}\,,\sqrt{10}]\,, x=2\ \textit{ e } y=0
\end{aligned}
$$

Exercício 21 *Encontrar a área da região limitada do plano xy, delimitada pelas representações geométricas dos gráficos das curvas abaixo:*

a) $y=x^2$ *e* $y=4\,x-x^2$ *b)* $y=\cos(x)\,, y=\cos^2(x)\,, x=0$ *e* $x=\pi$

Exercício 22 *Calcule a área da região limitada abaixo do gráfico da função f (e acima do eixo x), nos seguintes casos:*

(a) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \textit{para} \quad x\in[0\,,1]\,,\\ 2-x & \textit{para} \quad x\in[1\,,2]\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & \textit{para} \quad x\in[0\,,1]\,,\\ -(x-1)\,(x-4) & \textit{para} \quad x\in[1\,,4]\end{cases}$

Exercício 23 *Desenhe o subconjunto A, do plano xy, e calcule sua área nos seguintes casos:*
(a) A é o subconjunto limitado do plano xy, delimitado pelas retas $x=1$, $x=3$, pelo eixo x e pelo gráfico de $y=x^3$.
(b) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x=1$, $x=4$, $y=0$ e pelo gráfico de $y=\sqrt{x}$.
(c) A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$, tais que $0\le y\le 9-x^2$.
(d) A é o subconjunto limitado do plano xy, formado por todos $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$, tais que $1\le x\le 2$ e $0\le y\le \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercício 24 *Seja $x_o\in\mathbb{R}$ o ponto máximo da função $f(x)=x^2\,e^{-x}$, para $x\in\mathbb{R}$. Calcule a área do conjunto limitado $A=\big\{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,0\le x\le x_o \ \text{ e } \ 0\le y\le x^2\,e^{-x}\big\}$.*

Exercício 25 *Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo x com equação $x=x(t)$ e com velocidade $v=v(t)$ contínua em $[a\,,b]$. Qual é uma primitiva de v?*
(a) A diferença $x(b)-x(a)$ é o deslocamento da partícula entre os instantes $t=a$ e $t=b$. Como o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser utilizado para calcular o deslocamento de uma partícula?
Definamos o espaço percorrido pela partícula entre os instantes $t=a$ e $t=b$ por $\displaystyle\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{dt}$.
(b) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t)=-t^2+t$, para $t\ge 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t=0$ e $t=2$.
(c) Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t)=2t-3$, para $t\ge 0$. Calcule o deslocamento entre os instantes $t=1$ e $t=3$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t=1$ e $t=3$. Descreva o movimento realizado pela partícula entre os instantes $t=1$ e $t=3$.