Lista 3 de exercícios de Cálculo I

(1) Em cada um dos ítens abaixo, encontre a integral indefinida.

a) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right) x\,dx$ *b)* $\int \operatorname{sen} 5x\,dx$ *c)* $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx$ *d)* $\int (x^2 - 9)^{2/3} x\,dx$ *e)* $\int \frac{x + \ln x}{x}\,dx$

(2) Usando substituição, encontre

a) $\int \frac{3}{4+x}\,dx$ *b)* $\int \frac{8x^2}{x^3+2}\,dx$ *c)* $\int x\sqrt{x-4}\,dx$ *d)* $\int (2x+3)^{11}\,dx$

e) $\int \frac{t^5+2t}{\sqrt{t^6+6t^2}}\,dt$ *f)* $\int \left(\frac{2z^2}{z^3+5} - \frac{3z}{z^2-10}\right) dz$ *g)* $\int \left(\sqrt{4t} + \cos 2t\right) dt$ *h)* $\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$

i) $\int \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)\,dx$ *j)* $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$ *k)* $\int \cos^3 x\,dx$ *l)* $\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^7 t}\,dt$

m) $\int (2z^2 - 3)^5 z\,dz$ *n)* $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(3) Utilizando integração por partes, encontre

a) $\int x \ln x\,dx$ *b)* $\int \ln x\,dx$ *c)* $\int x e^{3x} dx$ *d)* $\int x^2 \operatorname{sen} 3x\,dx$ *e)* $\int e^x \cos x\,dx$

f) $\int x \sec^2 x\,dx$ *g)* $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{e^x}\,dx$ *h)* $\int x^3 e^{x^2}\,dx$ *i)* $\int x^3 \cos x^2\,dx$ *j)* $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

k) $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ *l)* $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$ *m)* $\int \ln(a^2 + x^2)\,dx$

(4) Utilize as fórmulas $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b))$ e $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$ para calcular as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \operatorname{sen} 5x \cos x\,dx$ *b)* $\int \operatorname{sen} 4x \cos 2x\,dx$ *c)* $\int \cos 5x \cos 6x\,dx$

d) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx,\ m, n \in \mathbb{N}$ *e)* $\int \cos mx \operatorname{sen} nx\,dx,\ m, n \in \mathbb{N}$.

(5) Calcule

a) $\int \frac{x}{x+1}\,dx$ *b)* $\int \frac{x+2}{x-3}\,dx$ *c)* $\int \frac{2x-5}{3x+1}\,dx$ *d)* $\int \frac{2x^2+4}{x^3-8}\,dx$

(6) Calcule as integrais abaixo, usando o método das frações parciais:

a) $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$ *b)* $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}\,dx$ *c)* $\int \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx$ *d)* $\int \frac{5x^2+1}{x-1}\,dx$

e) $\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$ *f)* $\int \frac{2x-3}{(x-1)^3}\,dx$ *g)* $\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}\,dx$ *h)* $\int \frac{x^5+3}{x^3-4x}\,dx$

i) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,dx$ *j)* $\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+5x}\,dx$ *k)* $\int \frac{2x^2+4}{x^3-8}\,dx$ *l)* $\int \frac{1}{x^2+5}\,dx$

(7) Usando substituição trigonométrica, calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\,dx,\ a > 0$ *b)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ *c)* $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ *d)* $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$ *f)* $\int \frac{x^2}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$ *g)* $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$ *h)* $\int \frac{1}{(16-x^2)^{3/2}}\,dx$

(8) Fazendo a substituição $y = \operatorname{arcsen} x$, calcule $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$.

(9) Calcule

a) $\int x \operatorname{arcsen} x^2\, dx$ b) $\int \sqrt{3+x}\,(x+1)^2\, dx$ c) $\int \tanh x\, dx$ d) $\int \arccos 2x\, dx$

e) $\int x^2\sqrt{1+x}\, dx$ f) $\int \frac{\cos x}{5+\operatorname{sen}^2 x}\, dx$ g) $\int \frac{\cos x}{2\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}\, dx$ h) $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}\, dx$

i) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$ j) $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$ k) $\int \operatorname{tg}^2 x \sec x\, dx$ l) $\int \frac{x}{3-2x-x^2}\, dx$

m) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$ n) $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}}\, dx$ o) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$ p) $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\, dx$

q) $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}\, dx$ r) $\int \frac{y+3}{(3-y)^{2/3}}\, dy$ s) $\int_0^1 x^3 \sinh x\, dx$

(10) Calcule

a) $\int_7^{12} dx$ b) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ c) $\int_{-3}^{2} |x+1|\, dx$ d) $\int_1^0 t^2(t^{1/3}-\sqrt{t})\, dt$

e) $\int_3^2 \frac{x^2-1}{x-1}\, dx$ f) $\int_0^x t^2\, e^{-st}\, dt,\ s \neq 0$ g) $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x^5+7}}\, dx$ h) $\int_0^1 \frac{1}{(1-v^2)^2}\, dv$

i) $\int_0^1 x^2 e^x\, dx$ j) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x\, dx$ k) $\int_{-1}^{0} x\,(x+1)^{100}\, dx$ l) $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$

m) $\int_0^1 \operatorname{sen} x\, e^{\cos x + 1}\, dx$ n) $\int_1^2 \ln x\, dx$ o) $\int_0^1 2^x\, dx$ p) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+e}\, dx$

q) $\int_5^5 \sqrt{x^2+\sqrt{x^5+1}}\, dx$ r) $\int_1^{\sqrt{2}} x\, 3^{-x^2}\, dx$ s) $\int_0^b (\sqrt{b}-\sqrt{x})^2\, dx,\ b>0$

