16.2 Exercícios

1–16 □ Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y\,ds$, $\quad C\colon x = t^2,\ y = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\int_C (y/x)\,ds$, $\quad C\colon x = t^4,\ y = t^3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\int_C xy^4\,ds$, $\quad C$ é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$

4. $\int_C ye^x\,ds$, $\quad C$ é o segmento de reta que liga (1, 2) a (4, 7).

5. $\int_C (xy + \ln x)\,dy$,
C é o arco de parábola $y = x^2$ de (1, 1) a (3, 9).

6. $\int_C \operatorname{sen} x\,dx$,
C é o arco de curva $x = y^4$ de (–1, 1) a (1, 1).

7. $\int_C xy\,dx + (x - y)\,dy$, $\quad C$ consiste nos segmentos de reta de (0, 0) a (2, 0) e de (2, 0) a (3, 2).

8. $\int_C x\sqrt{y}\,dx + 2y\sqrt{x}\,dy$, $\quad C$ consiste no menor arco de círculo $x^2 + y^2 = 1$ de (1, 0) a (0, 1) e o segmento de reta de (0, 1) a (4, 3).

9. $\int_C xy^3\,ds$, $\quad C\colon x = 4\operatorname{sen} t,\ y = 4\cos t,\ z = 3t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

10. $\int_C x^2z\,ds$, $\quad C$ é o segmento de reta de $(0, 6, -1)$ a $(4, 1, 5)$

11. $\int_C xe^{yz}\,ds$, $\quad C$ é o segmento de reta de (0, 0, 0) a (1, 2, 3).

12. $\int_C xz\,ds$, $\quad C\colon x = 6t,\ y = 3\sqrt{2}t^2,\ z = 2t^3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

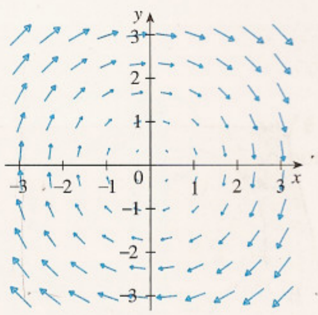
13. $\int_C x^3y^2z\,dz$, $\quad C\colon x = 2t,\ y = t^2,\ z = t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C yz\,dy + xy\,dz$, $\quad C\colon x = \sqrt{t},\ y = t,\ z = t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

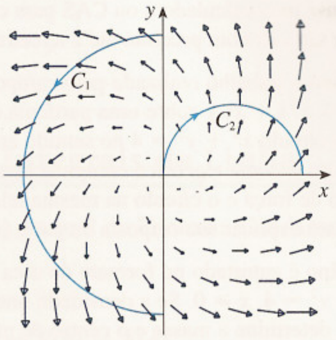
15. $\int_C z^2\,dx - z\,dy + 2y\,dz$,
C consiste nos segmentos de reta de (0, 0, 0) a (0, 1, 1), de (0, 1, 1) a (1, 2, 3) e de (1, 2, 3) a (1, 2, 4).

16. $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$,
C consiste nos segmentos de reta de (0, 0, 0) a (2, 0, 0), de $(2, 0, 0)$ a $(1, 3, -1)$ e de $(1, 3, -1)$ a $(1, 3, 0)$

17. Seja $\mathbf{F}$ o campo vetorial mostrado na figura.
(a) Se C_1 é o segmento de reta vertical de $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine se $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.
(b) Se C_2 é o círculo de raio 3 e centro na origem percorrido no sentido anti-horário, determine se $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é positivo, negativo ou zero.



18. A figura mostra um campo vetorial $\mathbf{F}$ e duas curvas, C_1 e C_2. As integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre C_1 e C_2 são positivas, negativas ou nulas? Explique.



19–22 □ Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y^3\,\mathbf{i} - y\sqrt{x}\,\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

CAS **23–24** □ Use um gráfico do campo vetorial $\mathbf{F}$ e a curva C para dizer se a integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Em seguida calcule a integral.

23. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrido no sentido anti-horário de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

24. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{j}$, C é a parábola $y = 1 + x^2$ de $(-1, 2)$ a $(1, 2)$

25. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
(b) Ilustre a parte (a) utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = 0$, $1/\sqrt{2}$ e 1 (como na Figura 13).

26. (a) Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ e C é dado por $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.
(b) Ilustre a parte (a) utilizando um computador para desenhar C e os vetores do campo vetorial correspondentes a $t = \pm 1$ e $\pm\frac{1}{2}$ (como na Figura 13).

CAS **27.** Determine o valor exato de $\int_C x^3y^5\,ds$, onde C é a parte da astróide $x = \cos^3 t$, $y = \text{sen}^3 t$ no primeiro quadrante.

