EXEMPLO 5 □ Determine o valor máximo da função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na curva da intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

□ O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 5). O Exemplo 5 pergunta pelo valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

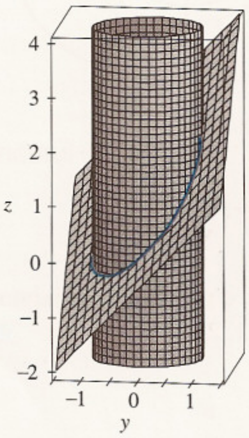


FIGURA 5

$$\boxed{17} \quad 1 = \lambda + 2x\mu$$

$$\boxed{18} \quad 2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$\boxed{19} \quad 3 = \lambda$$

$$\boxed{20} \quad x - y + z = 1$$

$$\boxed{21} \quad x^2 + y^2 = 1$$

Tomando $\lambda = 3$ [de (19)] em (17) obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, (18) dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em (21) temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

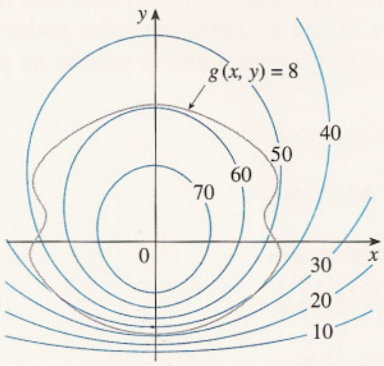
e também $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Assim $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$ e, de (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$.

14.8 Exercícios

1. Na figura estão mapas de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre uma que encoste no círculo. Qual o significado dos valores de c para essas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3–17 □ Utilize os Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição (ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 - y^2;\quad x^2 + y^2 = 1$

4. $f(x, y) = 4x + 6y;\quad x^2 + y^2 = 13$

5. $f(x, y) = x^2y;\quad x^2 + 2y^2 = 6$

6. $f(x, y) = x^2 + y^2;\quad x^4 + y^4 = 1$

7. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$

8. $f(x, y, z) = 8x - 4z; \quad x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$

9. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;$
$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15. $f(x, y, z) = x + 2y; \quad x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$

16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z;$
$x + y - z = 0, \quad x^2 + 2z^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = yz + xy; \quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$

18–19 □ Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

18. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

19. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

20. (a) Se seu sistema algébrico computacional traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita a $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.
(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use CAS para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

21. A produção total P de um certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Na Seção 14.1 e 14.3 discutimos como Cobb-Douglas modelaram $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ seguindo certas hipóteses econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia pode gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, maximizar a produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

22. Referindo-se ao Exercício 21, suponha agora que a produção esteja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Que valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

23. Utilize multiplicadores de Lagrange para provar que o retângulo com área máxima e que tem um perímetro constante p é um quadrado.

24. Utilize multiplicadores de Lagrange para provar que o triângulo com área máxima e que tem um perímetro constante p é eqüilátero. [*Dica*: Utilize a fórmula de Heron para área: $A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$, onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.]

25–37 □ Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

25. Exercício 37
26. Exercício 38
27. Exercício 39
28. Exercício 40
29. Exercício 41
30. Exercíciz 42
31. Exercício 43
32. Exercício 44
33. Exercício 45
34. Exercício 46
35. Exercício 47
36. Exercício 48
37. Exercício 49

38. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1500 cm² e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

39. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o parabolóide $z = x^2 + y^2$ numa elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão o mais próximo e o mais longe possível da origem.

40. Determine os pontos mais alto e mais baixo da elipse do Exercício 39.

41. (a) Determine o valor máximo de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n}$ dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.
(b) Deduza da parte (a) que se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

42. (a) Maximize $\Sigma_{i=1}^{n} x_iy_i$ sujeita às restrições $\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\Sigma_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.
(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\Sigma a_i^2}} \qquad \text{e} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\Sigma b_i^2}}$$

e mostre que

$$\sum a_ib_i \leqslant \sqrt{\Sigma a_i^2}\,\sqrt{\Sigma b_i^2}$$

para números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwarz.