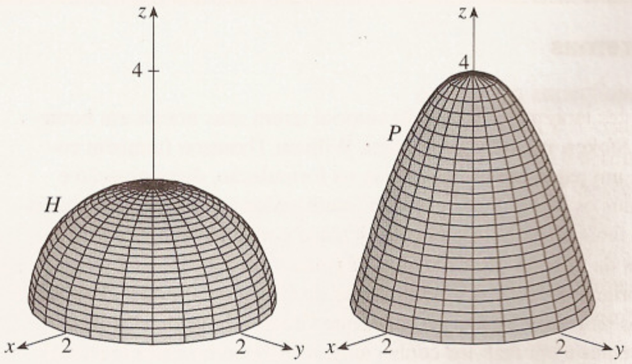
16.8 Exercícios

1. Um hemisfério H e um pedaço P de um parabolóide estão mostrados. Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ cujos componentes têm derivadas parciais contínuas. Explique por que

$$\iint_H \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



2–6 □ Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, com orientação para cima.

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2e^{yz}\,\mathbf{i} + y^2e^{xz}\,\mathbf{j} + z^2e^{xy}\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, com orientação para cima.

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + \text{tg}^{-1}\, yz)\,\mathbf{i} + y^2z\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S é a parte do hemisfério $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 4$, orientado na direção positiva do eixo x

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$,
S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, com orientação para fora. [*Dica*: Use a Equação 3.]

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + e^z\,\mathbf{j} + xy^2\,\mathbf{k}$,
S é formada pelos quatro lados da pirâmide com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$ que está à direita do plano xz com orientação na direção positiva do eixo y. [*Dica*: Use a Equação 3.]

7–10 □ Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k}$,
C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x}\,\mathbf{i} + e^x\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}$,
C é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\,\mathbf{i} + 4x\,\mathbf{j} + 5y\,\mathbf{k}$, C é a curva da intersecção do plano $z = x + 4$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}$, C é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ no primeiro octante.

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e C é a curva da intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com janelas de inspeção escolhidas de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e C é a curva da intersecção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do parabolóide hiperbólico e do cilindro com janelas de inspeção escolhidas de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

13–15 □ Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para um campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície S.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y\,\mathbf{i} + 4z\,\mathbf{j} - 6x\,\mathbf{k}$,
S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy, com orientação para cima.

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$, S é o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, com orientação para cima.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é a parte do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante, com orientação para cima.

16. Seja

$$F(x, y, z) = \langle ax^3 - 3xz^2, x^2y + by^3, cz^3 \rangle$$

Seja C a curva do Exercício 12 e considere todas as possíveis superfícies lisas S cuja curva fronteira é C. Ache os valores de a, b e c para os quais $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ é independente da escolha de S.

17. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^x + z^2)\,\mathbf{i} + (y^y + x^2)\,\mathbf{j} + (z^z + y^2)\,\mathbf{k}$$

quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1. Então o fluxo líquido sai perto de P_1, e assim div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2, os vetores que chegam são maiores do que os que saem. Aqui o fluxo líquido é na direção de entrar, assim div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar essa impressão. Como $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, temos div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim os pontos acima da reta $y = -x$ são fontes e os pontos abaixo da reta são sorvedouros.

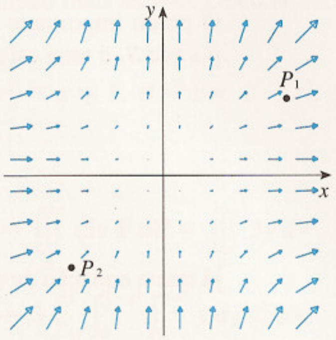
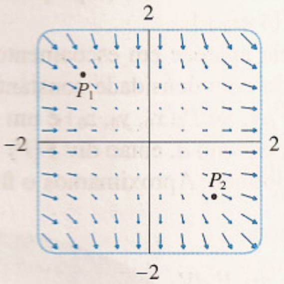


FIGURA 4

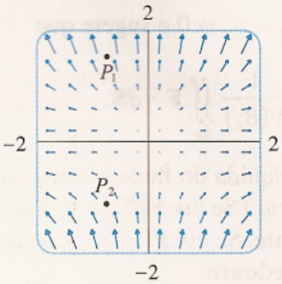
Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

16.9 Exercícios

1. A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$. Use a interpretação da divergência derivada nesta seção para determinar se div $\mathbf{F}$ é positivo ou negativo em P_1 e em P_2.