CAS **28.** Determine o valor exato de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4e^y\,\mathbf{i} + \ln z\,\mathbf{j} + \sqrt{y^2 + z^2}\,\mathbf{k}$ e C é o segmento de reta entre $(1, 2, 1)$ e $(6, 4, 5)$.

29. Se C é a curva com equações paramétricas $x = \ln t$, $y = e^{-t}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, use uma calculadora ou CAS para calcular a integral de linha $\int_C x \,\text{sen}\, y\,ds$ com precisão até a terceira casa decimal.

30. (a) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.

CAS (b) Utilize um sistema algébrico computacional para desenhar o campo de força e o círculo na mesma tela. Use essa figura para explicar sua resposta da parte (a).

31. Um arame fino é entortado no formato de uma semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$. Se a densidade linear é uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.

32. Determine a massa e o centro de massa de um arame fino no formato de um quarto de círculo $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, se a função densidade é $\rho(x, y) = x + y$.

33. (a) Escreva fórmulas semelhantes à Equação 4 para o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de um arame fino com função densidade $\rho(x, y, z)$ e forma da curva espacial C.

(b) Determine o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = 2\,\text{sen}\,t$, $y = 2\cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade for uma constante k.

34. Determine a massa e o centro de massa de um arame com formato da hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \text{sen}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, se a densidade em qualquer ponto for igual ao quadrado da distância do ponto à origem.

35. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y)$ está sobre uma curva plana C, seu **momento de inércia** em relação aos eixos x e y são definidos como

$$I_x = \int_C y^2\rho(x, y)\,ds \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x, y)\,ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exemplo 3.

36. Se um arame com densidade linear $\rho(x, y, z)$ está sobre uma curva espacial C, seu **momento de inércia** em relação aos eixos x, y e z são definidos como

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,ds$$

Determine os momentos de inércia do arame do Exercício 33.

37. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$ para movimentar um objeto sobre um arco da ciclóide $\mathbf{r}(t) = (t - \text{sen}\,t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

38. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = x\,\text{sen}\,y\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ para movimentar um objeto sobre a parábola $y = x^2$ de $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.

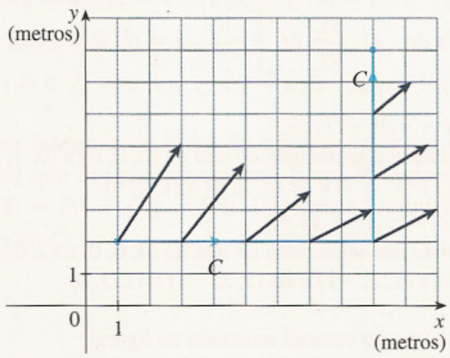
39. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yx\,\mathbf{j} + zy\,\mathbf{k}$ para movimentar um objeto sobre a curva $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

40. A força exercida pela carga elétrica colocada na origem sobre uma partícula carregada num ponto (x, y, z) com vetor de posição $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ é $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, onde K é uma constante (veja o Exemplo 5 da Seção 16.1). Determine o trabalho realizado quando a partícula se move sobre o segmento de reta de $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

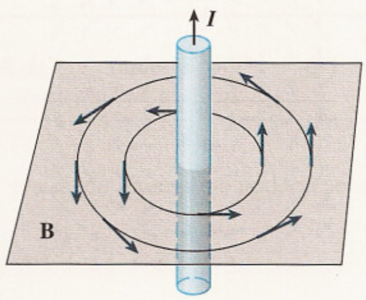
41. Um homem pesando 160 lb carrega uma lata de pintura de 25 lb por uma escada helicoidal em torno de um silo com raio de 20 pés. Se o silo tem 90 pés de altura e o homem dá três voltas completas em torno do silo, quanto trabalho é feito pelo homem contra a gravidade para chegar ao topo?

42. Suponha que haja um furo na lata de pintura do Exercício 41 e 9 lb de tinta vazam da lata de modo contínuo durante a subida do homem. Quanto trabalho é realizado?

43. Um objeto se move sobre a curva C mostrada na figura de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Os comprimentos dos vetores do campo de força $\mathbf{F}$ são medidos em newtons pela escala dos eixos. Estime o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ sobre o objeto.



44. Experimentos mostram que uma corrente contínua I num fio comprido produz um campo magnético $\mathbf{B}$ que é tangente a qualquer círculo em um plano perpendicular ao fio e cujo centro seja o eixo do fio (como na figura). A *Lei de Ampère* relaciona a



Portanto

$$\boxed{15} \qquad W = \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(a)|^2$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, metade da massa vezes o quadrado da rapidez, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto podemos reescrever a Equação 15 como

$$\boxed{16} \qquad W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de força no caminho C é igual à variação da energia cinética nos pontos terminais de C.

