EXEMPLO 1. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Suponha que existe $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Prove que para todo x em I

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M}{2} |x - x_0|^2$$

onde $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Solução

De acordo com o teorema, existe $\bar{x}$ entre x e x_0 tal que

$$|f(x) - P(x)| = \left| \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2 \right|$$

ou

$$|f(x) - P(x)| = \frac{1}{2} |f''(\bar{x})| \, |x - x_0|^2$$

daí

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M}{2} |x - x_0|^2, \, x \in I. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 2. Avalie ln 1,003.

Solução

Seja $f(x) = \ln x$. O polinômio de Taylor, de ordem 1, de f em volta de $x_0 = 1$ é:

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

e como, $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$, resulta

$$P(x) = x - 1.$$

Assim,

$$f(1{,}003) \cong P(1{,}003)$$

ou

$$\ln 1{,}003 \cong 0{,}003.$$

Interprete graficamente este resultado.

Avaliação do erro

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ e } f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Segue:

$$|f''(x)| \leqslant 1 \text{ para } x \geqslant 1.$$

Pelo exemplo anterior,

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{2} |x - 1|^2, \, x \geqslant 1.$$

Para $x = 1{,}003$

$$|f(1{,}003) - P(1{,}003)| \leqslant 0{,}0000045.$$

Assim, o módulo do erro cometido na aproximação

$$\ln 1{,}003 \cong 0{,}003$$

é inferior a 10^{-5}. Observe que 0,003 é um valor aproximado por excesso (faça os gráficos de f e de P e confira). ■

Exercícios 16.1

1. Calcule o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ *b)* $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x_0 = 0$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$ *d)* $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$
e) $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = 0$ *f)* $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $x_0 = 0$.

2. Calcule um valor aproximado e avalie o erro.

a) $\sqrt{4{,}001}$ *b)* $\sqrt[5]{32{,}002}$ *c)* sen 0,02
d) $e^{0{,}001}$ *e)* cos 0,01 *f)* ln 0,99

16.2. Polinômio de Taylor de Ordem 2

Vimos que o polinômio de Taylor, de ordem 1, de f em volta de x_0, tem em comum com f o valor em x_0 e o valor da derivada em x_0.

Suponhamos que f tenha derivadas até a 2.ª ordem no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Vamos procurar o polinômio P, de grau no máximo 2, que tenha em comum com f o valor em x_0, o valor da derivada 1.ª em x_0 e o valor da derivada 2.ª em x_0. Queremos, então, determinar P, de grau no máximo 2, tal que

$$f(x_0) = P(x_0), f'(x_0) = P'(x_0) \text{ e } f''(x_0) = P''(x_0).$$

Podemos procurar P da forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2.$$

EXEMPLO 5. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Mostre que $P(x) = 1 + x + x^2$ é o polinômio de Taylor, de ordem 2, de f em volta de $x_0 = 0$.

Solução

Basta mostrar que $E(x) = f(x) - P(x)$ tende a zero mais rapidamente que x^2, quando $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{E(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2 - x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1-x} = 0.$$

Outro processo. Calcular $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$ e verificar que

$$1 + x + x^2 = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2. \quad \blacksquare$$

Dizemos que $\varphi(x)$ é um *infinitésimo*, para $x \to x_0$, se $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$. Sejam $\varphi(x)$ e $\varphi_1(x)$ dois *infinitésimos*, para $x \to x_0$. Dizemos que $\varphi(x)$ é um infinitésimo de *ordem superior* à de $\varphi_1(x)$ se, para $x \to x_0$, $\varphi(x)$ tende a *zero mais rapidamente* que $\varphi_1(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = 0$. É usual a notação

$$\varphi(x) = o(\varphi_1(x)) \text{ para } x \to x_0$$

para indicar que $\varphi(x)$ é um infinitésimo de ordem superior à de $\varphi_1(x)$, para $x \to x_0$.
Assim, sendo $\varphi(x)$ e $\varphi_1(x)$ infinitésimos para $x \to x_0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = o(\varphi_1(x)) \text{ para } x \to x_0.$$

Observe que $x - x_0$ só é infinitésimo para $x \to x_0$; assim,

$$E(x) = o(x - x_0)$$

significa que $E(x)$ é um infinitésimo de ordem superior à de $x - x_0$, para $x \to x_0$.
Do que vimos anteriormente, segue que

(i) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

(ii) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$.

