Temos que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, logo existe um disco B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertence a B. Portanto, olhando a Equação 10, vemos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertence a B. Isso implica que se C é uma curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de $\mathbf{u}$, então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento 2δ. Isso é verdade na direção de todo vetor $\mathbf{u}$; portanto, se restringirmos (x, y) a B, o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em P. Logo, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ sempre que (x, y) está em B. Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local. □

14.7 Exercícios

1. Suponha que (1, 1) seja um ponto crítico de f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 1, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4, \quad f_{xy}(1, 1) = 3, \quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que (0, 2) seja um ponto crítico de g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?

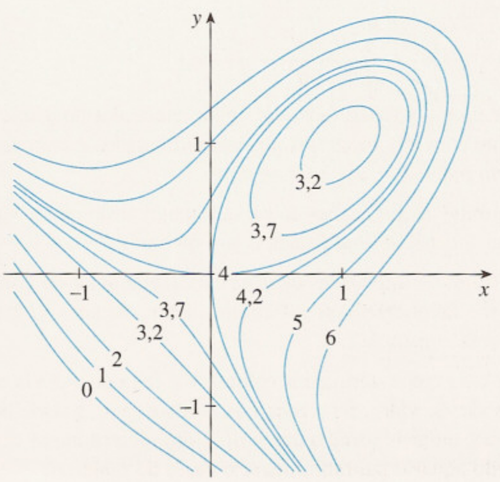
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1, \quad g_{xy}(0, 2) = 2, \quad g_{yy}(0, 2) = -8$

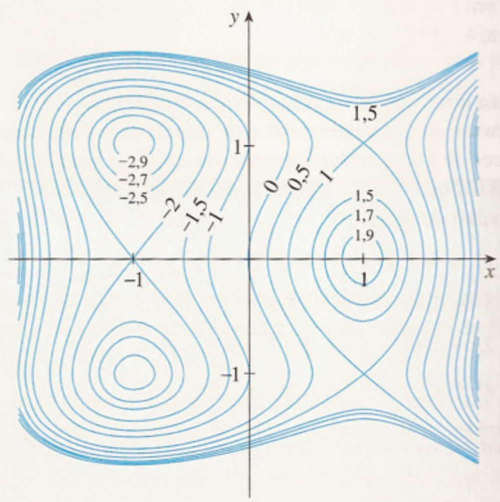
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4, \quad g_{xy}(0, 2) = 6, \quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 □ Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida utilize o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–18 □ Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, utilize-o com a janela de inspeção e o ponto de vista que mostre os aspectos importantes da função.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

8. $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = xy - 2x - y$

12. $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

13. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$

14. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

15. $f(x, y) = e^x \cos y$

16. $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2y^2}$

17. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$

18. $f(x, y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

19–22 □ Utilize o gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida utilize o cálculo para achar esses valores precisamente.

19. $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

20. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

21. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

22. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

23–26 □ Utilize um dispositivo gráfico como no Exemplo 4 (ou Método de Newton ou um determinador de raízes) para determinar os pontos críticos de f com arredondamento na terceira casa decimal. Em seguida classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico.

23. $f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

24. $f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

25. $f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

26. $f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4 \cos y$

27–34 □ Determine os valores máximo e mínimo absoluto de f no conjunto D.

27. $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$

28. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, D é a região triangular fechada com vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$ e $(-1, -2)$

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1\}$

30. $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 9, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

31. $f(x, y) = 1 + xy - x - y$, D é a região limitada pela parábola $y = x^2$ e a reta $y = 4$

32. $f(x, y) = 2x^2 + x + y^2 - 2$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

33. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

34. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

35. Para funções de uma variável é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para funções de duas variáveis esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida utilize um computador para desenhar o gráfico com uma escolha cuidadosa de tamanho de janela de inspeção e de ponto de vista para ver como isso é possível.

36. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdade para funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida utilize um computador com uma escolha conveniente de janela de inspeção e ponto de vista para ver como isso é possível.

37. Determine a distância mais curta entre o ponto $(2, -2, 3)$ ao plano $6x + 4y - 3z = 2$.

38. Determine o ponto do plano $2x - y + z = 1$ que está mais próximo do ponto $(-4, 1, 3)$.

39. Determine os pontos da superfície $z^2 = xy + 1$ que estão mais próximos da origem.

40. Determine os pontos da superfície $x^2y^2z = 1$ que estão mais próximos da origem.

41. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

42. Determine três números positivos x, y e z cuja soma é 100 tal que $x^ay^bz^c$ seja máximo.

43. Determine o volume da maior caixa retangular com arestas paralelas aos eixos e que pode ser inscrita no elipsóide

$$9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$$

44. Resolva o problema do Exercício 43 para um elipsóide genérico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

45. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

46. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se sua superfície total é dada como 64 cm^2.

47. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

48. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

49. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

50. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg estabelece que a proporção de indivíduos numa população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

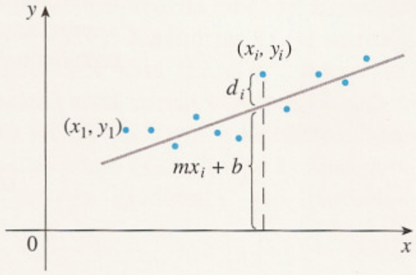
onde p, q e r são proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

51. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y sejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e b. O cientista realiza um experimento e coleta dados na forma de pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), e então plota esses pontos. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "se aproxime" dos pontos tanto quanto possível (veja a figura). Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta que melhor aproxima é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Assim, a reta é determinada resolvendo esse sistema linear de duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2 do Volume I para mais aplicações do método dos mínimos quadrados.)



52. Determine uma equação do plano que passe pelo ponto (1, 2, 3) que corte o menor volume do primeiro octante.

Projeto Aplicado

Projeto de uma Caçamba

Para esse projeto, inicialmente defina a forma na qual você deseja dimensionar uma caçamba de entulho com tampa. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar que minimize o custo de construção.

1. Primeiro estabeleça uma caçamba de entulho. Estude cuidadosamente e descreva todos os detalhes de sua construção, e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.

2. Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:

   - Os lados, frente e traseiro devem ser feitos de aço laminado de 0,1046 polegada de espessura, que custa \$ 0,70 por pé quadrado (incluindo custos de corte e dobra).
   - A base (fundo) é feita de um aço laminado de 0,1345 polegada de espessura, que custa \$ 0,90 por pé quadrado.
   - Tampas custam aproximadamente \$ 50,00 cada, não importando a dimensão.
   - Soldagem custa aproximadamente \$ 0,18 por pé, considerando tanto material quanto mão-de-obra.

   Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.

3. Descreva como qualquer das hipóteses ou simplificações feitas podem afetar o resultado.

4. Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração da forma da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.