1 Dicas de integração

- **produto $x^n h(x)$ onde conheça primitivas de h:**
  integre por partes pondo $g(x) = x^n$, assim na integral que sobra terá $g'(x) = nx^{n-1}$... continuando até eliminar a potência.
  Funciona para $x^n e^x,\ x^n \cos(x), ...$

  Exemplo:
  $\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^x\, dx =$
  $= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

- **produto $x^n h(x)$ onde h tem derivada racional:**
  integre por partes pondo $g(x) = h(x)$, assim na integral que sobra terá apenas uma racional.
  Funciona para $x^n \ln(x),\ x^n arctg(x), ...$

  Exemplo:
  $\int x^2 \ln(x)\, dx = x^3 \ln(x)/3 - \int (x^3/3x)\, dx = x^3 \ln(x)/3 - x^3/9 + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

- **quadrado de trigonométrica ou hiperbólica:**
  integre por partes e depois use identidades OU use relações conhecidas*...

  Exemplo:
  $\int \cosh^2(x)\, dx = \operatorname{senh}(x)\cosh(x) - \int \operatorname{senh}^2(x)\, dx =$
  $= \operatorname{senh}(x)\cosh(x) - \int (\cosh^2(x) - 1)\, dx$
  logo
  $2\int \cosh^2(x)\, dx = \operatorname{senh}(x)\cosh(x) + \int 1\, dx = \operatorname{senh}(x)\cosh(x) + x + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

- **trigonométrica com exponencial:**
  integre por partes duas vezes e leve do outro lado...
  Funciona também para $\operatorname{senh}(x)\cos(x),\ ....$

  Exemplo:
  $\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx =$
  $= e^x \sin(x) - \left[e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x))\, dx\right]$
  logo
  $2\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

- **substituição trigonométrica ou hiperbólica:** quando aparece o termo $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$, se não tiver substituição melhor:
  - no caso $\sqrt{a^2 - x^2}$, substitua $x = a\sin(\theta),\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$;
  - no caso $\sqrt{a^2 + x^2}$, substitua $x = a\,\mathrm{senh}\,(t),\ t \in \mathbb{R},$ OU $x = a\,tg(\theta),\ \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$;
  - no caso $\sqrt{x^2 - a^2}$, substitua $x = a\cosh(t),\ t > 0,$ OU $x = a\ \sec(\theta),\ \theta \in (0, \pi/2)$.

  isso leva a eliminar a raiz usando relações trigonométricas-hiperbólicas.

  Exemplo:
  $\int \sqrt{4 + x^2}\, dx = (x = 2\mathrm{senh}\,(t),\ dx = 2\cosh(t)\, dt)$
  $= \int \sqrt{4(1 + \mathrm{senh}^2(t))2\cosh(t)\, dt}$
  $= \int \sqrt{4\cosh^2(t)}2\cosh(t)\, dt = \int 4\cosh^2(t)\, dt = ...$

- **Caso** $\int x^n \left(\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\right)^{\pm 1}$
  - Se n é par use a substituição trigonométrica ou hiperbólica acima.
  - Se n é ímpar, também as substituições $y = \pm a^2 \pm x^2$ ou $z = \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ podem funcionar.

  Exemplo:

  $\int x^3\sqrt{9 + x^2}\, dx = (y = 9 + x^2,\ dy = 2x\ dx)\ \int (y - 9)\sqrt{y}\, dy/2$
  $= \frac{1}{2}\int (y^{3/2} - 9\sqrt{y})\ dy\ = ...$
  $\int x^3\sqrt{9 + x^2}\, dx = (z = \sqrt{9 + x^2},\ 2z\ dz = 2x\ dx)$
  $\int (z^2 - 9)z\ zdz = \int (z^4 - 9z^2)dz = ...$

1.1 Casos que podem ser reduzidos a racionais

Seja R[a,b,..] uma função racional nas variáveis $a, b, ..$

- $\int \mathbf{R}[\sin(\mathbf{x})]\ \cos(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = \int R(t)\,dt$ *pondo* $t = \sin(x)$.
  O mesmo funciona para $R[\cos(x)]\ \sin(x)\,dx$ **e análogos hiperbólicos**.
  também os casos $R[\sin(x), \cos(x)^2]\ \cos(x)$ **e análogos** encaixam pois pode ver como $R[\sin(x), 1-\sin(x)^2]\ \cos(x)$

  Exemplo:

  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\sin(x)}{1-\sin(x)+\cos^2(x)}\cos(x)\,dx = \int \frac{t^2-3t}{1-t+1-t^2}\,dt$$

- $\int R[\sin(x), \cos(x)]\,dx$ sempre pode ser tratada da maneira seguinte (mas deixar como última tentativa, pois as contas sao feias!)
  ponha $t = \tan(x/2)$, assim $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$, $\cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2)$ e $dx = 2dt/(1+t^2)$.

