1ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Corpos, inf e sup, inequações, modulo....

Exercício 1 (*) Mostre, usando as propriedades de corpo ordenado, as seguintes afirmações:
a) o inverso multiplicativo é único;
b) $\overline{1} \cdot x = \overline{x}$, onde $\overline{x}$ é o oposto de x;
c) $w \leq 0$ e $x \leq y$ implica $xw \geq yw$.

Exercício 2 (*) Considere, no corpo ordenado $\mathbb{R}$, os conjuntos $A = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$. Encontre, $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$ e $\sup(B)$.

Exercício 3 (*) Mostre que a afirmação $S = sup(A)$ é equivalente à seguinte:
$a \leq S$ para todo $a \in A$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $S - \varepsilon < a_\varepsilon$.

Exercício 4 (*) Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2 \,\mathrm{e}\, x > 0\right\} \mathrm{e}\, B = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \,\mathrm{e}\, x > 0\right\}.$$

a) Considerando eles subconjuntos do corpo ordenado $\mathbb{Q}$, calcule, se existirem, $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$ e $\sup(B)$; caso contrário, explique porque não existem.

b) Considerando eles subconjuntos do corpo ordenado $\mathbb{R}$, calcule, se existirem, $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$ e $\sup(B)$; caso contrário, explique porque não existem.

Exercício 5 (*) Calcule sup e inf (se existirem) dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo:

a) Conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$;

b) conjunto $X = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

c) conjunto $[0, 1) \cup \{3\}$.

Exercício 6 (*!) Mostre que se A e B são conjuntos não vazios, então
1) $a < b \;\forall\, a \in A,\, b \in B$ implica $\sup(A) \leq \inf(B)$
2) $a \leq b \;\forall\, a \in A,\, b \in B$ implica $\sup(A) \leq \inf(B)$
3) se $\sup(A) \leq \inf(B)$ e $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, a \in A,\; b \in B : \;\; b - a < \varepsilon$ então $\sup(A) = \inf(B)$
4) se $\sup(A) = \inf(B)$ então $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, a \in A,\; b \in B : \;\; b - a < \varepsilon$
5) Use as propriedades acima para mostrar que dados $x, y \in \mathbb{R}$ e definindo

$$A = \{r + s : \; r, s \in \mathbb{Q}, \; r < x, \; s < y\} \,\mathrm{e}\, B = \{r + s : \; r, s \in \mathbb{Q}, \; r > x, \; s > y\},$$

vale $sup(A) = inf(B)$.

Exercício 7 Resolva as inequações:

a) $3x + 3 < x + 6$ **b)** $\dfrac{2x - 1}{x + 1} < 0$ **c)** $x(2x - 1)(x + 1) > 0$
d) $\dfrac{x - 3}{x^2 + 1} < 0$ **e)** $(2x - 1)(x^2 - 4) \leq 0$ **f)** $\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2} > 3$
g) $x^2 < r^2$, onde $r > 0$ é um real dado. **h)** $x^2 \geq r^2$, onde $r > 0$ é um real dado.
i) $x^3 - 1 > 0$ **j)** $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 < 0$ **k)** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \geq 0$

Exercício 8 Simplifique:

a) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ **b)** $\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$ **c)** $\dfrac{\frac{1}{x^2}-1}{x-1}$ **d)** $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{p}}{x-p}$

e) $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ **f)** $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ **g)** $\dfrac{(x+h)^2-(x-h)^2}{h}$

Exercício 9 Resolva as inequações:

a) $|2x-1|<3$ **b)** $|3x-1|<\dfrac{1}{3}$ **c)** $|2x^2-1|<1$ **d)** $|2x-3|>3$

e) $|2x-3|\geq 4$ **f)** $|2x-1|<x$ **g)** $|x+1|<|2x-1|$ **h)** $|x-1|-|x+2|>x$

i) $|x-3|<x+1$ **j)** $|x-2|+|x-1|>1$

k) $|x^2+|x|-6|\geq 2$ **l)** $x|x-1|\geq 2$ **m)** $\sqrt[3]{|4-x|(x^2-x-2)}>0$

n) $x^2+x\geq 2$ **o!)** $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{8-x}}\geq 1$ **p!)** $\sqrt{\dfrac{x^2-x-2}{8-x}}\geq -1$

Exercício 10 Seja $a>0$. Prove que: $|x|\geq a \iff x\leq -a$ ou $x\geq a$.

Exercício 11 Prove que: $|x+y|\geq |x|-|y|$.

Exercício 12 a) Determine $r>0$ de modo que $(4-r,\, r+4)\ \subset\ (2,\, 5)$.

b) Sejam $a<b$ dois reais e $p\in(a,\, b)$. Determine r de modo que $(p-r,\, p+r)\ \subset\ (a,\, b)$.

Exercício 13 Sejam x, y dois reais quaisquer com $x>0$ e $y>0$. Mostre que

$$\sqrt{xy}\leq \frac{x+y}{2}.$$

Exercício 14 Sejam x, y dois reais quaisquer com $0<x<y$. Prove que

$$\sqrt{y-x}>\sqrt{y}-\sqrt{x}.$$

Exercício 15 Prove que para todo $x>0$, existe pelo menos um natural n tal que $\frac{1}{n}<x$.

Exercício 16 Verifique as identidades.
(a) $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$
(b) $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
(c) $x^4-a^4=(x-a)(x^3+ax^2+a^2x+a^3)$
(d) Generalize.

Exercício 17 Verifique as identidades onde $x>0$ e $y>0$.
(a) $x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$
(b) $x-y=(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3})$
(c) Generalize
Estas equações serão bastante utilizadas para o cálculo de alguns limites.

Exercício 18 **(*)** Prove: se para todo $\epsilon>0$, $|a-b|<\epsilon$, então $a=b$.
Este resultado é frequentemente utilizado em demonstrações matemáticas.

Exercício 19 A afirmação: para todo x real, $x\neq 2$,

$$\frac{x^2+x+1}{x-2} > 3 \Longleftrightarrow x^2+x+1 > 3(x-2)$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

Exercício 20 A afirmação: quaisquer que sejam os reais x e y,

$$x < y \Longleftrightarrow x^2 < y^2$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

Exercício 21 A afirmação: "para todo real $x \geq 0$, $x \geq \sqrt{x}$ "é falsa ou verdadeira? Justifique.

Gabarito

Exercício 7 a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{3}{2}\right\}$; **b)** $\left\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$; **c)** $\left\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}$; **d)** $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$;
e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$; **g)** $\{x \in \mathbb{R} : -r < x < r\}$; **h)** $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -r \text{ ou } x \geq r\}$; **i)** $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$; **j)** $\{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ ou } -2 < x < -1\}$.

k) $\{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$

Exercício 9 a) $-1 < x < 2$; **b)** $\frac{2}{9} < x < \frac{4}{9}$; **c)** $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$; **d)** $x < 0$ ou $x > 3$; **e)** $x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq \frac{7}{2}$; **f)** $\frac{1}{3} < x < 1$;
g) $x < 0$ ou $x > 2$; **h)** $x < -\frac{1}{3}$; **i)** $x > 1$; **j)** $x < 1$ ou $x > 2$.
Exercício 19: FALSA
Exercício 20: FALSA
Exercício 21: FALSA