15.7 Exercícios

1. Calcule a integral do Exemplo 1 integrando primeiro em relação a z, depois x e então y.

2. Calcule a integral $\iiint_E (x^2 + yz)\, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ -3 \leqslant y \leqslant 0,\ -1 \leqslant z \leqslant 1\}$$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3–6 □ Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\, dy\, dx\, dz$

4. $\int_1^2 \int_0^x \int_0^{1-y} x^3y^2z\, dz\, dy\, dx$

5. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\, dx\, dz\, dy$

6. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\, dx\, dy\, dz$

7–16 □ Calcule a integral tripla.

7. $\iiint_E 2x\, dV$, onde
$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$$

8. $\iiint_E yz \cos(x^5)\, dV$, onde
$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x \leqslant z \leqslant 2x\}$$

9. $\iiint_E 6xy\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

10. $\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $3x + 2y + z = 6$

11. $\iiint_E xy\, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$

12. $\iiint_E xz\, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$

13. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$ e $x + z = 1$

14. $\iiint_E (x + 2y)\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro parabólico $y = x^2$ e pelos planos $x = z$, $x = y$ e $z = 0$

15. $\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$

16. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

17–20 □ Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

17. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + 3y + 6z = 12$

18. O sólido limitado pelo cilindro elíptico $4x^2 + z^2 = 4$ e os planos $y = 0$ e $y = z + 2$

19. O sólido limitado pelo cilindro $x = y^2$ e os planos $z = 0$ e $x + z = 1$

20. O sólido contido pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 18 - x^2 - y^2$

21. (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortado do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 1$ como uma integral tripla.

CAS (b) Utilize a Tabela de Integrais (na *contracapa*) ou um sistema computacional algébrico para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).

22. (a) Na **Regra do Ponto Médio para Integrais Triplas** usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla sobre uma caixa B, onde $f(x, y, z)$ é calculada no centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ da caixa B_{ijk}. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar $\iiint_B e^{-x^2-y^2-z^2}\, dV$, onde B é o cubo definido por $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Divida B em oito cubos de igual tamanho.

CAS (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão até duas casas decimais. Compare com a resposta da parte (a).

23–24 □ Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$

24. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$

25–28 □ Expresse a integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

25. $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = 6$

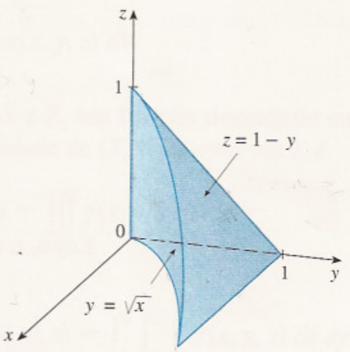
26. $z = 0$, $x = 0$, $y = 2$, $z = y - 2x$

27. $z = 0$, $z = y$, $x^2 = 1 - y$

28. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

29. A figura mostra a região de integração para a integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

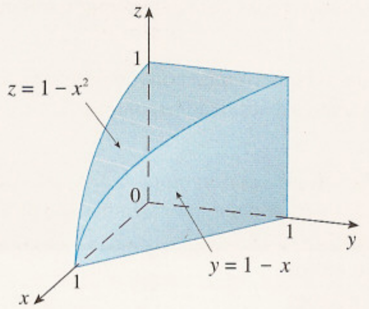


Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente em cinco modos diferentes.

30. A figura mostra a região de integração para a integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente em cinco modos diferentes.



31–32 □ Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

31. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

32. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ $\iiint_E \rho(x,y,z)\,dV$

33–36 □ Determine a massa e centro de massa do sólido dado E com a função densidade dada ρ.

33. E é o sólido do Exercício 9; $\rho(x, y, z) = 2$

34. E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x + z = 1$, $x = 0$ e $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$

35. E é o cubo dado por $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

36. E é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

37–38 □ Estabeleça, mas não calcule, expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z.

37. O sólido do Exercício 15; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

38. O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

CAS **39.** Seja E um sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$ com função densidade $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use um sistema computacional algébrico para determinar os valores exatos das seguintes quantidades para E.
(a) A massa.
(b) O centro de massa.
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z.

CAS **40.** Se E é o sólido do Exercício 16 com função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine as seguintes quantidades, com precisão de três decimais.
(a) A massa.
(b) O centro de massa.
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z.

41. Determine os momentos de inércia para um cubo com densidade constante k e lados de comprimento L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.

42. Determine os momentos de inércia do tijolo retangular de dimensões a, b e c, massa M e densidade constante se o centro do tijolo está na origem e suas arestas são paralelas aos eixos coordenados.

43. A função densidade conjunta de variáveis aleatórias X, Y e Z é $f(x, y, z) = Cxyz$ se $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2$ e $f(x, y, z) = 0$ em caso contrário.
(a) Determine o valor da constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y + Z \leqslant 1)$.

44. Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0,5x + 0,2y + 0,1z)}$ se $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$ e $f(x, y, z) = 0$ em caso contrário.
(a) Determine o valor da constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

45–46 □ O **valor médio** de uma função $f(x, y, z)$ sobre uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{méd}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

onde $V(E)$ é o volume de E. Por exemplo, se ρ é a função densidade, então $\rho_{\text{méd}}$ é a densidade média de E.

45. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = xyz$ sobre o cubo com lados de comprimento L que está no primeiro octante com um vértice na origem e arestas pararelas ao eixos coordenados.

46. Determine o valor médio da função $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre o tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

47. Determine a região E para a qual a integral

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

é máxima.