Exercícios 16.2

1. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 2, de f em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \ln(1 + x)$ e $x_0 = 0$
b) $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$
d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ e $x_0 = 0$
e) $f(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 4$
f) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x_0 = 0$
g) $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$

2. Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro.

a) $\ln 1{,}3$ *b)* $\sqrt{4{,}1}$
c) $\sqrt{3{,}9}$ *d)* $\sqrt[3]{8{,}2}$
e) $e^{0{,}03}$ *f)* $\operatorname{sen} 0{,}1$
g) $\sqrt{0{,}8}$ *h)* $\cos 0{,}2$

3. Mostre que, para todo x,

a) $|\operatorname{sen} x - x| \leq \dfrac{1}{3!}|x|^3$

b) $\left|\cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\right| \leq \dfrac{1}{3!}|x|^3$.

4. Mostre que, para $0 \leq x \leq 1$

$$0 \leq e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) < \frac{1}{2}x^3.$$

5. Utilizando a relação $\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$, calcule

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}$ *b)* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x - x^2}{x^2}$

$\Big($*Sugestão*: $o(x^2)$ é um infinitésimo de ordem superior a x^2, para $x \to 0$, isto é, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{o(x^2)}{x^2} = 0.\Big)$

6. Verifique que

a) $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

b) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

c) $\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$

d) $\ln x = (x - 1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$

7. Seja $f(x) = \begin{cases} x^8 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de $x_0 = 0$.
b) Seja $a > 0$ um número real dado. Mostre que não existe $M > 0$ tal que para todo x em $[0, a]$, $|f'''(x)| \leq M$.

8. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo I e seja $x_0 \in I$. Mostre que existe uma função $\varphi(x)$ definida em I tal que, para todo x em I,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \varphi(x)(x - x_0)^2$$

com $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

9. Seja f derivável até a 2.ª ordem no intervalo fechado $[a, b]$ e seja $x_0 \in [a, b]$. Mostre que existe $M > 0$ tal que para todo x em $[a, b]$.

$$|f(x) - P(x)| \leq M|x - x_0|^2$$

onde $P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$.

(*Sugestão*: verifique que a função $\varphi(x)$ do Exercício 8, com $\varphi(x_0) = 0$, é contínua em $[a, b]$.)

16.3. Polinômio de Taylor de Ordem n

Seja f derivável até a ordem n no intervalo I e seja $x_0 \in I$. O polinômio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

denomina-se *polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de* x_0.

O polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de x_0 é o *único polinômio de grau no máximo n que aproxima localmente f em volta de x_0 de modo que o erro $E(x)$ tenda a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^n$, quando $x \to x_0$*. (Verifique.)

O polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de $x_0 = 0$ denomina-se também *polinômio de Mac-Laurin, de ordem n, de f.*

EXEMPLO 1. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 4, de $f(x) = e^x$ em volta de $x_0 = 0$.

Solução

$$P(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x - 0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x - 0)^4$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x & \Rightarrow f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x & \Rightarrow f'''(0) = 1 \\ f^{(4)}(x) = e^x & \Rightarrow f^{(4)}(0) = 1. \end{array}$$

Assim,

$$P(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 2. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 3, de $f(x) = \ln x$, em volta de $x_0 = 1$.

Solução

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & \Rightarrow f(1) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{x} & \Rightarrow f'(1) = 1 \\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} & \Rightarrow f''(1) = -1 \\ f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} & \Rightarrow f'''(1) = 2. \end{array}$$

Assim,

$$P(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{3}(x - 1)^3. \quad \blacksquare$$

Teorema. (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.) Seja f derivável até a ordem $n + 1$ no intervalo I e sejam $x, x_0 \in I$. Então existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

onde

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Assim,

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \cong \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \ldots + \frac{1}{7!}x^{14}\right) dx$$

com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}. ■

Exercícios 16.3

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de x_0 dado.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $x_0 = 0$
b) $f(x) = \cos x$ e $x_0 = 0$
c) $f(x) = \ln x$ e $x_0 = 1$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $x_0 = 1$
e) $f(x) = (1 + x)^\alpha$ e $x_0 = 0$, onde $\alpha \neq 0$ é um real dado.

