15.3 Exercícios

1–6 □ Calcule as integrais iteradas.

1. $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$

2. $\int_1^2 \int_y^2 xy\, dx\, dy$

3. $\int_0^1 \int_y^{e^y} \sqrt{x}\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 - y)\, dy\, dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, dr\, d\theta$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7–18 □ Calcule a integral dupla.

7. $\iint_D x^3y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ -x \leq y \leq x\}$

8. $\iint_D \dfrac{4y}{x^3 + 2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x\}$

9. $\iint_D \dfrac{2y}{x^2 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

10. $\iint_D e^{y^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$

11. $\iint_D e^{x/y}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq y^3\}$

12. $\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$

13. $\iint_D x \cos y\, dA$, D é limitada por $y = 0, y = x^2, x = 1$

14. $\iint_D (x + y)\, dA$, D é limitada por $y = \sqrt{x}, y = x^2$

15. $\iint_D y^3\, dA$,
D é a região triangular com vértices (0, 2), (1, 1) e (3, 2)

16. $\iint_D (y^2 - x)\, dA$, D é limitada por $x = y^2, x = 3 - 2y^2$

17. $\iint_D (2x - y)\, dA$,
D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2.

18. $\iint_D ye^x\, dA$,
D é a região triangular com vértices (0, 0), (2, 4) e (6, 0)

19–28 □ Determine o volume do sólido dado.

19. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$

20. Abaixo do parabolóide $z = 3x^2 + y^2$ e acima da região limitada por $y = x$ e $x = y^2 - y$

21. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo com vértices em (1, 1), (4, 1) e (1, 2)

22. Limitada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2 + 4$ e pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1$

23. Limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0, z = 0, x + 2y = 2$ no primeiro octante

24. Limitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0, z = 0$ no primeiro octante

25. Limitada pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0$ e $x + y + z = 1$

26. Limitada pelos planos $y = 0, z = 0, y = x$ e $6x + 2y + 3z = 6$

27. Limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0, z = 0$ no primeiro octante.

28. Limitada pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

29. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para estimar a coordenada x dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

30. Determine o volume aproximado do sólido no primeiro octante que é limitado pelos planos $y = x, z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize o dispositivo gráfico para estimar os pontos de intersecção.)

CAS **31–32** □ Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

31. Abaixo da superfície $z = x^3y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geq 0$

32. Entre os parabolóides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

33–38 □ Esboce a região de integração e faça a mudança da ordem de integração.

33. $\int_0^1 \int_0^x f(x, y)\, dy\, dx$

34. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x, y)\, dy\, dx$

35. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$

36. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y)\, dx\, dy$

37. $\int_0^4 \int_{y/2}^2 f(x, y)\, dx\, dy$

38. $\int_0^1 \int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

39–44 □ Calcule a integral trocando a ordem de integração.

39. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$

40. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\, dy$

41. $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos(x^2)\,dx\,dy$

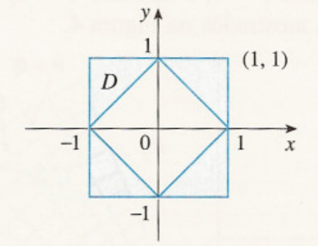
42. $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3\operatorname{sen}(y^3)\,dy\,dx$

43. $\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos x\,\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\,dy$

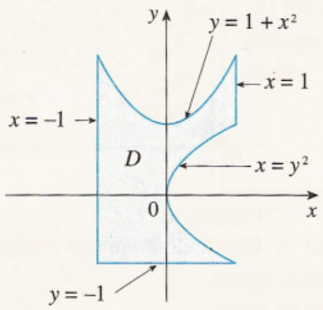
44. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\,dx\,dy$

45–46 □ Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

45. $\iint_D x^2\,dA$



46. $\iint_D xy\,dA$



47–48 □ Utilize a Propriedade 11 para estimar o valor da integral.

47. $\iint_D \sqrt{x^3+y^3}\,dA, \quad D=[0,1]\times[0,1]$

48. $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA,$

D é o disco com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$

49. Prove a Propriedade 11.

50. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que se segue:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

51. Calcule $\iint_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4)\,dA$, onde $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 2\}$.
[*Dica:* Explore o fato de que D é simétrica com relação a ambos os eixos.]

52. Utilize a simetria para calcular $\iint_D (2-3x+4y)\,dA$, onde D é a região limitada pelo quadrado com vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 5)$.

53. Calcule $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA$, onde D é o disco $x^2+y^2 \leqslant 1$, identificando primeiro a integral como o volume de um sólido.

CAS **54.** Desenhe o sólido limitado pelo plano $x+y+z=1$ e pelo parabolóide $z=4-x^2-y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu CAS para fazer esse desenho, para achar as equações das fronteiras da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x,y)\,dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

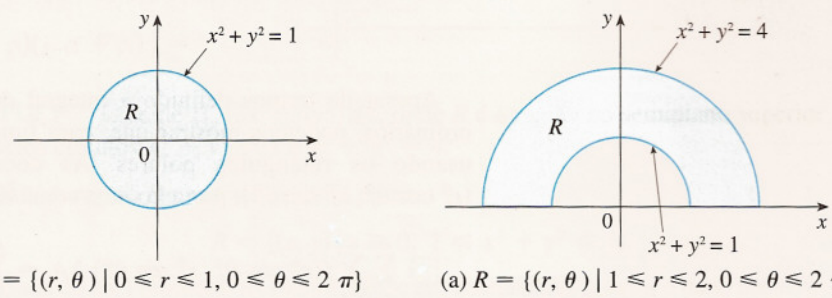


FIGURA 1 (a) $R=\{(r,\theta)\,|\,0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (a) $R=\{(r,\theta)\,|\,1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$