Agora vamos admitir que $\mathbf{F}$ seja um campo conservativo de força; ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, e temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2 temos

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} \\ &= -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] \\ &= P(A) - P(B) \end{aligned}$$

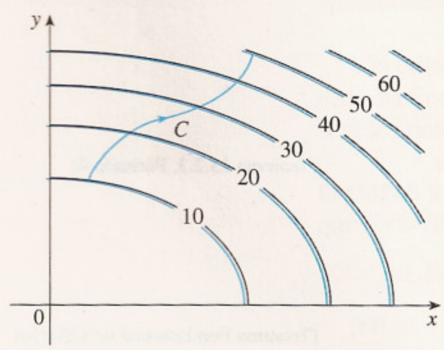
Comparando essa equação com a Equação 16 vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo conservativo de força, então a soma de sua energia potencial e energia cinética permanece constante. Esta é a chamada **Lei de Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é chamado conservativo.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + t$, $0 \leq t \leq 1$.

$x \backslash y$	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 □ Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservativo. Se é, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y)\,\mathbf{i} + (5x + 4y)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + 4xy)\,\mathbf{i} + (4xy - y^3)\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y\,\mathbf{i} + ye^x\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (2x\cos y - y\cos x)\,\mathbf{i} + (-x^2\,\mathrm{sen}\,y - \mathrm{sen}\,x)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + 2xy + \ln x)\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$

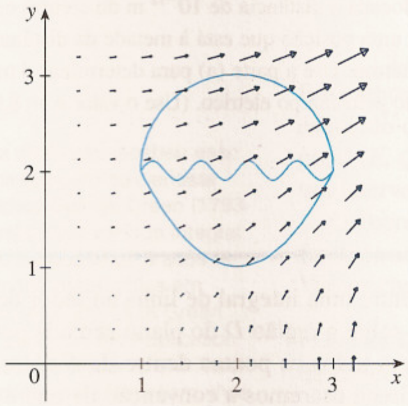
9. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy} + 4x^3y)\,\mathbf{i} + (xe^{xy} + x^4)\,\mathbf{j}$

11. A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

(a) Explique por que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

(b) Qual é esse valor comum?



12–18 □ (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + (x + 2y)\,\mathbf{j}$, C é a semicircunferência superior que começa em $(0, 1)$ e termina em $(2, 1)$.

13. $\mathbf{F}(x, y) = x^3y^4\,\mathbf{i} + x^4y^3\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (1 + t^3)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = e^{2y}\,\mathbf{i} + (1 + 2xe^{2y})\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = te^t\,\mathbf{i} + (1 + t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (x + z)\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
C é o segmento de reta de $(2, 1, 4)$ a $(8, 3, -1)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3z^4\,\mathbf{i} + 3x^2y^2z^4\,\mathbf{j} + 4x^2y^3z^3\,\mathbf{k}$,
C: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xe^z\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + 2x^2e^z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19–20 □ Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C 2x\operatorname{sen} y\,dx + (x^2\cos y - 3y^2)\,dy$,
C é qualquer caminho de $(-1, 0)$ a $(5, 1)$

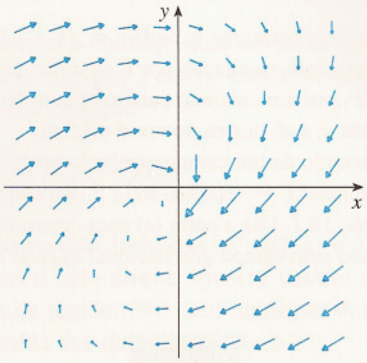
20. $\int_C (2y^2 - 12x^3y^3)\,dx + (4xy - 9x^4y^2)\,dy$,
C é qualquer caminho de $(1, 1)$ a $(3, 2)$

21–22 □ Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força $\mathbf{F}$ movendo um objeto de P a Q.

21. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y^3\,\mathbf{i} + x^3y^2\,\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(2, 1)$

22. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2/x^2)\,\mathbf{i} - (2y/x)\,\mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(4, -2)$

23. O campo vetorial mostrado na figura é conservativo? Explique.



CAS **24–25** □ Analisando o gráfico de F você diria que ele é conservativo? Verifique se seu palpite estava correto.

24. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (x^2 + x\cos y)\,\mathbf{j}$

25. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{(x - 2y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

26. Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Determine as curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.

(a) $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

27. Mostre que se um campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivada parcial de primeira ordem contínua, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

28. Use o Exercício 27 para mostrar que a integral de linha $\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$ não é independente do caminho.

29–32 □ Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo e (c) simplesmente conexo.

29. $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$

30. $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$

31. $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

32. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ or } 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

33. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

(b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [*Dica*: Calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isso contraria o Teorema 6?