2. Sejam n um natural ímpar e $f(x) = \operatorname{sen} x$. Mostre que, para todo x,

$$\left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

3. Avalie sen 1 com erro, em módulo, inferior a 10^{-5}. (*Sugestão*: utilize o Exercício 2.)

4. Mostre que, para todo x,

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n \to +\infty} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

ou

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

5. Calcule um valor aproximado com erro, em módulo, inferior a 10^{-3}.

a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

6. Mostre que, para todo x,

$$\cos x = \lim_{n \to +\infty} \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$$

ou

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

7. *a*) Verifique que $1 + t + t^2 + \ldots + t^n = \dfrac{1 - t^{n+1}}{1 - t}$ $(t \neq 1)$. Conclua que, se $|t| < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} (1 + t + t^2 + \ldots + t^n) = \frac{1}{1 - t}$$

ou seja,

$$\frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots$$

b) Verifique que $1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n$ é o polinômio de Taylor, de ordem n, de $\dfrac{1}{1 + t}$ em volta de 0.

$$\left(\textit{Sugestão}\text{: Mostre que } \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{1+t} - (1 - t + t^2 - \ldots - (-1)^n t^n)}{t^n} = 0.\right)$$

c) Mostre que a função $E(t)$ dada por

$$\frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + E(t)$$

é contínua em $]-1, +\infty[$.

d) Mostre que, para todo $x > -1$,

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \int_0^x E(t)\,dt.$$

$$\left(\textit{Sugestão}\text{: } \ln(x + 1) = \int_0^x \frac{1}{1 + t}\,dt \ldots\right)$$

e) Verifique que $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ é o polinômio de Taylor, de ordem $n + 1$, de $\ln(x + 1)$ em volta de 0.

8. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 5, de $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ em volta de 0.

9. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

a) Mostre que $P(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$ é o polinômio de Taylor, de ordem 10, de f em volta de $x_0 = 0$. (Não é necessário calcular as derivadas de f!!)
b) Mostre que a função $E(x)$ dada por

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + E(x)$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

c) Olhando para o polinômio do item (*a*), calcule $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ etc.

10. Determine o polinômio de Taylor, de ordem 11, de $g(x) = \text{arc tg } x$ em volta de $x_0 = 0$.

$$\left(\textit{Sugestão}: \text{arc tg } x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \text{ e utilize o Exercício 9.} \right)$$

11. Seja $f(x) = (1+x)^\alpha$, onde $\alpha \neq 0$ é um real dado. Determine o polinômio de Taylor, de ordem n, de f em volta de $x_0 = 0$ e dê a expressão do erro em termos da derivada de ordem $n+1$.

17

Arquimedes, Pascal, Fermat e o Cálculo de Áreas

17.1. Quadratura da Parábola: Método de Arquimedes

Um dos criadores do Cálculo Diferencial e Integral foi o grande matemático grego Arquimedes, que viveu no século 3 a.C. em Siracusa. Uma de suas inúmeras descobertas foi a fórmula para o cálculo da área de um *segmento de parábola*. Nosso objetivo aqui é obter tal fórmula seguindo o raciocínio rigoroso de Arquimedes. Vamos então considerar o segmento de parábola limitado pela parábola $y = x^2$ e pela corda AB.

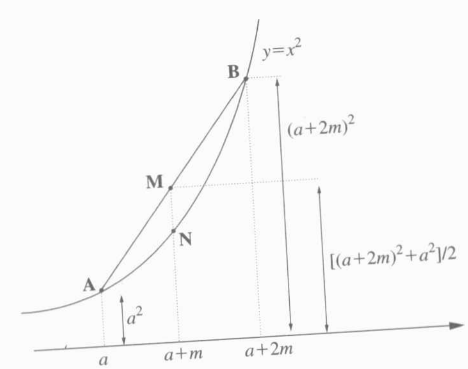

Fig. 17.1

Lembrando que em um trapézio o segmento que liga os pontos médios dos lados não-paralelos é a semi-soma das bases, resulta que a ordenada de M é $\dfrac{(a+2m)^2 + a^2}{2}$.