Primeira Lista de Exercícios de SMA354 - Cálculo II
Professora: Janete Crema Simal 09.08.12

(1) a) Para cada uma das funções abaixo, determine os pontos de máximo e de mínimo, os intervalos em que ela é estritamente crescente e aqueles em que é estritamente decrescente e seus pontos de inflexão:

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

(d) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ (e) $f(x) = 2|x| - x^2$ (f) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+3}$.

b) Determine os valores extremos globais de f no intervalo$[-1, 1]$ para:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ \dfrac{sen\, x}{x} & x > 0 \end{cases}$

(2) Se p for um ponto de inflexão de f e se $f'(p) = 0$, dizemos que p é um ponto de inflexão horizontal. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f? Justifique sua resposta. Existem b e c que tornam 1 ponto de inflexão horizontal? Em caso afirmativo, determine-os.

(3) Seja f uma função definida e derivável no intervalo $(-r, r)$, onde $r > 0$. Suponha que $f'(x) = x^2 + f^2(x)$ para todo $x \in (-r, r)$ e que $f(0) = 0$.
(a) Mostre que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-r, r)$ com $x \neq 0$.
(b) Usando o fato de $f(0) = 0$ e o item anterior estude o sinal de $f(x)$ em $(-r, r)$.
(c) Mostre que 0 é um ponto de inflexão horizontal de f.
(d) Estude a concavidade de f.

(4) (a) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que f é uma função constante.

(5) (a) Mostre que todo polinômio de segundo grau não tem ponto de inflexão.
(b) Mostre que todo polinômio de grau 3 tem um único ponto de inflexão.

(6) Esboce o gráfico de

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ (b) $y = x^3 - x^2 + 1$ (c) $y = x^4 - 2x^2$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

(e) $\{y = senx + x$ (f) $f(x) = arctgx$ (g) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ (h) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

(7) Para cada uma das funções abaixo, esboce o gráfico determinando as assíntotas:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ (c) $f(x) = \dfrac{4x + 3x^2}{1 + x^2}$ (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$

(e) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ (f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ (g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ (h) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

(8) a) Verifique que se f é função com derivadas pelo menos de segunda ordem e $f(x) > 0$ então se x_0 é ponto crítico de f também o é de f^2. E reciprocamente se é de f^2 também o é de f. Verifique também que se é máximo de uma será também da outra. Idem mínimo.

b) Encontre o ponto da curva $y = 2/x$, $x > 0$ que está mais próximo da origem.(Use o item anterior)

(9) Duas partículas P e Q movem-se, respectivamente, sobre os eixos Ox e Oy. A função posição de P é $x = \sqrt{t}$ e de Q é $y = t^2 - 3/4$, $t \geq 0$. Determine o instante em que a distância entre P e Q seja a menor possível.

(10) Determine o ponto da parábola $y = 1 - x^2$ que se encontra mais próximo da origem.

(11) Determine o ponto M do gráfico de $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, de modo que a área do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ e M seja máxima.

(12) (a) Pediram a você para projetar uma lata de óleo com a forma de um cilindro e com volume de 1000cm^3. Quais dimensões (da altura e do raio)exigirão menos material na confecção da lata? (Ignore a espessura da lata).

(13) Suponha que em qualquer momento t (medido em segundos) a corrente alternada i (ampères) que corre num circuito elétrico seja dada por $i = 2\cos t + 2\,\text{sen}\, t$. Qual é o pico de corrente que pode ocorrer nesse circuito (maior amplitude)? Isto é, qual a maior amplitude da função corrente?

(14) Um carrinho preso a uma parede por uma mola é afastado 10 cm de sua posição de repouso e liberado no instante $t = 0$, oscilando então durante 4 segundos. Sua posição no instante t é dada por $s = 10\cos \pi t$.

(a) Qual é a velocidade máxima do carrinho? Quando o carrinho se desloca com essa velocidade? Onde exatamente isso ocorre? Qual é a magnitude de sua aceleração nesse momento?

(b) Onde o carrinho se encontra quando a magnitude de sua aceleração é a maior possível? Qual é a velocidade do carrinho nesse momento?

(15) (a) Uma caixa retangular sem tampa tem base quadrada. A área total é 432 cm^2. Achar as dimensões da caixa de volume máximo satisfazendo a essas condições.

(b) Um pedaço de arame de comprimento ℓ é cortado em duas partes, uma delas sendo dobrada na forma de um triângulo e a outra na forma de um círculo. Como deve ser cortado o arame para que a soma das áreas limitadas seja máxima? E mínima?