Se usarmos a notação vetorial introduzida no final da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta como se segue.

> **5** Se f é definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que
>
> $$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$

Note que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$, e (5) é a exata definição do limite para funções de uma variável simples. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que (5) se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c\rangle$, e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Exercícios

1. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura externa como função da latitude, longitude e tempo.
(b) Elevação (altura acima do nível do mar) como função da longitude, latitude e tempo.
(c) Custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e tempo gasto.

3–4 □ Utilize a tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida explique por que sua afirmação está correta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$ **4.** $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5–20 □ Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$ **6.** $\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy\cos(x - 2y)$

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ **8.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{8x^2y^2}{x^4 + y^4}$ **10.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$ $= x(x^2+y^2)$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **12.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy + 1}{x^2 + y^2 + 1}$

13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$ **14.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

16. $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$

17. $\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy}\operatorname{sen}(\pi z/2)$

18. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

19. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$

20. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$

21–22 □ Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

21. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

22. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

23–24 □ Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

23. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x, y) = 2x + 3y - 6$

24. $g(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}$, $f(x, y) = x^2 - y$

25–26 □ Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida utilize fórmulas para explicar o que você observou.

25. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$ **26.** $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

27–36 □ Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

27. $F(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$ **28.** $F(x, y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

29. $F(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{y})$ **30.** $F(x, y) = \ln(2x + 3y)$

31. $G(x, y) = \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y}$

32. $G(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 + y^2)$

33. $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 - z}$ **34.** $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

35. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

36. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ c1 $x = y$ $x \to 0$ c_2

37–38 □ Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares, o ponto (x, y) com $r \geq 0$, note que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

37. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

38. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

39. Utilize coordenadas esféricas para achar

$$\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

40. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e adivinhamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

41. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Dica*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

42. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas Parciais

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a que o termômetro indica. O Serviço Nacional de Meteorologia americano criou um *índice de calor* (também conhecido como índice de temperatura em função da umidade) para descrever os efeitos combinados de temperatura e umidade. O índice de calor I é a temperatura que corresponde à sensação de calor quando a temperatura real é T e a umidade relativa do ar é H. Assim I é uma função de T e de H, e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é extraída de uma tabela compilada pelo Serviço Nacional de Meteorologia.

TABELA 1 Índice de calor I como função da temperatura e umidade

		Umidade relativa (%)								
	T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Temperatura real (°F)	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168