Primeira Lista de Exercicios de SMA0353 - Cálculo I

**(1)** Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdade:

(a) $\dfrac{7}{x} > 2$ (b) $\dfrac{x}{x-3} < 4$ (c) $(x+3)(x+4) > 0$

(d) $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{2+x}$ (e) $2 \leq 5 - 3x < 11$ (f) $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{2+x}$

(g) $|x+1| \leq |2-x|$ (h) $|x^2 - 4x - 5| \geq |x-1|$ (i) $|x| + |2-x| > -|4x-1|$.

**(2)** Expresse cada um dos conjuntos abaixo em notação de intervalo.

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 4x - 3 < 6x + 2\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x-3| \leq 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ (d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 < \frac{x}{3}\}$.

**(3)** Sejam $a$ e $b$ dois números reais. A afirmativa

$$a = b \text{ se, e somente se } a^2 = b^2$$

é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

**(4)** Determine um número real $r > 0$ de modo que $(4 - r, 4 + r) \subset (2, 5)$.

**(5)** Dê exemplo de números reais $a$ e $b$ tais que $|a + b| < |a| + |b|$. O que se pode dizer a respeito dos sinais desses números?

**(6)** O número real $x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

**(7)**

(a) Reescreva $f(x) = |2x-1| - 3|x+1|$ sem usar os simbolos de valor absoluto e faça o gráfico de $f$.

(b) Utilize o item (a) para resolver $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| < 3$. (c) Encontre o conjunto solução de $x^3 > x$.

(d) Sabe-se que $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{3}$, $\sec(y) = \frac{5}{4}$ e $x, y$ pertencem a $(0, \frac{\pi}{2})$. Calcule o valor de $\cos(x + y)$.

**(8)** Determine o domínio e esboce o gráfico de

(a) $f(x) = -2$ (b) $f(x) = |5x - 2|$ (c) $f(x) = |x| - |2x - 1|$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2 - x}$ (e) $f(x) = |x| + 2$ (f) $f(x) = |x^3|$

(g) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ (h) $f(x) = |x^2 - 4x - 5| + 2x$ (i) $f(x) = ||x| - 1|$

(j) $f(x) = \dfrac{|3x-1|}{3x-1}$ (l) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq -1 \\ -x+1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ (m) $f(x) = x^2|x|$

(n) $f(x) = (x-1)^2$ (o) $f(x) = (x+1)^3$ (p) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 - (x-2)^2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$

**(9)** Determine o domínio de

(a) $f(x) = (x-1)(x+2)$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{2-x}}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+1}}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 11}{(2-x)(x^-12)}$ (f) $f(x) = \sqrt{|x^3| + 1}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{|x^2 - 4x - 5|}$ (h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$ (i) $f(x) = \sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+2}}$

(j) $f(x) = \sqrt{x(3x-4)}$ (l) $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ (m) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2x-3}$

(n) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ (o) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ (p) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

**(10)** Simplifique $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, com $h \neq 0$, sendo $f(x)$ igual a

(a) $f(x) = 5$ (b) $f(x) = 3x - 1$ (c) $f(x) = 3x$

(d) $f(x) = x^2$ (e) $f(x) = x^2 + 1$ (f) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(g) $f(x) = x^3$ (h) $f(x) = x^4$ (i) $f(x) = \sqrt{x}$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (l) $f(x) = -3$ (m) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

**(11)**

(a) Resolva a desigualdade $\frac{|x+1|-|x-1|}{x} \geq 1$.
(b) Mostre, usando a definição, que se $g$ for par e $f$ for qualquer, então $f(g(x))$ é par.
(c) Mostre, usando a definição, que se $f$ for ímpar e se $g$ for ímpar, então $f(g(x))$ é ímpar.

**(12)** Seja $d$ a distância de $(0,0)$ a $(x,y)$. Expresse $d$ em função de $x$, sabendo que $(x,y)$ é um ponto do gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$.

**(13)** Calcule, caso exista. Se não existir, justifique.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x-1|}{x-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2-(x-2)^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ onde $f$ é a função do item (f)

**(14)** Calcule e justifique

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -9} 3$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} |5x-2|$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^3 - x^2 + 4x + 11$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-4}{2-x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{3}}{x-3}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$ (m) $\displaystyle\lim_{x\to p} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}$

**(15)** Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\operatorname{sen} x}{2x-\pi}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x-1}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x^2-\operatorname{sen} x}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{tg} x}{x+\operatorname{tg} x}$

**(16)** Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, onde $f$ é dada por

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

**(17)** Determine os pontos onde a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1. \end{cases}$ é contï¿½nua. Justifique sua resposta.

**(18)** Seja $f$ definida em $\mathbb{R}$ e tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)-3| \leq 2|x-1|$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$. Justifique sua resposta.