  Para o caso $\int R[Sh(x), \cosh(x)]\,dx$ *ponha* $t = Th(x/2)$, assim $Sh(x) = 2t/(1-t^2)$, $\cosh(x) = (1+t^2)/(1-t^2)$ e $dx = 2dt/(1-t^2)$.

  Exemplo:

  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\cos(x)}{1-\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int \frac{4t^2/(1+t^2) - 3(1-t^2)}{1-2t+(1-t^2)}\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

- $\int \sin^n(x)\cos^k(x)\,dx, \quad (n, k \in \mathbb{Z})$:

  - *se n ou k é ímpar, substitua a outra:*
    Exemplo:
    $\int \sin^8(x)\cos^7(x)\,dx = (t = \sin(x),\ \ dt = \cos(x)\,dx)$
    $\int t^8(1-t^2)^3\,dt = \ldots$
  - *se ambas são par, use as fórmulas de duplicação para baixar o grau*:
    Exemplo:
    $\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \int (1-\cos(2x))/2 \cdot (1+\cos(2x))/2\,dx =$
    $= \int (1-\cos^2(2x))/4\,dx = \ldots$

- $\int \sin(nx)\cos(kx)\,dx$ **ou** $\int \sin(nx)\sin(kx)\,dx$ **ou** $\int \cos(nx)\cos(kx)\,dx$:
  use fórmulas trigonométricas
  Exemplo:
  $\int \sin(nx)\cos(kx)\,dx = \int (\sin(nx-kx)+\sin(nx+kx))/2\,dx =$
  $= \ldots$

1.2 Relações úteis para integrar

- **trigonométricas**

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1;\quad 1+\mathrm{tg}^2\theta=\sec^2\theta;\quad \sin^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2};\quad \cos^2 u=\frac{1+\cos 2u}{2}$$
$$2\sin(nx)\cos(kx)=\sin(nx-kx)+\sin(nx+kx)$$
$$2\cos(nx)\cos(kx)=\cos(nx-kx)+\cos(nx+kx)$$

- **hiperbólicas**

$$\cosh^2 t-\mathrm{senh}^2 t=1;\qquad 1-\mathrm{tgh}^2 t=\mathrm{sech}^2 t$$
$$\mathrm{senh}^{-1}u=\ln(u+\sqrt{u^2+1}),\ u\in\mathbb{R}$$
$$\cosh^{-1}u=\ln(u+\sqrt{u^2-1}),\ u\geq 1$$
$$\mathrm{sech}^{-1}u=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right),\ u\in(0,1]$$
$$\mathrm{tgh}^{-1}u=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+1}{1-u}\right),\ |u|<1$$
$$\mathrm{cotgh}^{-1}u=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right),\ |u|>1$$

- **derivada de algumas funções e de funções inversas**

$$\frac{d}{d\theta}(\mathrm{tg}\,\theta)=\sec^2\theta;\quad \frac{d}{d\theta}(\sec\theta)=\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta;\quad \frac{d}{d\theta}(\mathrm{cotg}\,\theta)=-\mathrm{cossec}^2\theta;$$
$$\frac{d}{dt}(\mathrm{senh}\,t)=\cosh t;\quad \frac{d}{dt}(\cosh t)=\mathrm{senh}\,t;\quad \frac{d}{dt}(\mathrm{tgh}\,t)=\mathrm{sech}^2 t;$$
$$\frac{d}{dt}(\mathrm{senh}^{-1}t)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ x\in\mathbb{R};\qquad \frac{d}{dt}(\cosh^{-1}t)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}};\ x>1;$$
$$\frac{d}{dt}(\mathrm{tgh}^{-1}t)=\frac{1}{1-x^2};\ |x|<1;\qquad \frac{d}{dt}(\mathrm{cotgh}^{-1}t)=\frac{1}{1-x^2};\ |x|>1;$$

Exemplo: *(ou pode aplicar a técnica de frações parciais!)*

- $\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x^2}dx=\mathrm{tgh}^{-1}(1/2)-\mathrm{tgh}^{-1}(0)=\frac{1}{2}\ln 3(>0)$
- $\int_2^3\frac{1}{1-x^2}dx=\mathrm{cotgh}^{-1}(3)-\mathrm{cotgh}^{-1}(2)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}(<0)$