Lista Extra 1 - Cálculo 2 - SMA 354

Exercício 1 *Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento, calcule todos os limites necessários e esboce o gráfico de f, onde*

(a) $f(x) = x + \dfrac{2}{x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{2 + x^2}$

(c) $f(x) = x^2 e^x$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

(e) $f(x) = x^x$, $x > 0$

Exercício 2 *Para cada uma das funções abaixo*

- *determine os intervalos de crescimento e decrescimento;*
- *estude a concavidade e pontos de inflexão;*
- *esboce o gráfico.*

(a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x$

(b) $f(x) = xe^{-2x}$

(c) $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

(f) $f(x) = x \ln x$

Dica: *Note que* $\dfrac{x^3}{1 + x^2} = x - \dfrac{x}{1 + x^2}$.

Exercício 3 *Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.*

Exercício 4 *Prove para quaisquer que sejam $x > 0$, $\operatorname{sen} x > x - \dfrac{x^3}{3!}$.*

Exercício 5 (a) *Determine o número real positivo cuja soma com o inverso do seu quadrado seja mínima.*

(b) *Achar dois números positivos cuja soma é 16 e cujo produto é o máximo possível.*

Exercício 6 *Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, inscrito na esfera de raio R dado.*

Exercício 7 *Um jardim retangular de $50m^2$ de área deve ser protegido contra animais. Se um lado do jardim já está protegido por uma parede de celeiro, quais as dimensões da cerca de menor comprimento?*

Exercício 8 *Deseja-se construir uma caixa, de forma cilídrica, de $1\ m^3$ de volume. Nas laterais e no fundo sera utilizado material que custa $5,00$ reais o m^2 e na tampa sera utilizado material que custa $10,00$ reais o m^2. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.*

Exercício 9 *(IME) As arestas laterais de uma pirâmide regular com n faces têm medida l. determine:*

(a) a expressão do raio do círculo circunscrito à base, em função de l, de modo que o produto do volume da pirâmide pela sua altura seja máximo.

(b) a expressão desse produto máximo, em função de l e n.

Exercício 10 *Encontre o ponto P da curva $y = \dfrac{3}{x}$, $x > 0$, que está mais próximo da origem.*

Exercício 11 *Uma partícula desloca-se sobre o eixo Ox com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$. Sabe-se que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 5$. Determine o instante em que a partícula estará mais próxima da origem.*

Exercício 12 *Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura h e raio r, uma semi-esfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume do sólido seja máximo.*

Exercício 13 *Ao preço de $R\$1,50$ um vendedor ambulante pode vender 500 unidades de uma certa mercadoria que custa 70 centavos cada. Para cada centavo que o vendedor abaixa no preço, a quantidade vendida pode aumentar de 25. Que preço de venda maximizará o lucro?*

Exercício 14 *(IME) Considere uma esfera inscrita e tangente à base de um cone de revolução. Um cilindro está circunscrito à esfera de tal forma que uma de suas bases está apoiada na base do cone. Seja: V_1 o volume do cone e V_2 o volume do cilindro. Encontre o menor valor da constante k para o qual $V_1 = kV_2$. Sugestão: Considere o ângulo formado pelo diâmetro da base e a geratriz do cone em uma das extremidades deste diâmetro.*

Exercício 15 *($\star\star\star\star\star$) Quando uma pessoa tosse, a traquéia se contrai. Usando princípios de fisiologia e mecânica dos fluidos, determine quanto deve contrair-se a traquéia para criar a maior velocidade de ar, isto é, a condição mais efetiva para limpar os pulmões e a traquéia.*
Sugestão: Suponha que a traquéia seja um tubo cilíndrico.

Gabarito

Exercício 1

(a) f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e em $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$ e f é estritamente decrescente em $]0, \sqrt[3]{2}]$.

(b) f é estritamente crescente em $\left[1-2\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}\right]$ e estritamente decrescente em $\left]-\infty, 1-2\sqrt{3}\right]$ e em $[1+2\sqrt{3}, +\infty[$.

(c) f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$ e f é estritamente decrescente em $[-2, 0]$.

(d) f é estritamente crescente em $[e, +\infty[$ e f é estritamente decrescente em $]0, 1[$ e em $]1, e]$.

(e) f é estritamente crescente em $[e^{-1}, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]0, e^{-1}]$.

Exercício 2

(a) f tem concavidade para cima em $]-\infty, 0[$ e em $]1, +\infty[$ e concavidade para baixo em $]0, 1[$; f tem ponto de inflexão em $x = 0$ e em $x = 1$.

(b) f tem concavidade para cima em $]1, +\infty[$ e concavidade para baixo em $]-\infty, 1[$; f tem ponto de inflexão em $x = 1$.

(c) f tem concavidade para cima em $]\ln 4, +\infty[$ e concavidade para baixo em $]-\infty, \ln 4[$; f tem ponto de inflexão em $x = \ln 4$.

(d) f tem concavidade para cima em $]1, +\infty[$ e concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1[$; f tem ponto de inflexão em $x = 1$.

(e) f tem concavidade para cima em $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[$ e em $\left]0, \sqrt{3}\right[$ e concavidade para baixo em $\left]-\sqrt{3}, 0\right[$ e em $\left]\sqrt{3}, +\infty\right[$; f tem ponto de inflexão em $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e em $x = -\sqrt{3}$.

(f) f tem concavidade para cima em $]0, +\infty[$; f não tem ponto de inflexão.

Exercício 3 $[-2, -1]$.

Exercício 5 (a) $\sqrt[3]{2}$ (b) os números procurados são $x = 8$ e $y = 8$

Exercício 6 $\dfrac{4R}{3}$

Exercício 7 $5m$ de largura e $10m$ de comprimento.

Exercício 8 $r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3\pi}}$ e $h = \sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi}}$

Exercício 9 (a) $R = \dfrac{l}{2\sqrt{2}}$ (b) $P = \dfrac{(n-1)l^4}{24} \text{sen} \left(\dfrac{2\pi}{\text{n}-1}\right)$

Exercício 10 $P = \left(\sqrt[4]{9}, \dfrac{3}{\sqrt[4]{9}}\right)$

Exercício 11 $t = \dfrac{3}{2}$

Exercício 12 $r = 1$ e $h = 1$

Exercício 13 $1,20$ unidades monetárias.

Exercício 14 $k_{min} = \dfrac{4}{3}$

Exercício 15 O raio da traquéia durante a tosse deve ser dois terços do raio normal da traquéia.