**(19)** Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq x^4$. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

**(20)** Calcule, caso existam, os limites abaixo

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ (b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^3-a^3}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{a+x}-\sqrt[3]{a}}{x}$ (f) $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

(g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x}$ (h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ (i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

(j) $\lim_{x\to a} \dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$ (l) $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$

**(21)** Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ onde $f$ é dada por

*a)* $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

*c)* $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x \geq 0 \\ x+1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

**(22)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Calcule

*a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$ *b)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x}$ *c)* $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$ *d)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(7x)}{3x}$

**(23)** Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Calcule, caso exista, $\lim_{x\to 0} f(x) \operatorname{sen} x$.

**(24)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in (-1, 1)$ tenha-se

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq f(x) + 1 \leq 1 + x^2 - x^3.$$

Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

**(25)** Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule tambem

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$$

**(26)** Calcule os limites abaixo.

$(a)$ $\lim_{x\to +\infty} \left\{ \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{1}{x^4}\operatorname{sen}(x^9)+1\right]\right\}$ $(b)$ $\lim_{x\to -\infty} \left\{\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi x^5+\operatorname{sen}(x)}{x^5+10}\right)\right\}$ $(c)$ $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}}{2-\sqrt{x}}$

$(d)$ $\lim_{x\to 2} \left\{\cos\left(\frac{|x^2-x-2|}{x-2}\right)\right\}$ $(e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x+\operatorname{tg}(x)}$

**(27)** Considere $f(x) = \ln(|\sqrt{4x^6+21} - 5|) - \ln(|x^3-8|)$. Encontre o domínio de $f$ e as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de $f$.

**(28)**Calcule, se possível, os limites abaixo.

$(a)$ $\lim_{x\to 1} \frac{|x^2+x-2|}{x-1}$ $(b)$ $\lim_{x\to 0} \left\{\cos\left[x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^7}\right)\right]\right\}$ $(c)$ $\lim_{x\to +\infty} \left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x^3}{2x^3+10}\right)\right\}$

$(d)$ $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - |x|\right)$ $(e)$ $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|\right)$

**Dica:** Para o item (e) use uma desigualdade importante envolvendo $|\operatorname{sen}(y)|$ que foi mostrada em sala e depois use o teorema do Sanduíche.

**(30)** Considere $f(x) = \frac{x^5-8}{\sqrt{4x^{10}+5}-3}$. Encontre o domínio de $f$ e as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de $f$.

**(31)** Determine $L$ para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique sua resposta.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-1} & \text{se } x \neq 2 \\ L & \text{se } x = 2 \end{cases}$ em $p = 2$. (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ L & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $p = 3$.

(c) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ L & \text{se } x = 0 \end{cases}$ em $p = 0$.

**(32)** Determine, se possível, $L$ para que a função $f$ seja contínua em $x_0$. Justifique.

*a)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = x_0 \doteq 2 \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = x_0 \doteq 3 \end{cases}$

*c)* $f(x) = \begin{cases} x^2+x-1, & \text{se } x > 0 \\ L, & \text{se } x = x_0 \doteq 0 \\ x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x > 0 \\ L, & \text{se } x = x_0 \doteq 0 \\ 1-x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

**(33)** Determine $\alpha$ e $\beta$ para que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-1, & \text{se } x < -1 \\ \alpha x + \beta, & \text{se } -1 \leq x \leq 2 \\ x^3+2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

seja contínua.

**(34)** (a) Dê exemplo de funções $f$ e $g$ tais que $\lim\limits_{x \to p^+} f(x) = L$, com $L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to p^+} g(x) = 0$, mas $\lim\limits_{x \to p^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ não existe.

(b) Dê exemplo de funções $f$ e $g$ tais que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] \neq 0$.

(c) Dê exemplo de funções $f$ e $g$ tais que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

**(35)**

(a) Encontre o número $a$ que assegura a continuidade de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0, \\ a & \text{se} \quad x = 0, \end{cases} \qquad \text{em} \quad x = 0.$$

(b) Encontre os números $a$, $b$ e $c$ que asseguram a continuidade de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1+\operatorname{tg}(x-1)} & \text{se} \quad 1 < x < \frac{\pi}{2}+1, \\ a & \text{se} \quad x = 1, \\ \frac{x^2+bx+c}{x^2+2x-3} & \text{se} \quad -2 < x < 1, \end{cases} \qquad \text{em} \quad x = 1.$$

**(36)** Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to A$, dizemos que $x \in A$ é um ponto fixo de $f$ se $f(x) = x$. Mostre que:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2$ não tem ponto fixo.

(b) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinómio de grau ímpar maior ou igual a 3, então $f$ tem pelo menos um ponto fixo.

(c) Se $a < b$ e $f : [a, b] \to [a, b]$ é contínua, então $f$ tem ao menos um ponto fixo.

**Dica para os itens b e c:** use o teorema do valor intermediário.