Lista sobre Técnicas de Integração

Exercício 1 *Calcule*

(a) $\int_{-1}^{1}(2s+1)ds;$

(b) $\int_{1}^{2}\left(x^3+x+\frac{1}{x^3}\right)dx;$

(c) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx;$

(d) $\int_{0}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,dt.$

Exercício 2 *Nos ítens abaixo, desenhe o conjunto A dado e calcule sua área:*

(a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, x^2-1\le y\le 0\};$

(b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, 0\le y\le |sen\, x|,\, 0\le x\le 2\pi\}.$

Exercício 3 *Uma partícula desloca-se sobre o eixo* $0x$ *com velocidade*

$$v(t)=-t^2+t,\quad t\ge 0.$$

Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t=0$ *e* $t=2$.

Exercício 4 *Calcule*

(a) $\int_{0}^{1}xe^{x^2}dx;$

(b) $\int_{-1}^{0}x(x+1)^{100}dx;$

(c) $\int_{0}^{1}\frac{x}{(x+1)^5}dx;$

(d) $\int_{-1}^{1}x^3(x^2+3)^{10}dx;$

(e) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen} x(1-\cos^2 x)dx;$

(f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 x dx.$

Exercício 5 *Calcule*

(a) $\displaystyle\int x^3 \cos x^4 dx;$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos x dx;$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx;$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{3 + 2\operatorname{tg} x} dx;$

(e) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x} \right) dx;$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx;$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx;$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx.$

Exercício 6 *Uma partícula desloca-se sobre o eixo* $0x$ *com velocidade* $v(t) = t^2 - 2t - 3$, $t \geq 0$.

(a) *Calcule o deslocamento entre os instantes* $t = 0$ *e* $t = 4$.

(b) *Calcule o espaço percorrido entre os instantes* $t = 0$ *e* $t = 4$.

Exercício 7 *Desenhe o conjunto* A *dado e calcule a área:*

(a) A *é o conjunto do plano limitado pelos gráficos de* $y = x^3 - x$ *e* $y = sen\, \pi x$, *com* $-1 \leq x \leq 1$.

(b) A *é o conjunto do plano limitado pelas retas* $x = 0$, $x = \pi/2$ *e pelos gráficos de* $y = \cos x$ *e* $y = 1 - \cos x$.

Exercício 8 *Suponha* f *contínua em* $[-1, 1]$. *Calcule* $\displaystyle\int_0^1 f(2x-1)dx$ *sabendo que* $\displaystyle\int_{-1}^1 f(u)du = 5$.

Exercício 9 *Suponha* f *contínua em* $[0, 4]$. *Calcule* $\displaystyle\int_{-2}^2 x f(x^2) dx$.

Exercício 10 *Calcule*

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^2} dx;$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^3 (x^2 + 3)^{10} dx;$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen\, x \cos^2 x dx;$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, sen^5 x dx.$

Exercício 11 *Seja f uma função par e contínua em $[-r, r]$, com $r > 0$.*

(a) Mostre que $\int_{-r}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{r} f(x)dx$.

(b) Conclua de (a) que $\int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\int_{0}^{r} f(x)dx$. *Interprete graficamente.*

Exercício 12 *Suponha f contínua em $[a, b]$. Seja $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ derivável com g' contínua em $[c, d]$, $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Suponha, também, que $g'(u) > 0$ em $]c, d[$. Seja $c = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n = d$ uma divisão de $[c, d]$ e seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ uma divisão de $[a, b]$, onde $x_i = g(u_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

(a) Mostre que, para todo i, $i = 1, 2, \ldots, n$, existe $\zeta_i \in [u_{i-1}, u_i]$ tal que

$$\Delta x_i = g'(\zeta_i)\Delta u_i.$$

(b) Conclua de (a) que

$$\sum_{i=1}^{n} f(g(\zeta_i))g'(\zeta_i)\Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

onde $\xi_i = g(\zeta_i)$.