(11) Esboce e encontre a área da região A, que é

a) $A = \{(x,y);\, 1 \le x \le 3,\, 0 \le y \le x^3\}$ b) $A = \{(x,y);\, 1 \le x \le 4,\, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

c) $A = \{(x,y);\, 0 \le y \le \sqrt{9-x^2},\ x \ge 0\}$ d) $A = \{(x,y);\, 0 \le y \le |\sin x|,\ x = -2\pi \le x \le 2\pi\}$

e) $A = \{(x,y);\, 0 \le y \le 4-x^2\}$ f) a região limitada delimitada por $f(x) = x^3 - 4x$ e $y = 0$

g) $A = \{(x,y);\, x \ge 0, x^3 \le y \le x\}$ h) a região limitada delimitada por $x = y^2$ e $x = 4y$

i) $A = \{(x,y);\, 1-x^2 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$ j) a região limitada delimitada por $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$

(12) Calcule

a) $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^2 x\, dx$ b) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\, dx$ c) $\int \operatorname{tg} x \sqrt[3]{\sec x}\, dx$ d) $\int \operatorname{tg}^6 x\, dx$

e) $\int \frac{\cos x}{4-\operatorname{sen}^2 x}\, dx$ f) $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ g) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos x}\, dx$ h) $\int \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\, dx$

(13) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:
(a) $1 \le x \le 3$ e $0 \le y \le x$.
(b) $1/2 \le x \le 2$ e $0 \le y \le 1/x^2$.
(c) $2x^2 + y^2 \le 1$ e $y \ge 0$.
(d) $x^2 \le y \le x$.
(e) $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ e $y \ge 0$.

(14) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:
(a) $1 \le x \le e$ e $0 \le y \le \ln x$.
(b) $1 \le x \le 2$ e $0 \le y \le x^2 - 1$.
(c) $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le \operatorname{arctg} x$.
(d) $0 \le x \le 6$, $0 \le y \le 2$ e $y \ge \sqrt{x-2}$.
(e) $y^2 \le x \le y$.

(f) $0 \leq x \leq 1$ e $x \leq y \leq x^2+1$.

(15) Usando que $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ e a mudaça de variáveis $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x+\operatorname{sen} x}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x+\operatorname{sen} x}\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{tg} x}{2+3\cos x}\mathrm{d}x$.

(16) Usando a definição, decida quais das integrais impróprias abaixo são convergentes e quais são divergentes e, para as convergentes encontre o seu valor:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_1^\infty e^{2x}\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-2x}\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2}\mathrm{d}x,\ s>0$ (h) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-sx}\mathrm{d}x,\ s>0$ (i) $\displaystyle\int_1^\infty te^{-st}\mathrm{d}t,\ s>0$

(j) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-st}\cos t\mathrm{d}t,\ s>0$ (l) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (m) $\displaystyle\int_1^\infty \ln x\mathrm{d}x$.

(17) Usando integração, prove que o volume de um cone é um terço do volume do cilindro circunscrito, isto é, um cone de altura h e raio de base r tem volume $V = 1/3\,\pi\, r^2\, h$.

(18) A região dada sob cada uma das seguintes curvas é girada ao redor do eixo x. Calcule o volume do sólido de revolução obtido:

$a)\, y = \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+4}},\quad 0 \leq x \leq 4$ $\qquad b)\, y = \dfrac{1}{x^2+1},\quad 0 \leq x \leq 1$ $\qquad c)\, y = \sqrt[4]{4-x^2},\quad 1 \leq x \leq 2$

(19) Decida quais das integrais impróprias abaixo são convergentes e quais são divergentes:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^5+3x+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{2x}}{x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-2x}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{s^2+x^2}\,dx,\ s>0$ (h) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-sx}\,dx,\ s>0$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty te^{st}\,dt,\ s<0$ (j) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt,\ s>0$ (k) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2\ln x}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$

(n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{3/2}}\,dx$ (o) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$ (p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$ (q) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos x}\,dx$

(r) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\,dx$ (s) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (t) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$ (n) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^2 x\,dx$

(20) Encontre o volume do sólio obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas:

$y = x,$	$y = \sqrt{x};$			em torno de $y = 1$
$y = e^{-x},$	$y = 1,$	$x = 2;$		em torno de $y = 2$
$y = 1 + \sec x,$	$y = 3;$			;em torno de $y = 1$
$y = \frac{1}{x},$	$y = 0,$	$x = 1,$	$x = 3;$	em torno de $y = -1$
$x = y^2,$	$x = 1$			em torno de $x = 1$
$y = x,$	$y = \sqrt{x};$			em torno de $x = 2$
$y = x^2,$	$x = y^2;$			em torno de $x = -1$
$y = x,$	$y = 0,$	$x = 2,$	$x = 4;$	em torno de $x = 1$

(21) Escreva, mas não calcule, uma integral para o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno da reta especificada:

$y = \operatorname{tg}^3 x,$	$y = 1,$	$x = 0;$	em torno de $y = 1$
$y = (x-2)^4,$	$8x - y = 16;$		em torno de $x = 10$
$y = 0;$	$y = \operatorname{sen} x,$	$0 \leq x \leq \pi;$	em torno de $y = 1$
$y = 0;$	$y = \operatorname{sen} x,$	$0 \leq x \leq \pi;$	em torno de $y = -2$
$x^2 - y^3 = 1,$	$x = 3;$		em torno de $x = -2$
$y = \cos x,$	$y = 2 - \cos x,$	$0 \leq x \leq 2\pi;$	em torno de $y = 4$