SOLUÇÃO Aqui a mudança de variáveis é dada por

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

Calculamos o jacobiano como se segue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} - \rho\operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos\phi\,(-\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\operatorname{sen}^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}\phi\cos\phi\cos^2\theta)$$

$$- \rho\operatorname{sen}\phi\,(\rho\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \rho\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= -\rho^2\operatorname{sen}\phi\cos^2\phi - \rho^2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\phi = -\rho^2\operatorname{sen}\phi$$

Como $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, temos $\operatorname{sen}\phi \geqslant 0$. Portanto

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)}\right| = |-\rho^2\operatorname{sen}\phi| = \rho^2\operatorname{sen}\phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z)\,dV = \iiint_S f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

que equivale à Fórmula 15.8.4. □

15.9 Exercícios

1-6 □ Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = u + 4v, \quad y = 3u - 2v$
2. $x = u^2 - v^2, \quad y = u^2 + v^2$
3. $x = \dfrac{u}{u + v}, \quad y = \dfrac{v}{u - v}$
4. $x = \alpha\operatorname{sen}\beta, \quad y = \alpha\cos\beta$
5. $x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw$
6. $x = e^{u-v}, \quad y = e^{u+v}, \quad z = e^{u+v+w}$

7-10 □ Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 3, \ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$; $x = 2u + 3v$, $y = u - v$
8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$; $x = v$, $y = u(1 + v^2)$
9. S é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$; $x = u^2$, $y = v$
10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$; $x = au$, $y = bv$

11–16 □ Utilize a transformação dada para calcular a integral.

11. $\iint_R (3x + 4y)\,dA$, onde R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = x - 2$, $y = -2x$ e $y = 3 - 2x$; $x = \frac{1}{3}(u + v)$, $y = \frac{1}{3}(v - 2u)$
12. $\iint_R (x + y)\,dA$, onde R é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$, $(5, 1)$ e $(3, -2)$; $x = 2u + 3v$, $y = 3u - 2v$
13. $\iint_R x^2\,dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u$, $y = 3v$
14. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\,dA$, onde R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$
15. $\iint_R xy\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v$, $y = v$

16. $\iint_R y^2\,dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy$, $v = xy^2$. Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R.

17. (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido contido pelo elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.
(b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação os pólos foram achatados. Assim seu formato pode ser aproximado por um elipsóide com $a = b = 6378$ km e $c = 6356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.

18. Calcule $\iiint_E x^2 y\,dV$, onde E é o sólido do Exercício 17(a).

19–23 □ Calcule a integral fazendo uma mudança de variáveis apropriada.

19. $\iint_R xy\,dA$, onde R é a região limitada pelas retas $2x - y = 1$, $2x - y = -3$, $3x + y = 1$ e $3x + y = -2$

20. $\displaystyle\iint_R \frac{x + 2y}{\cos(x - y)}\,dA$, onde R é o paralelogramo limitado pelas retas $y = x$, $y = x - 1$, $x + 2y = 0$ e $x + 2y = 2$

21. $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$

22. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

23. $\iint_R e^{x+y}\,dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leqslant 1$

24. Seja f uma função contínua sobre $[0, 1]$ e seja R a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x + y)\,dA = \int_0^1 u f(u)\,du$$

15 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Suponha que f é uma função contínua definida sobre um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
   (a) Escreva uma expressão para a soma dupla de Riemann de f. Se $f(x, y) \geqslant 0$, o que essa soma representa?
   (b) Escreva a definição de $\iint_R f(x, y)\,dA$ como um limite.
   (c) Qual é a interpretação geométrica de $\iint_R f(x, y)\,dA$ se $f(x, y) \geqslant 0$? E se f tem valores positivos e valores negativos?
   (d) Como calcular $\iint_R f(x, y)\,dA$?
   (e) O que a Regra do Ponto Médio para integrais duplas diz?
   (f) Escreva uma expressão para o valor médio de f.

2. (a) Como você define $\iint_D f(x, y)\,dA$ se D é uma região limitada que não é retangular?
   (b) O que é uma região do tipo I? Como calcular $\iint_D f(x, y)\,dA$ se D é uma região do tipo I?
   (c) O que é uma região do tipo II? Como calcular $\iint_D f(x, y)\,dA$ se D é uma região do tipo II?
   (d) Quais as propriedades de uma integral dupla?

3. Como transformar uma integral dupla em coordenadas retangulares para uma integral em coordenadas polares? Por que você faria isso?

4. Se uma lâmina ocupa uma região plana D e tem densidade $\rho(x, y)$, escreva expressões para cada um dos seguintes itens em termos de integral dupla.
   (a) A massa.
   (b) Os momentos em relação aos eixos.
   (c) O centro de massa.
   (d) Os momentos de inércia em relação aos eixos e à origem.

5. Seja f um função densidade conjunta de um par de variáveis aleatórias X e Y.
   (a) Escreva uma integral dupla que represente a probabilidade de X estar entre a e b e Y estar entre c e d.
   (b) Que propriedades f possui?
   (c) Quais são os valores esperados de X e Y?

6. Escreva uma expressão para a área de uma superfície com equação $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

7. (a) Escreva a definição da integral tripla sobre uma caixa retangular B.
   (b) Como calcular $\iiint_B f(x, y, z)\,dV$?
   (c) Como definir $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E for uma região sólida limitada diferente de uma caixa retangular?
   (d) O que é uma região sólida do tipo 1? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E é tal região?
   (e) O que é uma região sólida do tipo 2? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E é tal região?
   (f) O que é uma região sólida do tipo 3? Como calcular $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se E é tal região?

8. Suponha que um objeto sólido ocupe uma região E e tenha função densidade $\rho(x, y, z)$. Escreva expressões para cada um dos seguintes itens.
   (a) A massa.