2. (a) Os pontos P_1 e P_2 são fontes ou sorvedouros para o campo vetorial $\mathbf{F}$ mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.
   (b) Dado $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use a definição de divergência para verificar sua resposta da parte (a).



3–6 □ Verifique que o Teorema da Divergência é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na região E.

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$,
   E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + 3z^2\,\mathbf{k}$,
   E é o sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 1$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$,
   E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
   E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

7–17 □ Use o Teorema da Divergência para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3y^2z^3\,\mathbf{i} + 9x^2yz^2\,\mathbf{j} - 4xy^2\,\mathbf{k}$,
   S é a superfície do cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\,\mathbf{i} - x^2z\,\mathbf{j} + z^2y\,\mathbf{k}$,
   S é a superfície da caixa retangular limitada pelos planos $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ e $z = 1$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = -xz\,\mathbf{i} - yz\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
   S é o elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} - x^2y^4\,\mathbf{k}$,
    S é a superfície do tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y\,\mathbf{i} - x^2y^2\,\mathbf{j} - x^2yz\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + 2xz^2\,\mathbf{j} + 3y^2z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{z^2}\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $z = 0$ e $z = y - 3$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y\,\mathrm{sen}\,z)\,\mathbf{i} + (y^3 + z\,\mathrm{sen}\,x)\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$

CAS **17.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathrm{tg}\,z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x\,\mathrm{sen}\,y\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$

CAS **18.** Use um sistema algébrico computacional para plotar o campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathrm{sen}\,x\cos^2 y\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}^3 y\cos^4 z\,\mathbf{j} + \mathrm{sen}^5 z\cos^6 x\,\mathbf{k}$$

no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$, e $z = \pi/2$. Em seguida calcule o fluxo através da superfície do cubo.

19. Use o Teorema da Divergência para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x\,\mathbf{i} + \left(\tfrac{1}{3}y^3 + \mathrm{tg}\,z\right)\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$$

e S é a metade de cima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
[*Dica*: Note que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro integrais sobre S_1 e S_2, onde S_1 é o disco $x^2 + y^2 \leq 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]

20. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathrm{tg}^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3\ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para baixo.

21. Verifique que $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

22. Use o Teorema da Divergência para calcular

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\,dS$$

onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

23–28 □ (Prove cada identidade, admitindo que S e E satisfaçam as condições do Teorema da Divergência e que as funções escalares e componentes do campo vetorial tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

23. $\displaystyle\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$, onde $\mathbf{a}$ é um vetor constante

24. $\displaystyle V(E) = \tfrac{1}{3}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

25. $\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

26. $\displaystyle\iint_S D_{\mathbf{n}} f\,dS = \iiint_E \nabla^2 f\,dV$

27. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV$

28. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV$

29. Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema da Divergência e f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Prove que

$$\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

Essa superfície e a integral tripla da função vetorial são vetores definidos integrando cada função componente.
[*Dica*: Comece aplicando o Teorema da Divergência a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.]

30. Um sólido ocupa a região E com superfície S e está imerso em um líquido com densidade constante ρ. Estabelecemos um sistema de coordenadas de modo que o plano xy coincida com a superfície do líquido e valores positivos de z sejam medidos para baixo entrando para dentro do líquido. Então a pressão na profundidade z é $p = \rho g z$, onde g é a aceleração da gravidade (veja a Seção 9.3). A força de empuxo total sobre o sólido devida à distribuição de pressão é dada pela integral de superfície

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\mathbf{n}\,dS$$

onde $\mathbf{n}$ é o versor normal apontando para fora. Use o resultado do Exercício 29 para mostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, onde W é o peso do líquido deslocado pelo sólido. (Note que $\mathbf{F}$ é direcionado para baixo porque z está direcionado para baixo.) O resultado é o *Princípio de Archimedes*: a força de empuxo sobre um objeto é igual ao peso do líquido deslocado.