

Lista 10 - Entregar até dia 11/02/2010

SMA5729 - Funções de uma variável complexa

03/02/2010

1. Sejam $\alpha, \beta \in B(0, 1)$ e $P_{\alpha, \beta}$ o conjunto de todas as funções analíticas $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ tais que $f(\alpha) = \beta$. Qual é o valor máximo que $|f'(\alpha)|$ pode assumir quando variamos f em $P_{\alpha, \beta}$? Para qual função o máximo ocorre? (Sugestão: considere $\varphi(z) = (z - \beta)/(1 - \bar{\beta}z)$, $\psi(z) = (z + \alpha)/(1 + \bar{\alpha}z)$ e $g = \varphi \circ f \circ \psi$, e use Teorema de Schwarz.)
2. Mostre que uma função f inteira e injetora deve ser da forma $f(z) = az + b$, onde $a \neq 0$ e b são constantes. (Use o Teorema de Picard.)
3. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $\{f_n\}$ uma sequência em $H(\Omega)$ de funções injetoras. Se $f_n \rightarrow f$ normalmente em Ω , mostre que ou f é injetora ou f é constante. (Use o Teorema de Hurwitz.)