(c) Mostre que existe $M > 0$ tal que

$$\Delta x_i \leq M\Delta u_i,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(d) Conclua que

$$\lim_{\max \Delta u_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(g(\zeta_i))g'(\zeta_i)\Delta u_i = \lim_{\max \Delta u_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

ou seja,

$$\int_{c}^{d} f(g(u))g'(d)du = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Exercício 13 *Calcule* $\int e^{-st}\operatorname{sen} t dt$, *onde $s > 0$ é constante.*

Exercício 14 *Verifique que, para todo $n \geq 1$ e todo $s > 0$, vale*

$$\int t^n e^{-st}dt = -\frac{1}{s}t^n e^{-st} + \frac{n}{s}\int t^{n-1}e^{-st}dt.$$

Exercício 15 *Suponha que f'' seja contínua em $[a, b]$. Verifique que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \int_{a}^{b}(b - t)f''(t)dt.$$

Exercício 16 *Calcule* $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$, $a > 0$.

Exercício 17 *Deduza a área do círculo de raio r, $r > 0$.*

Exercício 18 *Calcule* $\int \sqrt{-x^2 + 2x + 3}\, dx$.

Exercício 19 *Calcule a área da elipse descrita pela equação $4x^2 + y^2 = 1$.*

Exercício 20 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3}\,dx.$

Exercício 21 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$ *e verifique o resultado encontrado por derivação.*

Exercício 22 *Siga as instruções:*

1. *Determine* A, B, C *e* D *tais que*

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}.$$

2. *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+2)^2}\,dx.$

Exercício 23 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}\,dx$ *e verifique o resultado encontrado por derivação.*

Gabarito

Exercício 1

(a) 2;

(b) $\frac{45}{8}$;

(c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$;

(d) $\frac{\pi}{4}$.

Exercício 2

(a) $\frac{4}{3}$;

(b) 4.

Exercício 3 1.

Exercício 4

(a) $\frac{1}{2}(e-1)$;

(b) $-\frac{1}{10302}$;

(c) $\frac{11}{192}$;

(d) 0;

(e) $\frac{11}{24}$;

(f) $\dfrac{11}{24}$.

Exercício 5

(a) $\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} x^4 + k$;

(b) $\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + k$;

(c) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + k$;

(d) $\dfrac{1}{2}\ln|3 + 2\operatorname{tg} x| + k$;

(e) $5\ln|x-1| + 2\ln|x| + k$;

(f) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + k$;

(g) $\ln|\ln x| + k$;

(h) $\operatorname{sen}(\ln x) + k$.

Exercício 6 (b) $\dfrac{34}{3}$.

Exercício 7 (a) $\dfrac{8+\pi}{2\pi}$; (b) $\dfrac{1}{6}(12\sqrt{3} - \pi - 12)$.

Exercício 8 $\dfrac{5}{2}$.

Exercício 9 0.

Exercício 10 (a) $\dfrac{3 - 4\ln 2}{2}$; (b) 0; (c) $\dfrac{7}{24}$; (d) $\dfrac{1}{384}$.

Exercício 13 $-\dfrac{e^{-st}}{1+s^2}(\cos t + s\operatorname{sen} t) + k$

Exercício 16 $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2} + \ln\left|\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right|\right] + k$

Exercício 17 πr^2

Exercício 18 $2\operatorname{arcsen}\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x-1}{2}\sqrt{4-(x-1)^2} + k$

Exercício 19 $\dfrac{\pi}{2}$

Exercício 20 $\dfrac{x^2}{2} + 4x - \dfrac{3}{2}\ln|x-1| + \dfrac{31}{2}\ln|x-3| + k$.

Exercício 22 $\dfrac{7}{27}\ln|x-1| + \dfrac{6}{27(x-1)} - \dfrac{7}{27}\ln|x+2| + \dfrac{15}{27(x+2)} + k$.